F. KLEIN UND A. SOMMERFELD

ÜBER DIE

# THEORIE DES KREISELS

---

IN VIER HEFTEN

I. EINFÜHRUNG IN DIE KINEMATIK UND KINETIK DES KREISELS · II. DURCHFÜHRUNG DER THEORIE IM FALLE DES SCHWEREN SYMMETRISCHEN KREISELS · III. DIE STÖRENDEN EINFLÜSSE · ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE ANWENDUNGEN · IV. DIE TECHNISCHEN ANWENDUNGEN DER KREISELTHEORIE

---

MIT 143 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1922 · 1918 · 1914 · 1910

COPYRIGHT 1923 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

# VORWORT.

Als F. Klein im Wintersemester 1895/96 eine zweistündige Vorlesung „über den Kreisel“ hielt, bezweckte er einerseits, die namentlich in England verbreitete unmittelbarere Auffassung der mechanischen Probleme gegenüber der abstrakteren Färbung der deutschen Schule zu betonen, andererseits die namentlich in Deutschland ausgebildeten Methoden der Riemannschen Funktionentheorie für die Mechanik fruchtbar zu machen. Die Berücksichtigung der Anwendungen und der physikalischen Wirklichkeit wurde damals mehr angedeutet und gefordert, als wirklich durchgeführt.

In der aus der Feder von A. Sommerfeld stammenden umfänglichen Drucklegung überwog mehr und mehr das Interesse der Anwendungen, besonders nach dessen Übernahme eines Lehramtes in der technischen Mechanik und später in der Physik. Der auf diese Weise hinzutretende Stoff astronomischen, geophysikalischen und technischen Inhaltes hatte aber gegenüber dem Plane der ursprünglichen Vorlesung mit Notwendigkeit eine Änderung des mathematischen Standpunktes im Gefolge. Während die in den ersten Heften vorbereiteten Näherungsmethoden (Methode der kleinen Schwingungen, Behandlung der pseudoregulären Präcession) und namentlich die anschauliche Formulierung der mechanischen Prinzipien mittels des Impulsbegriffes den Anwendungen äufserst konform waren, erwiesen sich die weitergehenden funktionentheoretischen Methoden, die genaue Darstellung der Bewegung durch elliptische Funktionen etc., weiterhin als entbehrlich. So wurden z. B. die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bezw. die mit ihnen verwandten Quaternionengröfsen, deren geometrische Bedeutung im ersten, deren analytische Wichtigkeit im zweiten Hefte mit besonderem Nachdruck herausgearbeitet war, in dem dritten und vierten Hefte fallen gelassen, natürlich in voller Übereinstimmung mit Klein selbst, dessen Interessen sich ebenfalls mehr und mehr den Anwendungen zugewandt hatten. Insbesondere kommt das vierte Heft bei der Darstellung der technischen Kreiselprobleme mit dem allereinfachsten und elementarsten Gesetz der Kreiselwirkung aus, welches unmittelbar aus der Impulsauffassung der Dynamik starrer Körper fliefst und zu Beginn dieses Heftes noch einmal kurz abgeleitet wird.

Wir wollen nicht leugnen, dafs unserer Arbeit auf diese Weise im Lauf der fünfzehn Jahre, die zwischen dem ersten Plan und dem nunmehrigen Abschlufs des Buches verflossen sind, mit der Einheit der Zeit auch die Einheitlichkeit von Stoff und Darstellungsart verloren gegangen ist, dafs wir in Bezug auf die allgemeine, sog. analytische Mechanik früher, namentlich in den Anzeigen zu Heft I und II, manches

versprochen haben, was später nicht gehalten wird, dafs wir andererseits manchen mathematischen Seitenweg eingeschlagen haben, der uns vorübergehend von unserem Hauptziel ablenkte: dem konkreten Verständnis des dynamischen Problems. Möge die Vielseitigkeit des Inhaltes und die Mannigfaltigkeit der angeschlagenen Interessengebiete als Ersatz angesehen werden für die mangelnde Systematik und Zielsicherheit der Darstellung.

Wenn wir von neuem den gesamten Stoff zu disponieren hätten, so würden wir wahrscheinlich die eigentliche Mechanik des Kreisels einschliefslich ihrer Anwendungen auf einem viel kleineren Raum darstellen, unter Beschneidung der analytischen Seitenschöfslinge, welche sich so gern von dem Stamm der Mechanik abzweigen. Mit dieser Darstellung würden wir uns an das grofse Publikum aller naturwissenschaftlichen oder technischen Interessenten der Kreiseltheorie wenden. Die analytischen Spezialausführungen, die wir schon wegen ihrer besonderen Schönheit gewifs nicht unterdrückt wissen möchten, würden wir in einer anderen Darstellung nur dem engeren mathematischen Kreise vorlegen. Was endlich die Bedürfnisse des ganz unmathematischen Lesers, also die schwierige Frage nach der populären Erklärung des Kreiselphänomens betrifft, so haben wir hierzu im zweiten Heft eine eingehend begründete kritische Stellung genommen und zu Anfang des vierten Heftes nochmals den zwar etwas langen, aber, wie uns scheint, allein gangbaren Weg gekennzeichnet, der von den allgemeinen Impulssätzen der Dynamik des starren Körpers ausgeht. Die Impulssätze wird man entweder systematisch aus der Punktmechanik heraus entwickeln oder gegebenenfalls nur durch Experimente erläutern, um sie weiterhin axiomatisch zu postulieren; auf Grund dieser Sätze lassen sich dann alle die zum Teil paradoxen Thatsachen der Kreiseltheorie als wohl definierte Näherungsaussagen qualitativ verstehen und in ihrem Gültigkeitsbereiche ohne Unklarheit umgrenzen.

Der Kreisel ist vor allen anderen mechanischen Vorrichtungen geeignet, den Sinn für wirkliche Mechanik zu wecken. Möge er in der Darstellung unseres Buches diesem Zweck in erhöhtem Mafse dienen und sich dadurch auch in Zukunft des ehrenvollen Beinamens würdig erweisen, den ihm Sir John Herschel vor hundert Jahren beilegte:

This philosophical instrument!

Göttingen und München, im April 1910.

F. KLEIN. A. SOMMERFELD.

# INHALTSVERZEICHNIS.

## Heft I.

## Einführung in die Kinematik und Kinetik des Kreisels.

# Heft II.

## Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels.

### Kapitel IV.

**Die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Einführung der elliptischen Integrale.**



### Kapitel V.

**Über besondere Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels, namentlich über die pseudoreguläre Präcession sowie über die Stabilität der Bewegungen.**

Kapitel VI.

**Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Funktionen.**



## Heft III.

## Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen.

Anhang zu Kapitel VI.



Kapitel VII.

**Theorie und Wirklichkeit. Einflufs der Reibung, des Luftwiderstandes, der Elastizität von Material und Unterlage auf die Kreiselbewegung.**

## Heft IV.

# Inhaltsverzeichnis von Heft IV.

## Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie.

# Einleitung.

Billiger Weise werden wir uns zu Beginn dieser Vorlesung darüber zu verständigen haben, was wir unter dem Worte Kreisel verstehen, und was wir nicht darunter begriffen wissen wollen.

*Unter einem Kreisel verstehen wir* — vorbehaltlich einer späteren Verallgemeinerung des Begriffes — *einen der Schwere unterworfenen starren Körper, dessen Masse symmetrisch um eine Axe des Körpers verteilt ist, und bei dem mittelst einer geeigneten Vorrichtung ein auf der Symmetrieaxe gelegener Punkt im Raume festgehalten wird.*

Wir bezeichnen den festen Punkt des Körpers als *Unterstützungspunkt O;* derselbe zerlegt die Symmetrieaxe in zwei Halbstrahlen, von denen wir nach beliebiger Auswahl einen als *Figurenaxe* bezeichnen. Die zur Figurenaxe senkrechte Ebene durch $O$ heifst die *Äquatorebene des Kreisels.*

Das nebenstehend abgebildete Modell, welches von dem um die experimentelle Seite der Kreiseltheorie besonders verdienten französischen Ingenieur Rozé verfertigt ist und welches uns in dieser Vorlesung ständig zu Demonstrationszwecken dienen wird, stellt einen Kreisel in dem angegebenen Sinne dar.*)

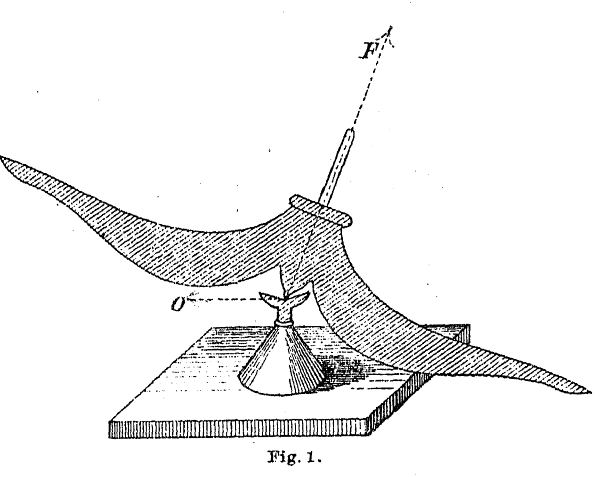



Fig. 1.

Von dem glockenförmig gestalteten Hauptteile giebt unsere Figur nur einen Meridianschnitt wieder; um das räumliche Bild desselben zu erhalten, müssen wir uns die Zeichnung um die Figurenaxe $OF$ gedreht denken. Das

*) Statt dessen wird man heute für viele Zwecke die von L. Prandtl konstruierten Kreiselmodelle (Verlag M. Schilling, Leipzig) bevorzugen, bei denen als Schwungkörper das mit geeigneten Massen versehene Rad eines Fahrrades verwendet wird. Vgl. hierüber F. Pfeiffer, Ztschr. f. Mathematik und Physik, Bd. 60, p. 337 (1912).

untere Ende der Figurenaxe ruht bei $O$ in einer an dem Gestell befestigten Pfanne auf, so dafs es sich während der Bewegung nicht wesentlich verschieben kann. Durch die eigentümliche Gestaltung des Hauptteiles ist erreicht worden, dafs bei vertikaler Stellung der Figurenaxe der Schwerpunkt des Kreisels senkrecht unter dem Unterstützungspunkte liegt, dafs sich also in dieser Stellung der Körper im stabilen Gleichgewicht befindet. Wird das Umgekehrte gewünscht, so läfst sich dieses durch Hinzufügung von Übergewichten bewirken, die selbst Rotationskörper sind und axial auf die Figurenaxe des Kreisels aufgesetzt werden. Eine Besonderheit des Rozéschen Kreisels besteht in einer sinnreichen Vorrichtung, welche es ermöglicht, dem Kreisel eine lebhafte Rotation zu erteilen, ohne die Spitze, in der er im Unterstützungspunkt endigt, zu schädigen. Alle Teile des Modells sind solide aus Metall gearbeitet. Wir erkennen in unserem Beispiele die obigen Merkmale des Kreiselbegriffes wieder: *die Rotationssymmetrie um die Figurenaxe, die feste Lage eines ihrer Punkte und die Starrheit des Materials.*

Dagegen stellt das uns wohlbekannte und gemeinhin als Kreisel bezeichnete Kinderspielzeug strenge genommen in dem oben festgesetzten Sinne des Wortes keinen Kreisel vor, weil der Unterstützungspunkt desselben nicht im Raume festliegt, sondern sich in der horizontalen Ebene, d. h. auf dem Erdboden frei bewegen kann. Unser mechanisches Problem tritt uns hier in komplizierterer Form entgegen. Zur Orientierung möge gleich jetzt bemerkt werden, dafs die vollständige analytische Behandlung des *Kreisels mit beweglichem Unterstützungspunkte* auf *hyperelliptische Funktionen* führt, während die allgemeine Bewegung des *Kreisels mit festem Unterstützungspunkte* durch *elliptische Funktionen* dargestellt wird. Wir werden auf dieses kompliziertere Problem in unserer Vorlesung nur anhangsweise eingehen können.

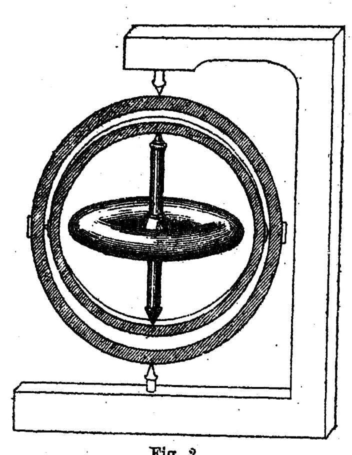


Fig. 2.

Ebensowenig fällt unter unsern Kreiselbegriff genau genommen die in der nebenstehenden Figur dargestellte Vorrichtung, welche man als *Bohnenbergersches Maschinchen* (oder auch als *Foucaultsches Gyroskop*) zu bezeichnen pflegt. Der Hauptteil des Apparates besteht aus einem Schwungrade, dessen Axe in einem inneren Ringe leicht beweglich gelagert ist.

Der innere Ring ist um eine Axe beweglich, welche zur Axe des Schwungrades senkrecht steht und ihre Lager in einem äufseren Ringe hat. Letzterer ist seinerseits wieder um eine zur Axe des inneren Ringes senkrechte Axe drehbar. Bei dieser Vorrichtung bleibt während der Bewegungen des Systems allerdings ein Punkt (der Mittelpunkt des Schwungrades) im Raume fest. Dafür stellt der Apparat aber keinen einheitlichen starren Körper dar, weil sich die Ringe relativ gegen das Schwungrad bewegen können; aufserdem ist auch die Rotationssymmetrie um die Axe des Schwungrades durch die Masse der Ringe gestört. Wollen wir den Apparat dennoch gelegentlich als Beispiel für unsere Kreiselbetrachtungen heranziehen, so müssen wir die ausdrückliche Annahme hinzufügen, dafs die Masse des Schwungrades gegenüber den Massen des äufseren und inneren Ringes sehr beträchtlich ist und müssen uns daraufhin gestatten, die letzteren gegen die erstere zu vernachlässigen. Alsdann haben wir es bei der mechanischen Behandlung des Apparates nurmehr mit dem Schwungrade zu thun, welches einen einheitlichen starren Rotationskörper darstellt. Sehen wir aber von dieser vereinfachenden Annahme ab, so wird die Theorie des Apparates erheblich komplizierter wie die unseres Kreisels.

Allerdings ist es selbstverständlich, dafs strenge genommen überhaupt kein realer Körper der eingangs aufgestellten Definition entspricht. Weder dürfte es möglich sein, einen materiellen Punkt durch mechanische Vorrichtungen im Raume vollkommen festzustellen, noch giebt es in der Natur irgendwo einen absolut starren Körper. Ebenso selbstverständlich aber ist es, dafs wir mit unserer Analyse den wirklichen Verhältnissen niemals vollständig gerecht werden können. In der Mathematik handelt es sich immer um idealisierte Probleme; wir müssen die wirklichen Verhältnisse durch Abstraktion von allerlei Nebenumständen stets erheblich vereinfachen, bevor wir an ihre mathematische Behandlung denken können.

Dabei entsteht die Frage, wie weit sich die wirklichen Erscheinungen mit unserem idealen mathematischen Schema decken mögen. Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, wird man den Einflufs der nicht in Rechnung gesetzten Umstände einzeln festzustellen suchen und wird die so gefundenen Abweichungen der Lösung des idealisierten Problemes als Korrektionsglieder hinzufügen. In diesem Sinne werden wir später die Reibung des Kreisels in der unterstützenden Pfanne untersuchen; auch werden wir, wenigstens qualitativ, die Elastizität der Unterlage berücksichtigen, welche den Kreisel trägt. Eine ganze Reihe anderer Umstände — die Elastizität des Kreiselmateriales selbst, die Mitführung der umgebenden Luft etc. etc. — werden als weniger ins Gewicht

fallend und gar zu kompliziert von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.

Warum wir aus der Fülle der mechanischen Probleme einen so speziellen Gegenstand wie die Kreiselbewegung herausgreifen, bedarf vielleicht der Erklärung.

*Zunächst bietet der Kreisel an sich ein besonderes Interesse dar.* Seine Bewegungen sind uns von der einen Seite sehr bekannt und haben doch etwas Paradoxes und den allgemeinen mechanischen Prinzipien scheinbar Widersprechendes an sich. Diesen Widerspruch aufzulösen, wird vom Standpunkte der Mechanik eine anziehende Aufgabe sein. Von dem Interesse, welches unser Gegenstand beanspruchen darf, zeugen auch die zahlreichen diesbez. älteren und neueren Monographieen. (Vgl. die beigefügte Litteraturübersicht.) Sodann spielt der Kreisel in den Nachbargebieten der Mechanik, in der Astronomie und in der theoretischen Physik, eine wichtige Rolle. Ein Spezialstudium unseres Problems scheint daher auch aus diesem Grunde angezeigt. Endlich besitzt die Kreiseltheorie auch vom Standpunkte der reinen Mathematik ein eigenartiges, zum Mindesten historisches Interesse. War es doch unser Problem, bez. das in ihm enthaltene Problem der Pendelschwingungen, welches von altersher fördernd auf die Theorie der elliptischen Funktionen eingewirkt hat.

*Weiterhin aber betrachten wir den Kreisel als ein Beispiel zur allgemeinen Mechanik* und hoffen gerade durch das Voranstellen des Speziellen die Auffassung des Allgemeinen zu beleben. Die Entwickelung der Mechanik hat, namentlich in Deutschland, eine zu ausschliefsliche Richtung auf das Abstrakte und Formale genommen, welche dem unmittelbaren Verständnis vielfach hinderlich entgegenwirkt. Der Studierende, welcher wohl die allgemeinen mechanischen Prinzipien analytisch herzuleiten lernt, fafst darum ihre eigentliche mechanische Bedeutung nicht immer lebendig genug auf und zeigt sich, vor ein spezielles Problem gestellt, zu dessen Lösung ungeschickt.

Diesem Übelstande wünschen wir durch die eingehende Behandlung unseres Problems entgegenzutreten. Wir möchten nicht nur eine Kenntnis der Mechanik, sondern sozusagen ein Gefühl dafür begründen. Natürlich ist hierzu volle Klarheit über die geometrischen Verhältnisse der Bewegung eine erste Vorbedingung. Wir gedenken daher durch zahlreiche Figuren die geometrische Anschauung zu beleben — im Gegensatze zu Lagrange, dem gröfsten Vertreter der abstrakten Richtung in der Mechanik, welcher mit besonderer Vorliebe betonte, dafs in seiner analytischen Mechanik nicht eine Figur zu finden sei. Noch wichtiger aber ist für uns volle Klarheit über die mechanischen

Ursachen der Bewegung, über die ins Spiel kommenden Kräfte. Wir werden uns diese möglichst konkret im Raume durch Vektoren versinnlichen; besonderen Wert legen wir auf die Ausbildung und konsequente Benutzung des Impulsbegriffes, worunter wir diejenige Stofskraft, bez. dasjenige System von Stofskräften verstehen, welches im stande ist, die jeweilige Bewegung momentan von der Ruhe aus zu erzeugen. Dabei gedenken wir die analytische Seite unseres Problems keineswegs zu verkürzen. Die Formel liefert schliefslich doch die einfachste und prägnanteste Beschreibung des Bewegungsvorganges; aufserdem ist sie als Grundlage der wirklichen numerischen Ausrechnung unentbehrlich. Wir werden nur verlangen, dafs unsere Kenntnis der Mechanik nicht auf die Formel basiert ist, sondern dafs umgekehrt die analytische Formulierung als letzte Konsequenz aus einem gründlichen Verständnis der mechanischen Verhältnisse von selbst zum Vorschein kommt.

Die hier ausgesprochene Tendenz nach einer über den Formeln stehenden mechanischen Auffassung kommt namentlich in den englischen Lehrbüchern zur Geltung. Wir nennen natürlich in erster Linie das geniale Werk von Thomson und Tait, den treatise on natural philosophy*), ferner das neuerdings auch in Deutschland meist bekannter ge wordene Werk von Routh**), welches als Lehrbuch noch geeigneter sein dürfte, weil es systematischer durchgearbeitet und nicht so schwer verständlich ist wie jenes. Neben den verbreiteten französischen Lehrbüchern***) kommen für uns namentlich in Betracht die Darstellungen von Voigt†) und Budde†), während uns die berühmte Kirchhoffsche Mechanik als einführendes Werk weniger geeignet erscheint.††) Am frühesten und nachdrücklichsten hat Poinsot die hier vertretene Forderung und zwar speziell bei unseren Rotationsproblemen erhoben. Die schönen Methoden von Poinsot werden wir in dieser Vorlesung besonders gerne kultivieren. Im übrigen möchten wir nicht so weit gehen, wie Poinsot, der aus seinen Betrachtungen die Koordinatenrechnung nach Möglichkeit verbannt und sich so den Zugang zu den schwierigeren Problemen selbst verschliefst. Wir möchten die Poinsotschen Betrachtungen nur als eine

---

*) Nur die erste Auflage dieses Werkes (erschienen Cambridge 1867) ist bis jetzt ins Deutsche übertragen (Braunschweig 1871); die zweite Auflage, welche 1883—86 in zwei Teilen erschien, ist sehr viel reichhaltiger; Zitate im Folgenden beziehen sich immer auf diese zweite Auflage.

**) Dynamics of a system of rigid bodies, 2 Bde., 5. Aufl. London 1891; deutsche Übersetzung von Schepp, Leipzig 1898.

***) Von Duhamel, Despeyrous-Darboux, Appell etc.

†) Voigt, Elementare Mechanik, Leipzig 1891. Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme, 2 Bde., Berlin 1890.

††) Inzwischen erschienene Werke: Webster, vgl. Zusätze in Heft IV, p. 937. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912.

erste und zwar sehr wertvolle Einführung in die Theorie der Rotationsprobleme ansehen, wollen sie aber überall da, wo sie allein nicht mehr zum Ziele führen oder doch zu kompliziert werden, durch die Analysis vervollständigen. So werden wir z. B. gleich das erste Kapitel mit geometrischen Untersuchungen nach dem Vorbilde Poinsots beginnen, dann aber bald zu analytischen Betrachtungen übergehen.

Natürlich können wir in dieser Vorlesung keine systematische Entwickelung der Mechanik geben; wir werden eine allgemeine Kenntnis des weiten Gebietes voraussetzen müssen. Ebenso werden wir eine gewisse Vertrautheit mit den Methoden der Funktionentheorie nicht entbehren können. Indessen sollen sowohl die mechanischen wie die funktionentheoretischen Begriffe bei ihrem Auftreten an dem Beispiel unseres Kreisels kurz erläutert werden, so dafs die Vorlesung auch zu einer ersten orientierenden Einführung in das Gebiet der elliptischen Funktionen und in die höheren Partieen der Mechanik allgemeiner Systeme dienen kann.

Schliefslich noch ein Wort über die Handhabung der Infinitesimalrechnung. Wir gedenken in dieser Darstellung keineswegs mit derjenigen Strenge vorzugehen, welche heutzutage in der Infinitesimalrechnung möglich und vielfach üblich ist. Vielmehr werden wir uns alle diejenigen Erleichterungen zu nutze machen, welche die Ausdrucksweise der unendlich kleinen Gröfsen und die Vertauschung der Grenzübergänge mit sich bringt. Offenbar hat die moderne Verschärfung der Infinitesimalrechnung nicht den Sinn, dafs man auf Schritt und Tritt durch diesbezügliche Bedenken behindert werden soll, sondern dafs man diese ein für allemal in den Grundlagen der Infinitesimalrechnung erledigt, um hernach um so unbedenklicher verfahren zu können. Wer die genaueren Methoden der Differentialrechnung kennt, wird im folgenden etwa wünschenswerte Präzisierungen der Ausdrucksweise stets leicht hinzufügen können. Wir unterlassen dieses nicht deshalb, weil darin irgend eine Schwierigkeit liegt, sondern weil wir hierdurch die Darstellung unnötig schleppend machen und die Aufmerksamkeit von den eigentlichen Schwierigkeiten des Problems ablenken würden.

---

# Kapitel I.

## Die Kinematik des Kreisels.

### § 1. Geometrische Behandlung der Kinematik.

Wir beginnen mit einem Kapitel geometrischen Inhalts, welches von der *Kinematik* des Kreisels handeln soll. Als Gegensatz zu Kinematik gebrauchen wir nach dem Vorschlage von Thomson und Tait das Wort *Kinetik*. Während die Kinematik lediglich mit den Begriffen Raum und Zeit operiert und die Bewegungen nur nach ihrer geometrischen Möglichkeit untersucht, nimmt die Kinetik die Begriffe von Masse und Kraft hinzu und behandelt die Bewegungen mit Rücksicht auf ihre mechanische Möglichkeit.*)

Da in der Kinematik die Massenverteilung des Körpers gänzlich irrelevant ist, so kommen von den in der Einleitung postulierten Eigenschaften des Kreisels hier nur die Starrheit des Materials und die feste Lage des Unterstützungspunktes in Betracht. Die folgenden Untersuchungen gelten also für einen *beliebigen starren Körper mit festem Unterstützungspunkte. Wir wollen einen solchen Körper einen „allgemeinen Kreisel“ nennen, im Gegensatz zu dem in der Einleitung definierten „symmetrischen Kreisel“*. Auch in den nächstfolgenden Kapiteln beziehen wir uns teilweise auf diesen „allgemeinen Kreisel“, während wir uns in den letzten Kapiteln durchaus auf den „symmetrischen Kreisel“ beschränken müssen.

Die Probleme der Kinematik werden unter allgemeinstem Gesichtspunkte nach der *Anzahl der Freiheitsgrade* eingeteilt. Die Bedeutung dieses gleichfalls von Thomson und Tait eingeführten Ausdruckes wird durch die folgende kleine Tabelle erläutert:

*Ein im Raume frei beweglicher Punkt* besitzt *drei Grade der Freiheit*, (seine Lage wird durch drei unabhängige Coordinaten bestimmt).

*Ein starrer frei beweglicher Körper* hat *sechs Freiheitsgrade*, (die Lage und Orientierung des Körpers wird durch Angabe von sechs geeigneten, unabhängigen Parametern festgelegt).

*Ein starrer Körper, von welchem ein Punkt festgehalten wird*, besitzt wieder *drei Grade der Freiheit*.

---

*) Eine andere Abgrenzung der Kinematik setzt H. Hertz fest: Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894. Ebenso K. Henn, Kinematik, Leipzig 1906.

Dementsprechend kommen unserem *Kreisel mit festem Punkte*, sofern wir ihn als starren Körper behandeln dürfen, *drei Grade der Freiheit* zu. Der *bewegliche Kreisel*, dessen Unterstützungspunkt in einer horizontalen Ebene spielt, hat *fünf Freiheitsgrade*. Wir können auch Kreisel mit *einem* oder *zwei* Freiheitsgraden herstellen, indem wir die Figurenaxe in einem festen Gestelle oder in einem Ringe lagern, welcher seinerseits um eine feste Axe drehbar ist. Dagegen würde unser Kreisel *unendlich viele Grade der Freiheit* besitzen, sobald wir die *elastischen Deformationen des Materials* berücksichtigen wollten.

Bei den folgenden Betrachtungen werden wir fürs erste die Vorstellung eines im Raume frei beweglichen starren Körpers zu Grunde legen, von welchem der Kreisel mit festem Unterstützungspunkte ein Spezialfall ist. Da es sich um sehr einfache und bekannte Dinge handelt, wird es genügen, an die fraglichen Sätze kurz zu erinnern, ohne sie ausführlich abzuleiten. Die Beweise möge man nötigenfalls in den vorgenannten Lehrbüchern nachlesen.

Wir betrachten einen in Bewegung begriffenen starren Körper in zwei verschiedenen Lagen und stellen uns die Aufgabe, diejenige Bewegung anzugeben, welche in einfachster Weise von der Anfangslage zu der Endlage überführt. Die Lage des Körpers ist vollkommen bestimmt, wenn die Lage von irgend dreien seiner Punkte, sagen wir $O, P, Q$, bekannt ist. Die Anfangslage der Punkte möge mit $O_1 P_1 Q_1$, die Endlage mit $O_2 P_2 Q_2$ bezeichnet werden. Zunächst können wir durch eine Parallelverschiebung des Körpers den Punkt $O_1$ nach $O_2$ transportieren; dabei mögen die Punkte $P_1$, $Q_1$ bez. übergehen in $P_1'$, $Q_1'$. Sodann verbinden wir $P_1'$ mit $P_2$, $Q_1'$ mit $Q_2$ und konstruieren in der Mitte der Verbindungslinien die Normalebenen zu letzteren. Diese schneiden sich in einer durch $O_2$ hindurchgehenden Axe. Drehen wir nun den Körper um diese Axe durch einen geeigneten Winkel, so wird $P_1'$ nach $P_2$ und $Q_1'$ nach $Q_2$ geschafft. Wir können also durch Kombination einer Parallelverschiebung und einer Drehung das Dreieck $OPQ$ und also auch den starren Körper aus seiner Anfangslage in seine Endlage überführen. Daher der Satz:

*Die allgemeinste Ortsveränderung eines frei beweglichen starren Körpers kann immer durch die Kombination einer Rotation und einer Translation ersetzt werden.*

Berücksichtigen wir ferner, daſs eine Parallelverschiebung gleichbedeutend ist mit einer Drehung um eine unendlich ferne Axe oder mit einem sogenannten Drehungspaar, d. h. mit zwei Drehungen um parallele Axen von gleichem Drehungswinkel aber entgegengesetztem Sinne, so können wir dem vorhergehenden Satze auch die folgende

Fassung geben, welche im Hinblick auf den entsprechenden Satz der Statik starrer Systeme von Interesse ist:

*Die allgemeinste Ortsveränderung eines starren Körpers kann ersetzt werden durch eine Einzeldrehung und ein Drehungspaar.*

Offenbar läſst sich unsere Konstruktion noch in sehr mannigfacher Weise dadurch abändern, daſs der gerade herausgegriffene Punkt $O$ durch irgend einen anderen Punkt ersetzt wird. Wir mögen den jedesmal benutzten Punkt $O$ etwa den „Bezugspunkt“ nennen und können uns fragen, ob wir durch geeignete Wahl des Bezugspunktes das Resultat unserer Konstruktion vereinfachen können. In dieser Hinsicht ergiebt sich, daſs man immer den Bezugspunkt so wählen kann, daſs die Richtung der Translation zu der Axe der Rotation parallel wird. Bekanntlich nennt man die Kombination einer Drehung mit einer nach der Axe der Drehung erfolgenden Parallelverschiebung eine *Schraube* (genauer eine „Bewegungsschraube“)*). Die Gröſse der Parallelverschiebung zusammen mit der Gröſse der Drehung bestimmt die Ganghöhe; Gröſse, Axe und Sinn der Drehung geben den Drehungswinkel, die Drehungsaxe und den Drehungssinn der Schraube. Wir können daraufhin sagen:

*Die allgemeinste Ortsveränderung eines starren Körpers kann bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes ersetzt werden durch eine Schraubung von bestimmter Axe, bestimmtem Drehungswinkel und Drehungssinn und bestimmter Ganghöhe.*

Unsere Schraubenbewegung stimmt mit der wirklich stattfindenden Bewegung des Körpers natürlich nur in der Anfangs- und Endlage überein; die bei der wirklichen Bewegung eingenommenen Zwischenlagen können dabei von den während der hinzugedachten Schraubenbewegung stattfindenden Zwischenlagen durchaus verschieden sein. Betrachten wir aber eine unendlich kleine Bewegung des starren Körpers d. h. den Grenzfall einer endlichen Bewegung während eines unendlich abnehmenden Zeitintervalles und die zugehörige unendlich kleine Schraube, d. h. den Grenzfall der zugehörigen endlichen Schraubenbewegung. Hier können wir von Zwischenlagen nicht mehr sprechen; infolgedessen werden wir eine unendlich kleine Bewegung mit der hinzukonstruierten Schraubenbewegung direkt als identisch ansehen und können kurz sagen:

*Jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers ist eine Schraubenbewegung.*

---

*) Vergl. Sir Robert Ball. The theory of screws. Dublin 1876. (Deutsch bearbeitet von Gravelius, Berlin 1889).

Übrigens werden wir eine unendlich kleine Schraube nicht durch ihren (unendlich kleinen) Drehungswinkel, sondern lieber durch ihre (als endlich vorauszusetzende) Drehungsgeschwindigkeit charakterisieren.

Wir gehen nun auf die speziellen Verhältnisse bei unserem Kreisel d. h. natürlich bei dem allgemeinen Kreisel ein. Hier werden wir den Bezugspunkt $O$ in den festen Unterstützungspunkt legen. Alsdann wird die Ganghöhe der Schraube gleich Null; die Schraubenbewegung artet in eine einfache Drehung um eine durch $O$ gehende Axe aus. Wir haben daher die Sätze:

*Eine beliebige Bewegung unseres Kreisels kann in ihrem Resultate ersetzt werden durch eine Drehung von bestimmter Axe, bestimmtem Drehungswinkel und Drehungssinn;*

und

*Jede momentane (unendlich kleine) Bewegung des Kreisels ist eine Drehung von bestimmter Axe und Drehungsgeschwindigkeit und bestimmtem Drehungssinn.*

Zunächst mögen einige Bemerkungen über die Zusammensetzung von Drehungen folgen, wobei wir mit Rücksicht auf den Kreisel nur solche Drehungen zu betrachten brauchen, deren Axen durch $O$ hindurchgehen. Wir wollen uns vorstellen, daſs dem Kreisel nach einander zwei verschiedene endliche Drehungen erteilt werden. Das Resultat derselben können wir nach dem vorhergehenden Satz auch durch eine Einzeldrehung bewirken. Näheres erfahren wir über letztere aus dem Satze*): Drehen wir den Raum successive um die drei Kanten einer dreiseitigen Ecke je durch die doppelten Kantenwinkel, so kommen wir zur Anfangslage zurück. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der resultierenden Drehung: Wir schlagen um $O$ die Einheitskugel, verbinden ihre Schnittpunkte mit den Axen der Teildrehungen durch einen gröſsten Kreis und tragen an diesen die *halben* Winkel der bez. Teildrehungen an. *Dann giebt die dritte Ecke des so entstehenden sphärischen Dreiecks die Axe, der anliegende Auſsenwinkel den halben Winkel der resultierenden Drehung.* Bemerkenswerter Weise operiert diese Konstruktion mit den halben Drehungswinkeln, so daſs aus ihr ein bis auf Multipla von $2\pi$ bestimmter Wert des halben, d. h. ein modulo $4\pi$ bestimmter Wert des ganzen Drehungswinkels folgt.

Wir sprechen sodann von unendlich kleinen Drehungen oder Drehgeschwindigkeiten. Wie üblich ordnen wir der unendlich kleinen

---

*) Vgl. Schell: *Theorie der Bewegung,* Leipzig 1879 II. Teil, Kap. II, § 9. Der Satz spielt in Hamiltons *Lectures on quaternions* eine groſse Rolle (art. 217 u. ff.).

Drehung ein geometrisches Bild durch folgende Maſsnahme zu: Wir tragen von $O$ aus auf der Axe der Drehung eine Strecke ab, welche uns die Gröſse der Drehgeschwindigkeit repräsentiert und zwar durchgehends nach derjenigen Seite hin, von der aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers zu erfolgen scheint. Das so entstehende geometrische Gegenbild der unendlich kleinen Drehung nennen wir einen *Drehungsvektor*. Ist der letztere bekannt, so folgt daraus Axe, Geschwindigkeit und Sinn der unendlich kleinen Drehung in unzweideutiger Weise.

Wir haben dabei nur noch eine Festsetzung über den Maſsstab hinzuzufügen, in dem wir die repräsentierende Strecke abtragen und über das Maſssystem, in dem wir die Winkelgeschwindigkeit messen wollen. Am einfachsten ist es, hier und im folgenden durchgehends das sog. „*absolute Maſssystem*" zu Grunde zu legen, also eine Länge in Centimetern, eine Zeit in Sekunden zu messen. Eine Winkelgeschwindigkeit werde immer in Bogenmaſs ausgedrückt, also etwa durch den in cm gemessenen Bogen eines Kreises, welchen ein um 1 cm von der Drehungsaxe entfernter Punkt während einer sec bei gleichförmiger Drehung beschreiben würde. Im absoluten Maſssystem kommt in diesem Sinne jeder Drehungsgeschwindigkeit ein bestimmter numerischer Wert, sagen wir $n$, zu. Unsere repräsentierende Strecke bestimmen wir daraufhin so, daſs wir gerade $n$ cm auf der Drehungsaxe in der oben angegebenen Weise abtragen.

Der fragliche Satz über die Zusammensetzung zweier unendlich kleiner Drehungen lautet nun einfach so:

*Zwei unendlich kleine Drehungen setzen sich nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen, d. h. so, daſs sich die zugehörigen Drehungsvektoren geometrisch (wie Strecken oder Vektoren) addieren.*

Dieser fundamentale und sehr bekannte Satz rechtfertigt nachträglich die Einführung des Wortes Drehungs*vektor* und zeigt überdies, daſs das Resultat zweier unendlich kleiner Drehungen von ihrer Reihenfolge *unabhängig* ist, daſs also *unendlich kleine Drehungen vertauschbare Operationen bedeuten.* Zum Beweise dessen genügt es, die Figur des Parallelogrammes zu betrachten. Bemerken wir dagegen, daſs das Resultat zweier endlicher Drehungen sich ändert, wenn wir die Reihenfolge der Teildrehungen umkehren, daſs also *endliche Drehungen nicht vertauschbar sind.* Der Beweis folgt daraus, daſs bei der auf pag. 10 angedeuteten Konstruktion die Bestimmungsstücke der Teildrehungen in unsymmetrischer Weise benutzt werden.

Hierauf betrachten wir den in Bewegung begriffenen Kreisel in einer ganzen Reihe verschiedener Lagen, fassen also eine erste, zweite, dritte, ... Lage desselben ins Auge. Die Bewegung, welche von der

ersten zur zweiten, von der zweiten zur dritten Lage etc. überführt, ersetzen wir je durch eine einzelne Drehung und erhalten so eine Reihe verschiedener durch $O$ gehender Drehungsaxen. Dabei unterscheiden wir, wie überhaupt in der Kinematik, zwischen einem *beweglichen* und einem *festen Systeme.* Das bewegliche System ist unser Kreisel, das feste der ideale Raum.

Wir bemerken noch, dafs die Auszeichnung des einen Systems vor dem anderen, welche in den Worten „beweglich" und „fest" liegt, vom Standpunkte der reinen Kinematik eigentlich ungerechtfertigt ist und dafs es richtiger wäre, etwa von einem *ersten* und *zweiten* System zu sprechen. Geometrisch ist nämlich jede Bewegung mit ihrer umgekehrten, bei welcher die Rolle des beweglichen und des festen Systemes vertauscht ist, gleichberechtigt. In der *Kinematik* handelt es sich also immer nur um *Relativbewegungen.* Anders in der *Kinetik.* Die zur Erzeugung einer Bewegung erforderlichen Kräfte ändern sich durchaus, wenn wir das bewegliche System mit dem festen vertauschen. In der Kinetik haben also die *direkte* und die *umgekehrte Bewegung* einen im allgemeinen durchaus verschiedenen Charakter. Eine Ausnahme von dieser Regel werden wir später besonders betonen, wo wir den Satz kennen lernen werden, dafs die Umkehr der Kreiselbewegung unter speziellen Umständen wieder eine Kreiselbewegung wird von demselben kinetischen Charakter, wie die direkte Bewegung.

Die Axen der oben genannten Drehungen, welche den Kreisel aus der ersten in die zweite, aus der zweiten in die dritte Lage etc. bringen, wollen wir uns sowohl im festen wie im beweglichen System markieren. Wir bekommen so, wenn wir die successiven Kanten noch durch Ebenen verbinden, ein im Kreisel und ein im Raume festes *Vielkant* mit resp. gleichen Seitenwinkeln. Bei der ersten Drehung fallen die bez. ersten Kanten der beiden Vielkante zusammen. Um diese dreht sich das bewegliche System und zwar soweit, bis die zweiten Kanten zur Deckung gekommen sind. Bei der zweiten Drehung dreht sich das bewegliche System um die zweite Kante. Die Gröfse der Drehung bestimmt sich dadurch, dafs am Ende derselben die bez. dritten Kanten zusammenfallen müssen. So geht es fort. Den ganzen Drehungsvorgang können wir kurz folgendermafsen schildern:

*Es rollt das bewegliche Vielkant auf dem festen ab.*

Natürlich braucht diese Bewegung mit der von dem Kreisel wirklich ausgeführten nur in den jedesmaligen Endlagen der Teildrehungen übereinzustimmen. Die Zwischenlagen können in beiden Fällen noch sehr verschieden sein. Um nun aber auf diesem Wege eine vollständige Wiedergabe der wirklichen Bewegung zu erreichen, werden wir den

Grenzübergang von den endlichen zu unendlich kleinen Drehungen machen. Wir fassen die Bewegung des Kreisels in jedem Momente als eine unendlich kleine Drehung auf und denken uns die zugehörige „instantane Drehaxe" sowohl im festen wie im beweglichen System konstruiert. Unsere Vielkante verwandeln sich bei dem Grenzübergange in Kegel. Wir erhalten *einen im Raume festen* und *einen im Kreisel festen Kegel*, welche ihre gemeinsame Spitze in dem Unterstützungspunkte haben. Den im Kreisel festen Kegel bezeichnen wir als den *Kegel der Polhodie* (zu deutsch: Weg der Drehpole bez. der Drehaxen), den im Raume festen Kegel nennen wir den *Kegel der Herpolhodie* (zu deutsch: Weg, auf welchem der Drehpol entlang kriecht; da das Wort von dem griechischen ἕρπειν, kriechen, abgeleitet ist, sollte man eigentlich sagen: Herpopolhodie). Während der Bewegung rollen nun diese beiden Kegel ohne zu gleiten auf einander ab, und wir haben den Satz:

*Eine beliebige kontinuierliche Bewegung des Kreisels kann in allen ihren Lagen dadurch wiedergegeben werden, daſs wir einen beweglichen auf einem festen Kegel abrollen lassen. Der bewegliche Kegel ist der Ort der instantanen Drehaxen im Kreisel; der feste Kegel ist der Ort der Drehaxen im Raum.*

Wir haben damit das schöne und anschauliche Bild reproduziert, unter welchem man sich nach Poinsot*) die Bewegung des Kreisels kinematisch vorzustellen hat. Dieses Bild wird allemal dann sehr nützlich sein, wenn die abrollenden Kegel eine übersichtliche Gestalt haben, so namentlich im Falle der regulären Präzession (vgl. den letzten Paragraphen dieses Kapitels). In komplizierteren Fällen dagegen, wo die Gestalt der Kegel nicht direkt bekannt und, wenn sie es wäre, der Anschauung schwer zugänglich ist, scheint die Nützlichkeit der Poinsotschen Vorstellung einigermaſsen problematisch.

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für den frei beweglichen starren Körper durchführen. Der Unterschied ist nur der, daſs die successiven instantanen Drehaxen nicht durch einen festen Punkt hindurchgehen, sondern im allgemeinen windschief im Raume verteilt sind. *Infolge dessen treten hier statt der Kegel zwei allgemeinere geradlinige Flächen (Regelflächen) auf.* Auch besteht die instantane Bewegung nicht in einer reinen Drehung sondern in einer unendlich kleinen Schraubung. *Die beiden Regelflächen rollen also nicht nur auf einander ab, sondern gleiten gleichzeitig in gewisser Weise längs ihrer Erzeugenden an einander hin, sie schroten auf einander, wie die Ingenieure sagen.*

---

*) Vgl. Poinsot: Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834, auch Liouv. Journ. sér. 1. t. 18, deutsche Übersetzung von Schellbach, Berlin 1851.

Wir mögen noch von den Kegeln der Polhodie und Herpolhodie zu gewissen auf ihnen verlaufenden Kurven übergehen. Wir denken uns zu dem Zweck auf der instantanen Drehaxe den „instantanen Drehungsvektor“ nach der oben angegebenen Regel abgetragen. Der Endpunkt des letzteren beschreibt dann im festen wie im beweglichen System je eine Kurve, welche wir bez. *Herpolhodie-* und *Polhodiekurve* nennen. *Gleichzeitig mit den Kegeln rollen bei der Bewegung des Kreisels auch diese Kurven auf einander ab.* Da sie mehr über die jeweilige Drehung aussagen als die entsprechenden Kegel, nämlich außer der Axe auch Größe und Sinn der Drehung zur Erscheinung bringen, so wird es häufig vorteilhaft sein, diese Kurven an Stelle jener Kegel zu verwenden.

Bei der Konstruktion des Drehungsvektors haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß der Beobachter, welcher über den Sinn der Drehung und über die Richtung, in welcher der Drehungsvektor abgetragen wird, zu entscheiden hat, eine im Raume feste Stellung einnimmt und die Bewegung des Kreisels relativ gegen den festen Raum beobachtet. Wir können den Drehungsvektor aber auch für die umgekehrte Bewegung konstruieren. Dann werden wir einen Beobachter voraussetzen müssen, welcher eine im Kreisel feste Stellung hat und die Drehung des Raumes relativ gegen den für ihn ruhenden Kreisel beobachtet. Diese Drehung findet in jedem Augenblicke im umgekehrten Sinne statt wie die vorherige. Der Drehungsvektor der umgekehrten Bewegung ist daher nach der entgegengesetzten Seite abzutragen, wie der der direkten. Der Endpunkt dieses Vektors beschreibt im festen und beweglichen System je eine Kurve, welche wir *Polhodie- und Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung* nennen können. *Diese liegen zu der Herpolhodie- und Polhodiekurve der direkten Bewegung bez. diametral in Bezug auf den Unterstützungspunkt.*

Zum Schluß möge eine Bemerkung Platz finden, welche sich auf die experimentelle Verifikation der vorgetragenen Theorie bezieht. Man wird den Wunsch haben, die Existenz und Lage der instantanen Drehungsaxe an dem in Bewegung begriffenen Kreisel direkt mit dem Auge wahrzunehmen. Dies hat, zumal bei schneller Rotation, seine Schwierigkeit. Es gelingt aber mit Hülfe einer sinnreichen, von Maxwell angegebenen Methode*). Maxwell befestigt zu dem Zwecke an der Figurenaxe des Kreisels eine Pappscheibe, welche in vier verschieden gefärbte Sektoren geteilt ist. Bei der Bewegung sieht man

*) Maxwell, Transact. R. Scott. Soc. of Arts 1855 oder Scientific papers I, pag. 246.

in der Nähe der Drehaxe die daselbst aufgetragene Farbe; in einiger Entfernung aber laufen die Farben durch einander. *Daher erscheint die instantane Drehaxe als Mittelpunkt eines farbigen Flecks, welcher von einem unbestimmten Grau umgeben ist. Die successiven Örter des farbigen Flecks veranschaulichen für einen aufserhalb des Kreisels stehenden Beobachter direkt die Gestalt des Herpolhodiekegels. Der Wechsel der Farben aber giebt einen ungefähren Anhalt dafür, wie sich die instantane Drehaxe im Kreisel bewegt.*

## § 2. Analytische Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt.

Wir haben nun die geometrischen Betrachtungen des vorigen Paragraphen durch analytische Entwickelungen zu ergänzen. Wir benutzen dabei rechtwinklige Koordinaten und zwar gleichzeitig *ein im Raume festes System $xyz$ und ein im Raume bewegliches aber im Kreisel festes System $XYZ$.*

Beide Koordinatensysteme sollen ihren Anfangspunkt in dem bei der Kreiselbewegung festbleibenden Punkte $O$ haben. Die Mafseinheit soll für beide Systeme und für alle Axen dieselbe sein. Die $z$-Axe werden wir meist in vertikaler Richtung gezogen denken und positiv nach oben rechnen. Von der positiven $z$-Axe aus gesehen möge die positive $x$-Axe in die positive $y$-Axe durch eine dem Sinn des Uhrzeigers gleichgerichtete Drehung übergeführt werden. Dieselbe Bestimmung soll bezüglich der gegenseitigen Lage der positiven Axen $X$, $Y$, $Z$ gelten. Unsere Koordinatensysteme sind nach dieser Verabredung als *gleichstimmig* zu bezeichnen. Bei dem symmetrischen Kreisel werden wir durchgehends die positive $Z$-Axe mit der Figurenaxe zusammenfallen lassen.

Um die Lage des Kreisels im Raume zu bestimmen, genügt es, die Lage des $XYZ$- gegen das $xyz$-System anzugeben. Letzteres kann dadurch geschehen, dafs wir die *Transformationsformeln* für den Übergang von dem einen zu dem anderen Koordinatensystem bilden, d. h. solche Formeln, welche gestatten, die Koordinaten eines beliebigen Punktes in Bezug auf das eine System zu berechnen, wenn seine Koordinaten in dem anderen Systeme gegeben sind.

Wir wollen uns vorstellen, dafs in einer „Anfangslage" das bewegliche System mit dem festen zusammenfällt; jede andere Lage denken wir uns durch eine Drehung aus der Anfangslage erzeugt. Wir können dann die eben genannten Transformationsformeln — wie überhaupt die Transformationsgleichungen der analytischen Geometrie — in doppelter Weise auffassen.

1. *Wir betrachten einen im Raume festen Punkt und fragen nach*

*seinen Koordinaten in Bezug auf das bewegliche System.* Der Punkt möge durch seine Koordinaten $xyz$ in Bezug auf das feste Koordinatensystem gegeben sein. Dies sind gleichzeitig die Koordinaten des Punktes in Bezug auf die Anfangslage des beweglichen Systems. *Unsere Formeln bestimmen uns bei dieser Auffassung die Koordinaten* $XYZ$ *desselben Raumpunktes in Bezug auf die Endlage des beweglichen Systems.*

2. *Wir betrachten einen im Kreisel festen, im Raume beweglichen Punkt und fragen nach seinen Koordinaten in Bezug auf das im Raume feste System.* Die Lage des Punktes im Kreisel sei durch die Koordinaten $XYZ$ in Bezug auf das im Kreisel feste System gegeben. Es sind dieses gleichzeitig die Koordinaten, welche der Anfangslage des Punktes in Bezug auf das im Raume feste Koordinatensystem entsprechen. *Unsere Formeln liefern uns bei dieser Auffassung die Koordinaten* $xyz$ *desselben Kreiselpunktes in seiner Endlage, bezogen auf das im Raume feste Koordinatensystem.*

Wir werden im folgenden beide Auffassungen, die sich wohlverstanden auf ein und dasselbe Formelsystem beziehen, wechselweise zu benutzen haben. In beiden Fällen, können wir sagen, führt das Studium der Transformationsformeln zur *analytischen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt*, wobei es sich in der ersten Auffassung um die Drehungen eines Koordinatensystems gegen den festen Raum, in der zweiten Auffassung um die Drehungen des Raumes gegen ein festes Koordinatensystem handelt.

Was nun die Formeln für den Übergang vom Koordinatensystem $x, y, z$ zum Koordinatensystem $X, Y, Z$ angeht, so stellen dieselben bekanntlich eine sogenannte *orthogonale* Substitution vor. Man hat einerseits

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z,\\ y &= bX + b'Y + b''Z,\\ z &= cX + c'Y + c''Z \end{aligned}$$

andererseits

$$(2)\qquad \begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z,\\ Y &= a'x + b'y + c'z,\\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

wo die auftretenden Koeffizienten die Cosinus derjenigen Winkel bedeuten, welche die positiven Halbaxen des einen Systems mit denen des anderen bilden. Speziell ist:

$$\begin{aligned} a &= \cos(xX), & a' &= \cos(xY), & a'' &= \cos(xZ),\\ b &= \cos(yX), & b' &= \cos(yY), & b'' &= \cos(yZ),\\ c &= \cos(zX), & c' &= \cos(zY), & c'' &= \cos(zZ). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) gehen aus den Gleichungen (1) durch „Transposition der Koeffizienten“ hervor. Wir fassen beide Gleichungen in das Schema zusammen:

(3)

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $a$ | $a'$ | $a''$ |
| $y$ | $b$ | $b'$ | $b''$ |
| $z$ | $c$ | $c'$ | $c''$ |

welches von links nach rechts gelesen die Gleichungen (1), von oben nach unten gelesen die Gleichungen (2) wiedergiebt.

Die neun Gröfsen $a, \ldots c''$ sind nicht von einander unabhängig; es bestehen zwischen ihnen eine ganze Reihe von Relationen. In der That, wenn wir früher sagten, unser Kreisel besitze drei Grade der Freiheit, so bedeutet dies nichts anderes, als dafs seine sämtlichen Lagen durch drei von einander unabhängige Parameter dargestellt werden können. Wir haben also in den obigen Transformationsgleichungen zur Darstellung der Drehungen *überzählige Parameter* benutzt. Man findet die betr. Relationen in den Büchern; wir halten uns nicht bei denselben auf. Dagegen werden wir uns die Aufgabe stellen, eine *independente Darstellung der Drehungen durch drei unabhängige Parameter* anzugeben.

Zu diesem Zwecke benutzt man von alters her in erster Linie die sog. *Eulerschen unsymmetrischen Winkel* $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$.

Um die Bedeutung dieser Winkel unzweideutig definieren zu können, erklären wir zuerst, was wir (beim symmetrischen Kreisel) unter der „*Knotenlinie*“ verstehen wollen. Als Knotenlinie bezeichnen wir denjenigen *Halbstrahl*, welcher gleichzeitig auf der Vertikalen und der Figurenaxe senkrecht steht und von dem aus gesehen die erstere in die letztere durch eine im Sinne des Uhrzeigers erfolgende Drehung auf kürzestem Wege übergeführt wird. Diese Erklärung der Knotenlinie wird nur dann unbestimmt, wenn die Figurenaxe eine vertikale Lage annimmt, d. h. wenn die Axen der $z$ und $Z$ den Winkel 0 oder $\pi$ einschliefsen. (Bei allgemeiner Lage der Koordinatensysteme bez. bei allgemeiner Massenverteilung haben wir in der vorstehenden Definition statt Vertikale und Figurenaxe nur $z$- und $Z$-Axe zu sagen).

Darauf betrachten wir aufser unserem $xyz$- und $XYZ$-System noch ein drittes Hülfskoordinatenkreuz, welches wir in drei Schritten aus der Lage $xyz$ in die Lage $XYZ$ überdrehen wollen. Und zwar drehen wir

I. unser Hülfskoordinatenkreuz aus seiner Anfangslage $xyz$ um die positive $z$-Axe im Sinne des Uhrzeigers, bis seine positive $x$-Axe

mit der Knotenlinie zusammenfällt. Die neue Lage des Hülfssystems werde mit $x_1 y_1 z_1$ bezeichnet; *der Winkel, um den wir drehen mußten, definiere uns den Parameter* $\psi$.

II. Wir drehen sodann das Hülfssystem aus seiner Lage $x_1 y_1 z_1$ um die positive $x_1$-Axe (d. h. um die Knotenlinie), gleichfalls im Sinne des Uhrzeigers, bis seine positive $z$-Axe mit der positiven $Z$-Axe zusammenfällt. Dadurch gehe unser Hülfssystem in die Lage $x_2 y_2 z_2$ über. *Der Winkel, um welchen wir bei dieser Operation drehen mußten, heiße* $\vartheta$.

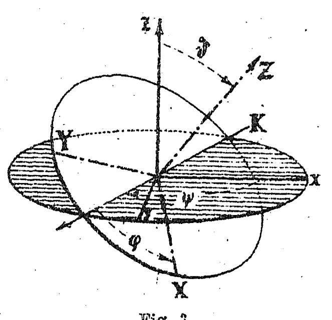


Fig. 3.

III. Wir drehen schließlich das Hülfssystem um die positive $z_2$-Axe (oder, was dasselbe besagt, um die positive $Z$-Axe) abermals im Sinne des Uhrzeigers, bis die positiven Axen $x_2$ und $y_2$ mit den positiven Axen $X$ und $Y$ zusammenfallen. *Der zugehörige Drehungswinkel giebt uns den dritten Parameter* $\varphi$. Das Hülfssystem ist jetzt in seine Endlage $XYZ$ übergeführt worden.

Kürzer aber weniger genau werden wir sagen können (vgl. die Figur): Es bedeutet

$\varphi$ den Winkel der Knotenlinie gegen die pos. $X$-Axe,
$\psi$ " " " " " " " $x$-Axe,
$\vartheta$ " " " pos. $Z$- " " " $z$-Axe.

Aus diesen Winkeln $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ werden wir die Koeffizienten unserer Drehungstransformation zusammensetzen. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst die Ausdrücke für die Operationen I, II und III einzeln her.

Die Operation I läßt die $z$-Axe ungeändert und verdreht die $xy$-Ebene in sich. Wir haben also zunächst die Gleichung $z_1 = z$. Andrerseits hängen die $x_1 y_1$ mit den $xy$ durch die Transformationsgleichungen einer Drehung in der Ebene zusammen. Dabei müssen wir, um in Übereinstimmung mit den für den Raum getroffenen Festsetzungen zu bleiben, die positive $y$-Axe in solcher Weise bestimmen, daß sie aus der positiven $x$-Axe durch eine im Sinne des Uhrzeigers erfolgende Drehung um $O$ hervorgeht, also gerade umgekehrt, wie es in der analytischen Geometrie der Ebene meistens geschieht. Auf Grund der nebenstehenden Figur lautet nun das Schema für unsere ebene Drehung folgendermaßen:

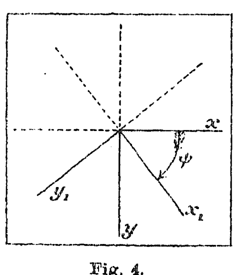


Fig. 4.

(4)

| | $x_1$ | $y_1$ |
|---|---|---|
| $x$ | $\cos\psi$ | $-\sin\psi$ |
| $y$ | $\sin\psi$ | $\cos\psi$ |

Die Transformationsgleichungen für die Operation I werden daher:

$$x = \cos\psi \cdot x_1 - \sin\psi \cdot y_1,$$
$$y = \sin\psi \cdot x_1 + \cos\psi \cdot y_1,$$
$$z = z_1.$$

Wir schreiben dieselben nach Analogie von (3) wieder in die Gestalt eines dreiseitigen Schemas und fügen die entsprechend gebildeten Schemata für die Operationen II und III hinzu. So ergiebt sich:

I.

| | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\cos\psi$ | $-\sin\psi$ | 0 |
| $y$ | $\sin\psi$ | $\cos\psi$ | 0 |
| $z$ | 0 | 0 | 1 |

II.

| | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 |
| $y_1$ | 0 | $\cos\vartheta$ | $-\sin\vartheta$ |
| $z_1$ | 0 | $\sin\vartheta$ | $\cos\vartheta$ |

III.

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $\cos\varphi$ | $-\sin\varphi$ | 0 |
| $y_2$ | $\sin\varphi$ | $\cos\varphi$ | 0 |
| $z_2$ | 0 | 0 | 1 |

Kombinieren wir diese Einzelsubstitutionen, so erhalten wir die gesuchten Transformationsgleichungen zwischen den Koordinaten $xyz$ und $XYZ$, ausgedrückt durch die Eulerschen Winkel in der Form:

(5)

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi$ | $-\sin\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi$ | $\sin\vartheta\sin\psi$ |
| $y$ | $\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi$ | $-\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi$ | $-\sin\vartheta\cos\psi$ |
| $z$ | $\sin\vartheta\sin\varphi$ | $\sin\vartheta\cos\varphi$ | $\cos\vartheta$ |

Insbesondere merken wir an, daſs die Richtungscosinus der Vertikalen im beweglichen und die der Figurenaxe im festen System bez. die folgenden Werte haben:

$$(6)\qquad \begin{cases} c = \sin\vartheta\sin\varphi, & c' = \sin\vartheta\cos\varphi, & c'' = \cos\vartheta, \\ a'' = \sin\vartheta\sin\psi, & b'' = -\sin\vartheta\cos\psi, & c'' = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir werden fernerhin darauf bedacht sein, diese allgemein gebrauchten, aber in der That äuſserst unübersichtlichen Formeln durch geeignete Zusammenfassung zu vereinfachen.

Dies gelingt zunächst dadurch, dass wir statt der *reellen* Koordinaten gewisse *komplexe Verbindungen* derselben einführen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy, & \Xi &= X + iY, \\ \eta &= -x + iy, & \mathrm{H} &= -X + iY, \\ \zeta &= -z, & \mathrm{Z} &= -Z. \end{aligned}$$

Dann entsteht aus dem Schema (5) ohne weiteres folgende Formelgruppe:

(7)

| | $\Xi$ | $\mathrm{H}$ | $\mathrm{Z}$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\frac{\cos\vartheta+1}{2}\cdot e^{i(\varphi+\psi)}$ | $\frac{\cos\vartheta-1}{2}\cdot e^{i(-\varphi+\psi)}$ | $i\sin\vartheta\, e^{i\psi}$ |
| $\eta$ | $\frac{\cos\vartheta-1}{2}\cdot e^{i(\varphi-\psi)}$ | $\frac{\cos\vartheta+1}{2}\cdot e^{i(-\varphi-\psi)}$ | $i\sin\vartheta\, e^{-i\psi}$ |
| $\zeta$ | $\frac{i\sin\vartheta}{2}\cdot e^{i\varphi}$ | $\frac{i\sin\vartheta}{2}\cdot e^{-i\varphi}$ | $\cos\vartheta$ |

Das Hineinspielen der komplexen Gröſsen in die Kinematik braucht uns nicht Wunder zu nehmen. Der tiefere Grund hierfür wird im folgenden Paragraphen klar werden; an dieser Stelle möge nur darauf hingewiesen werden, daſs auch die Gleichungen für eine ebene Drehung, die in dem Schema (4) enthalten sind, wie bekannt, mit Vorteil in die komplexe Form

$$x + iy = e^{+i\psi}(x_1 + iy_1)$$

umgeschrieben werden können*).

Übrigens ist durch die Einführung der komplexen Gröſsen die Eigenschaft der vorhergehenden Schemata verloren gegangen, daſs sie ebensowohl von links nach rechts wie von oben nach unten gelesen werden können. Unser Schema (7) giebt nur die Koeffizienten in den

---

*) Es kann auch daran erinnert werden, daſs in zahlreichen Gebieten der mathematischen Physik, z. B. in der Optik, der Gebrauch komplexer Gröſsen (zur symmetrischen Zusammenfassung sonst unsymmetrischer Gleichungen) gang und gäbe ist.

Ausdrücken der $\xi\eta\zeta$ durch die $\Xi H Z$ und darf nur von links nach rechts gelesen werden, (wie solches durch den beigefügten Pfeil angedeutet wird).

Eine überraschend einfache Gestalt aber nehmen die Transformationsgleichungen an, wenn wir schliefslich von $\vartheta$ zu $\frac{\vartheta}{2}$ übergehen und die folgenden Abkürzungen einführen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, & \beta = i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}}, \\ \gamma = i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, & \delta = \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}}, \end{cases}$$

welche durch die Relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verknüpft sind. Sie lauten dann nämlich

(9)

| $\rightarrow$ | $\Xi$ | $H$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha^2$ | $\beta^2$ | $2\alpha\beta$ |
| $\eta$ | $\gamma^2$ | $\delta^2$ | $2\gamma\delta$ |
| $\zeta$ | $\alpha\gamma$ | $\beta\delta$ | $\alpha\delta+\beta\gamma$ |

Wie diese Gleichungen zu verändern sind, wenn wir umgekehrt $\Xi H Z$ durch $\xi\eta\zeta$ ausdrücken wollen (wenn wir also den horizontalen durch einen vertikalen Pfeil ersetzen wollen) wird pag. 31 erörtert werden.

Die Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, welche in der Folge eine grofse Rolle spielen werden, sind, wie man sieht, nicht unabhängig, vielmehr sind $\alpha$ und $\delta$ einerseits, $\beta$ und $-\gamma$ andrerseits konjugiert imaginär. Wollen wir zu entsprechenden vier reellen Parametern übergehen, so mögen wir setzen

$$\alpha = D + iC, \qquad \beta = -B + iA,$$
$$\gamma = B + iA, \qquad \delta = D - iC;$$

die so definierten Parameter $A$, $B$, $C$, $D$, welche durch die Relation

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

verknüpft sind, werden wir als *Quaternionengröfsen* bezeichnen. Dieselben geben in der That den Übergang zur Hamiltonschen Quaternionentheorie. In ihnen lauten die Transformationsgleichungen, wenn wir noch von den $\xi\eta\zeta$ zu den $xyz$ übergehen:

| | | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|
| (10) | $x$ | $D^2+A^2-B^2-C^2$ | $2(AB-CD)$ | $2(AC+BD)$ |
| | $y$ | $2(AB+CD)$ | $D^2-A^2+B^2-C^2$ | $2(BC-AD)$ |
| | $z$ | $2(AC-BD)$ | $2(BC+AD)$ | $D^2-A^2-B^2+C^2$ |

Dieses Schema zeichnet sich durch einen höheren Grad von Symmetrie vor dem Schema (9) aus, ist im übrigen aber weniger einfach als jenes.

Wir haben somit drei verschiedene Parametersysteme zum Studium der Drehungen kennen gelernt, von denen jedes seine besonderen Vorzüge aufweist.

*Die Eulerschen Winkel* besitzen eine unmittelbare geometrische Bedeutung; überdies sind sie in mechanischer Hinsicht bei unserem Probleme ausgezeichnet. (Es wird sich später zeigen, dafs $\varphi$ und $\psi$ in der Kreiseltheorie die Rolle von „cyklischen Koordinaten" spielen). Natürlich sind die zu einer Drehung gehörigen $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ nur bis auf beliebige Multipla von $2\pi$ bestimmt. *Unsere Parameter* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sind in analytischer Hinsicht die einfachsten Bausteine, aus denen sich die Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen lassen, wie solches namentlich bei Einführung der elliptischen Funktionen deutlich werden wird. Neben ihnen werden die *Quaternionengröfsen* $A$, $B$, $C$, $D$ mehr zurücktreten; ihr Vorzug beruht in der formalen Symmetrie der Rechnungen; wir kommen auf dieselben, wie überhaupt auf die Stellung, welche die Quaternionentheorie hier einnimmt, noch wiederholt zurück (vgl. Kap. I, § 7 und Kap. VI, § 9). Man beachte noch ausdrücklich, dafs die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, welche zu einer Drehung gehören, und ebenso natürlich die $A$, $B$, $C$, $D$ nur bis auf das Vorzeichen bestimmt sind. In der That genügt es, in (8) das $\varphi$ oder $\psi$ um $2\pi$ zu ändern, um die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ im Vorzeichen umzukehren. Wir werden in dieser Hinsicht später noch besondere Festsetzungen treffen.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen dehnen sich unmittelbar auf die Behandlung des frei beweglichen starren Körpers aus. Um die Lage desselben zu bestimmen, können wir nach § 1 so verfahren, dafs wir einerseits die Lage des Bezugspunktes $O$, andrerseits die Lage des Körpers relativ zu $O$ angeben. Ersteres geschieht am einfachsten dadurch, dafs wir die rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$, $z$ des Bezugspunktes hinschreiben, letzteres dadurch, dafs wir eines der drei vorgenannten Parametersysteme benutzen.

## § 3. Die Bedeutung der Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Wir werden vermuten, dafs die Vereinfachung unserer Transformationsgleichungen, welche wir durch die Einführung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erzielt haben, keine zufällige ist, dafs vielmehr diese Gröfsen mit unserem Probleme der Drehung in einem nothwendigen inneren Zusammenhange stehen. Die folgenden Bemerkungen sollen dazu dienen, diesen Zusammenhang verständlich zu machen, soweit es ohne weitergehende Vorkenntnisse vorauszusetzen möglich ist. Es ist dabei bequem, von den beiden pag. 16 gekennzeichneten Auffassungen sich der zweiten anzuschliefsen, also einen im Raume beweglichen Punkt in Bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem zu betrachten.

Durch eine Drehung um $O$ wird jeder Raumpunkt $XYZ$ in einen Raumpunkt $xyz$ übergeführt, welcher von $O$ dieselbe Entfernung hat, wie jener. Insbesondere müssen Punkte, welche von $O$ die Entfernung Null haben, in ebensolche Punkte übergehen. Man könnte hiergegen einwenden, dafs es aufser $O$ selbst keine weiteren Punkte von dieser Eigenschaft giebt. Dies ist richtig, solange man im Reellen bleibt. Indessen ist man in der Geometrie seit lange gewohnt, auch Punkte mit imaginären Koordinaten ins Auge zu fassen, wodurch die Einfachheit und Übersichtlichkeit der Theorie ganz bedeutend erhöht wird. Thun wir dieses, so müssen wir sagen: Punkte, welche von $O$ die Entfernung Null haben, sind in unendlicher Anzahl vorhanden; sie liegen auf einem (allerdings imaginären) Kegel zweiter Ordnung, dessen Gleichung lautet

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

dem sogenannten *Minimalkegel.*

Wir schreiben diese Gleichung passend in die Form

$$(x + iy)(-x + iy) = z^2$$

oder mit Benutzung der pag. 20 eingeführten Gröfsen

$$\xi\eta = \zeta^2.$$

Wir definieren sodann zwei Parameter $\lambda_1$ und $\lambda_2$ durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \xi = \lambda_1^2, \quad \eta = \lambda_2^2, \quad \zeta = \lambda_1 \lambda_2.$$

Offenbar gehört zu jedem Wertepaar $\lambda_1, \lambda_2$ ein ganz bestimmter Punkt unseres imaginären Kegels (denn die Gleichung $\xi\eta = \zeta^2$ ist vermöge (1) identisch erfüllt); umgekehrt entsprechen einem Punkte des Kegels zwei Wertepaare $\lambda_1, \lambda_2$, welche sich aber nur durch einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel unterscheiden. *Die Gleichungen* (1), können wir sagen, *liefern uns eine Parameterdarstellung der Punkte unseres imaginären Kegels.*

Eine zweite Parameterdarstellung gewinnen wir für dieselben Punkte, wenn wir, von der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

ausgehend, zwei Parameter $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ einführen durch die Gleichungen:

$$\Xi = \Lambda_1^2, \quad \mathsf{H} = \Lambda_2^2, \quad \mathsf{Z} = \Lambda_1 \Lambda_2, \tag{2}$$

wo

$$\Xi = X + iY, \quad \mathsf{H} = -X + iY, \quad \mathsf{Z} = -Z.$$

Da unsere Drehung die Punkte (2) in die Punkte (1) überführt, so werden dadurch gleichzeitig die Parameter $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ mit den Parametern $\lambda_1$, $\lambda_2$ in gewisser Weise in Beziehung gesetzt. Den Zusammenhang beider Wertepaare lesen wir aus dem Schema (9) des vorigen Paragraphen ab. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 &= \alpha^2\Lambda_1^2 + \beta^2\Lambda_2^2 + 2\alpha\beta\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)^2,\\
\lambda_2^2 &= \gamma^2\Lambda_1^2 + \delta^2\Lambda_2^2 + 2\gamma\delta\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2)^2,\\
\lambda_1\lambda_2 &= \alpha\gamma\Lambda_1^2 + \beta\delta\Lambda_2^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\Lambda_1\Lambda_2 &&= (\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)(\gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2, \\ \lambda_2 = \gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2, \end{cases} \tag{3}$$

wobei es noch gestattet ist, die Vorzeichen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ simultan umzukehren.

*Wir sehen also, dafs mit jeder orthogonalen Substitution der rechtwinkligen Koordinaten $xyz$ eine lineare homogene Substitution zweier auf unserem imaginären Kegel definierten Parameter parallel läuft, deren Koeffizienten gerade unsere Gröfsen $\alpha\beta\gamma\delta$ sind.* Wenn früher $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gesetzt wurde, so heifst dies, *dafs die in Rede stehende Substitution die Determinante* 1 *haben soll.* Hierin liegt eine neue und einfache Definition der Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Dafs bei dieser Definition die Vorzeichen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ unbestimmt bleiben, ist in Übereinstimmung mit der Schlufsbemerkung des vorigen Paragraphen. Übrigens aber gilt es, die neue Definition der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ noch in verschiedene andere Formen umzusetzen.

Wir wollen zunächst von den Punkten des Kegels zu den auf ihm verlaufenden Geraden, seinen „Erzeugenden", übergehen. Während wir die zweifache Mannigfaltigkeit der Punkte auf zwei Parameter $\lambda_1$, $\lambda_2$ bezogen, können wir die einfache Mannigfaltigkeit seiner Geraden durch einen Parameter unterscheiden. Und zwar bietet sich hierzu von selbst dar:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\xi}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta}. \tag{4}$$

In der That bestimmen diese Gleichungen zu jedem Werte von $\lambda$ eine auf dem Kegel verlaufende (imaginäre) Gerade und umgekehrt. Definieren wir entsprechend den Parameter $\Lambda$:

$$\Lambda = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\Xi}{Z} = \frac{Z}{H},$$

so haben wir nach (3) zwischen $\lambda$ und $\Lambda$ die Beziehung

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}. \tag{5}$$

*Bei den Drehungen um den festen Punkt erleidet also der Parameter, durch welchen wir die Erzeugenden unseres imaginären Kegels charakterisierten, eine linear gebrochene Substitution, deren Koeffizienten, sofern wir nur die Substitutionsdeterminante gleich* 1 *setzen, wieder unsere Gröfsen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sind.*

Wir werden aber zeigen, dafs wir ähnlich auch allen von $O$ auslaufenden reellen Strahlen oder richtiger Halbstrahlen einen Parameter zuordnen können, welcher sich in gleicher Weise bei den Drehungen substituiert.

Wir gehen zu dem Zwecke von der trivialen Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

aus, welche nichts anderes als die Definition von $r$ ist. Hinsichtlich des Vorzeichens der vorkommenden Wurzel setzen wir fest, dafs dasselbe bei reellen Werten von $x, y, z$ stets *positiv* gerechnet werden soll. Der obigen Gleichung geben wir ähnlich wie früher die Form

$$(x + iy)(-x + iy) = (z + r)(z - r),$$

oder

$$\xi\eta = (\zeta - r)(\zeta + r)$$

oder endlich

$$\frac{\xi}{\zeta + r} = \frac{\zeta - r}{\eta}.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seite in der letzten Gleichung mit $\lambda$, so können wir schreiben

$$\frac{\xi}{\zeta + r} = \lambda, \quad \frac{\eta}{\zeta - r} = \frac{1}{\lambda}. \tag{6}$$

Auf solche Weise haben wir allen Punkten des Raumes einen (im allgemeinen komplexen) Parameter $\lambda$ zugeordnet, der für reelle Raumpunkte zufolge unserer Verabredung über das Vorzeichen von $r$ eindeutig festliegt. Dabei findet derselbe Parameterwert $\lambda$ in allen Punkten eines und nur eines reellen Halbstrahles durch $O$ statt. In der That bleibt der Wert von $\lambda$ ungeändert, wenn wir die Koordinaten $x, y, z$ eines reellen Raumpunktes mit einem gemeinsamen *positiven* Faktor

multiplizieren. Dagegen ändert sich sein Wert, nicht nur wenn wir die Verhältnisse dieser Gröfsen verändern, sondern auch wenn wir einen gemeinsamen negativen Faktor hinzufügen, letzteres wegen unserer Verabredung über das Vorzeichen von $r$. Es geht alsdann $\lambda$ in einen Wert $\lambda'$ über, welcher durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$(6') \qquad \frac{\xi}{\zeta - r} = \lambda', \quad \frac{\eta}{\zeta + r} = \frac{1}{\lambda'};$$

derselbe ist ersichtlich zum Werte $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$ konjugiert.

*Durch unsere Gleichungen* (6) *und* (6') *sind also jedem reellen Halbstrahle des Raumes ein, jedem reellen Vollstrahle zwei Parameterwerte zugeordnet.* Dabei bemerken wir, dafs unsere jetzige Parameterdarstellung, auf die imaginären Strahlen des Kegels $r^2 = 0$ ausgedehnt, in die frühere durch Gl. (4) definierte übergeht, und dafs hierbei die beiden Werte $\lambda$ und $\lambda'$ identisch werden.

In entsprechender Weise mögen zwei Parameter $\Lambda$ und $\Lambda'$ definiert werden, welche sich auf die Anfangslage des reellen Halb- bez. Vollstrahles beziehen. Indem wir berücksichtigen, dass die Entfernung $r$ bei der Drehung ungeändert bleibt, dafs also $R = r$ ist, setzen wir

$$(7) \qquad \frac{\Xi}{\mathsf{Z} + r} = \Lambda, \quad \frac{\Xi}{\mathsf{Z} - r} = \Lambda' \text{ etc.}$$

Um nun die Abhängigkeit der Parameter $\lambda$, $\lambda'$ und $\Lambda$, $\Lambda'$ festzustellen, drücken wir die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $\Xi$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$ durch diese Parameter aus. Die Gleichungen (6) und (6') ergeben

$$\lambda\lambda' = \frac{\xi^2}{\zeta^2 - r^2} = \frac{\xi^2}{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta}$$

und

$$\lambda + \lambda' = \frac{2\xi\zeta}{\zeta^2 - r^2} = \frac{2\xi\zeta}{\xi\eta} = \frac{2\zeta}{\eta}.$$

Wir können hiernach setzen

$$\xi : \zeta : \eta = \lambda\lambda' : \frac{\lambda + \lambda'}{2} : 1,$$

oder mit Benutzung eines Proportionalitätsfaktors $\varrho$

$$(8) \qquad \xi = \varrho\lambda\lambda', \quad \zeta = \varrho\frac{\lambda + \lambda'}{2}, \quad \eta = \varrho.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (7)

$$(9) \qquad \Xi = \sigma\Lambda\Lambda', \quad \mathsf{Z} = \sigma\frac{\Lambda + \Lambda'}{2}, \quad \mathsf{H} = \sigma,$$

wo $\sigma$ einen zweiten Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Daraufhin nehmen unsere Transformationsformeln (9) von pag. 21 die folgende Gestalt an, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\varrho}{\sigma} = \tau$ setzen:

$$\begin{aligned}
\tau \cdot \lambda\lambda' &= \alpha^2 \Lambda\Lambda' + \alpha\beta(\Lambda + \Lambda') + \beta^2 = (\alpha\Lambda + \beta)(\alpha\Lambda' + \beta), \\
\tau &= \gamma^2 \Lambda\Lambda' + \gamma\delta(\Lambda + \Lambda') + \delta^2 = (\gamma\Lambda + \delta)(\gamma\Lambda' + \delta), \\
\tau \cdot \frac{\lambda + \lambda'}{2} &= \alpha\gamma\Lambda\Lambda' + (\alpha\delta + \beta\gamma)\frac{\Lambda + \Lambda'}{2} + \beta\delta \\
&= \frac{1}{2}(\alpha\Lambda + \beta)(\gamma\Lambda' + \delta) + \frac{1}{2}(\gamma\Lambda + \delta)(\alpha\Lambda' + \beta).
\end{aligned}$$

Durch geeignete Division folgt

$$\begin{aligned}
\lambda\lambda' &= \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta} \cdot \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}, \\
\lambda + \lambda' &= \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta} + \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}.
\end{aligned}$$

Denken wir uns die Parameterwerte $\Lambda$ unserer Halbstrahlen vor der Drehung gegeben, so sind hiernach ihre Parameter $\lambda$ nach der Drehung zunächst nur erst zweideutig bestimmt. Wir haben entweder:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \quad \lambda' = \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}$$

oder

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda' + \beta}{\gamma\Lambda' + \delta}, \quad \lambda' = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}.$$

Man bemerke, daſs beide Formeln mit (5) zusammenfallen, wenn man $\lambda = \lambda'$, $\Lambda = \Lambda'$ setzt, wie dies für die Punkte des Minimalkegels zutrifft.

Nun ist aber klar, daſs nur die eine der beiden so gefundenen Beziehungen eine Drehung bedeuten kann. Es geht nämlich die zweite Reihe aus der ersten durch Vertauschung von $\lambda$ mit $\lambda'$ hervor, also dadurch, daſs wir jeden Halbstrahl in den entgegengesetzten überführen. Diese Operation ist aber durch keine Bewegung des dreidimensionalen Raumes zu verwirklichen. Andrerseits beachte man, daſs jede der beiden Formeln ein *Kontinuum* von Transformationen vorstellt. Wir können dann sofort sagen: die durch die eine Reihe dargestellte Operation führt das Bündel der Halbstrahlen in ein gleichstimmiges, die durch die andere Reihe dargestellte in ein ungleichstimmiges über.

Welche von beiden Reihen einer Drehung entspricht, erkennen wir am leichtesten, indem wir zu einem Spezialfall übergehen. Der einfachste Fall einer Drehung ist die „Drehung Null", durch welche jeder Punkt des Raumes in sich übergeführt wird. Der Drehung Null entsprechen die Parameterwerte $\vartheta = \varphi = \psi = 0$, also $\alpha = \delta = \pm 1$ und $\beta = \gamma = 0$. Die erste Reihe liefert in diesem Falle $\lambda = \Lambda$, wie

es sein mufs; die zweite Reihe aber giebt $\lambda = \Lambda'$, was unmöglich ist. Also stellt nur die erste Reihe eine Drehung dar; wir haben notwendig

$$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}, \tag{10}$$

und sprechen den Satz aus:

*Wenn wir durch die Gleichungen* (6) *jedem reellen Halbstrahle durch O einen Parameter $\lambda$ zuordnen, so erleidet dieser bei einer Drehung um O eine linear gebrochene Substitution, gerade so wie der Parameter $\lambda$, durch welchen wir vorher die Erzeugenden unseres imaginären Kegels unterschieden.* Also auch hieraus können wir die Definition der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entnehmen. —

Hätten wir uns bei diesen Entwickelungen auf Vorkenntnisse aus der projektiven Geometrie berufen wollen, so hätten wir unsere Betrachtungen wesentlich vereinfachen können. Wir würden dann zunächst wie oben die Erzeugenden des Minimalkegels durch einen Parameter $\lambda$ individualisiert haben. Da bei einer Drehung der Minimalkegel in sich übergeführt wird, so erleidet dieser Parameter eine projektive Transformation. Dies liefert den Satz von Formel (5), von wo man direkt zu Formel (3) aufsteigt. Sodann würden wir jedem Vollstrahle durch $O$ die Parameter $\lambda$ derjenigen beiden Erzeugenden zugewiesen haben, in welchen die durch den Strahl hindurchgehenden Tangentialebenen an den Minimalkegel den letzteren berühren. Dadurch würden wir genau zu der Definition der Werte $\lambda$ und $\lambda'$ kommen, die in den Gleichungen (6) enthalten ist. Dafs wir $\lambda$ dem einen, $\lambda'$ dem anderen Halbstrahle zuweisen, ist eine beiläufige Festsetzung, die wir aus Zweckmäfsigkeitsgründen treffen. Der letzte Satz, welcher ausspricht, dafs diese Werte bei einer Drehung sich projektiv substituieren, ist nun selbstverständlich d. h. eine unmittelbare Folge von (5); denn $\lambda$ und $\lambda'$ sind ja jetzt Parameter auf dem Minimalkegel. —

Schliefslich bringen wir noch unsere Parameterdarstellung in einen interessanten Zusammenhang mit einer Vorstellungsweise, welche in der Funktionentheorie seit Riemann üblich ist. Wir wollen nämlich das System unserer Halbstrahlen durch eine Kugelfläche auffangen, welche um $O$ mit dem Radius 1 beschrieben ist. Jedem Punkte der Kugel wird dabei ein bestimmter Halbstrahl und also ein bestimmter Werth des Parameters $\lambda$ zugeordnet. *Die komplexe Gröfse $\lambda$ findet sich also eindeutig auf der Kugeloberfläche ausgebreitet*, wobei dem Punkte $xyz$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nach (6) die Gröfse

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z} \tag{11}$$

entspricht.

Die Schnittpunkte der Kugel mit der positiven bez. negativen $z$-Axe werden wir als Nord- und Südpol bezeichnen. Wir haben dann im Nordpol ($z = +1$) den Wert $\lambda = \infty$, im Südpol ($z = -1$) den Wert $\lambda = 0$; die reellen Werte von $\lambda$ liegen auf dem Meridiane $y = 0$, der Äquator $z = 0$ enthält diejenigen Punkte, für welche $|\lambda| = 1$ ist.

Man nennt diese Parameterteilung in der Funktionentheorie die *Interpretation der komplexen Variabeln $\lambda$ auf der Riemannschen Kugelfläche.*

Gewöhnlich gelangt man zu ihr, indem man $\lambda$ zunächst in der Ebene und zwar speziell in der Äquatorebene unserer Einheitskugel nach Gaufs deutet und diese Ebene durch stereographische Projektion vom Nordpol aus auf die Kugel bezieht. Für uns würde höchstens der umgekehrte Weg angezeigt sein. Nachdem wir durch die vorstehenden Betrachtungen, welche sich aus der Natur unseres Problemes ungezwungen ergaben, direkt zu der Definition der komplexen Variabeln auf der *Riemannschen Kugeloberfläche* gelangt sind, kann es nachträglich für gewisse Zwecke wünschenswert sein, zu der *Gaufsschen Ebene* überzugehen. Wenn wir z. B. eine Kurve auf der Kugeloberfläche mit Hülfe der Variabeln $\lambda$ diskutiert haben und diese nun graphisch darzustellen wünschen, so müssen wir die Kugel auf irgend eine Zeichenebene beziehen. Zu dem Zwecke bietet sich als bestes Verfahren die stereographische Projektion und damit der Übergang zur Gaufsschen Ebene dar. Analytisch heifst dies einfach, dafs wir $\lambda = u + iv$ setzen und $u$ und $v$ als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deuten.

Ebenso wie wir den Parameter $\lambda$ von dem System der Halbstrahlen auf die Riemannsche Kugelfläche übertrugen, so überträgt sich natürlich die Bedeutung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von jener auf diese.

Wir betrachten zwei vereinigt gelegene Einheitskugeln um $O$, von denen wir die eine im Raume als fest, die andere als beweglich denken. Wir breiten in der beschriebenen Weise auf der festen Kugel den Parameter $\lambda$, auf der beweglichen den Parameter $\Lambda$ aus, wobei in der Anfangslage je zwei zusammenfallende Punkte der Kugeln zusammenfallende Werte von $\lambda$ und $\Lambda$ tragen mögen. *Üben wir jetzt auf die bewegliche Kugel eine beliebige Drehung aus, so stehen die Parameter $\lambda$ und $\Lambda$, welche zu je zwei nach der Drehung zusammenliegenden Punkten gehören, in der Beziehung*

$$(12) \qquad \lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta},$$

*wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gerade die früher definierten Gröfsen sind.* Umgekehrt werden wir diese Formel (12) als Definition der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gelten lassen, wobei wir nur hinzunehmen müssen, dafs die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ allemal $= 1$ sein soll. Die so abgeleitete Definition hat vor den

früheren (3), (5) und (10) den Vorzug gröſster Anschaulichkeit voraus, daher wir sie in der Folge überall zu Grunde legen werden.

Der Gedanke, die Drehungen im Raum als lineare Substitutionen der komplexen Veränderlichen $\lambda$ darzustellen, kommt gelegentlich bei Riemann vor*), zur vollen Geltung gelangt ist derselbe in der modernen Theorie der regulären Körper**).

## § 4. Nutzen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei dem Studium endlicher Drehungen.

Wenn wir im folgenden die Eigenschaften der Drehungstransformation studieren, werden wir die Rechnungen meist in unseren Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausführen, wo sie am einfachsten werden. Dabei wollen wir uns durchgehends des Kunstgriffes bedienen, statt mit den Transformationsgleichungen der $x, y, z$ lieber mit der einfacheren Substitution der Gröſsen $\lambda_1, \lambda_2$ zu operieren, welche, wie wir im vorigen Paragraphen sahen (vgl. Gl. 3), notwendig mit jenen verknüpft sind.

In diesem Sinne berechnen wir zunächst die zu einer gegebenen *inverse Drehung*. Führt die gegebene Drehung einen (im Kreisel festen) Punkt aus der Anfangslage $XYZ$ in die Endlage $xyz$ über, so bedeutet die inverse Drehung diejenige, welche den Punkt aus der Lage $xyz$ nach $XYZ$ zurückführt. Die vorgegebene Drehung besitze die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; es fragt sich, welche Parameter der inversen Drehung zukommen.

Wir betrachten

$$\lambda_1 = \alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2,$$
$$\lambda_2 = \gamma\Lambda_1 + \delta\Lambda_2;$$

hieraus ergiebt sich die inverse Substitution durch Auflösung. Es wird mit Rücksicht auf $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$(1) \qquad \begin{cases} \Lambda_1 = \quad \delta\lambda_1 - \beta\lambda_2, \\ \Lambda_2 = -\gamma\lambda_1 + \alpha\lambda_2. \end{cases}$$

*Wir erhalten also aus der vorgelegten die inverse Substitution, indem wir $\alpha$ und $\delta$ vertauschen und $\beta$ und $\gamma$ im Vorzeichen umkehren.*

Übertragen wir dieses Resultat auf unsere anderen Parametersysteme $A, B, C, D$ und $\varphi, \psi, \vartheta$. Zunächst erkennt man unmittelbar aus der Definition der Quaternionengröſsen von pag. 21:

*Ist uns eine Drehung durch die Werte der $A, B, C, D$ gegeben, so erhalten wir die inverse Drehung, indem wir $A, B$ und $C$ im Vorzeichen umkehren, $D$ aber ungeändert lassen.*

*) Vgl. die Abh.: Über die Flächen von kleinstem Inhalte bei gegebener Begrenzung, art. 8. Ges. W., 2. Aufl. pag. 309.

**) Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder. [illegible]

Ferner folgt aus dem Zusammenhang der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ mit den $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ (vgl. pag. 21) oder auch direkt aus der geometrischen Bedeutung der letzteren (vgl. pag. 17 f.):

*Ist die direkte Drehung durch die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ gegeben, so bestimmt sich die inverse Drehung durch die Winkel $-\psi$, $-\varphi$, $-\vartheta$.*

Wir machen hiervon eine Anwendung, um die in dem Schema (9) von pag. 21 enthaltenen Gleichungen nach den $\Xi$, H, Z aufzulösen. Zu dem Zwecke brauchen wir dort nur statt der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bez. $\delta$, $-\beta$, $-\gamma$, $\alpha$ einzutragen. Die Auflösung des Schemas (9) lautet also:

| $\rightarrow$ | $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ |
|---|---|---|---|
| $\Xi$ | $\delta^2$ | $\beta^2$ | $-2\beta\delta$ |
| H | $\gamma^2$ | $\alpha^2$ | $-2\alpha\gamma$ |
| Z | $-\gamma\delta$ | $-\alpha\beta$ | $\alpha\delta+\beta\gamma$ |

(wo der beigefügte Pfeil bedeutet, dafs dieses Schema nur von links nach rechts gelesen werden soll). Tragen wir andrerseits $-A$, $-B$, $-C$, $+D$ bez. $-\psi$, $-\varphi$, $-\vartheta$ statt $A$, $B$, $C$, $D$ bez. $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ in die Schemata (10) bez. (5) des vorletzten Paragraphen ein, so erhalten wir ein bereits bekanntes Resultat: es findet nur eine Transposition der Koeffizienten statt, wie solches bei der Umkehr einer orthogonalen Substitution nach pag. 17 selbstverständlich ist.

In entsprechender Weise behandeln wir die *Zusammensetzung zweier Drehungen.* Wir betrachten eine Drehung mit den Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und eine zweite Drehung mit den Parametern $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$. Es handelt sich darum die Parameter $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\delta''$ zu berechnen, welche in ihrer Wirkung der ersten und zweiten Drehung zusammengenommen gleichkommt. Dabei wird es bequem sein, die erste der beiden Auffassungen von pag. 16 zu Grunde zu legen, also die Koordinaten eines Raumpunktes in Bezug auf ein successive gedrehtes Koordinatensystem zu betrachten. Und zwar haben wir drei Lagen des beweglichen Koordinatensystems zu unterscheiden: 1) eine Anfangslage, in welcher es mit dem festen System zusammenfällt, 2) eine Lage, in welche es durch die erste Drehung übergeführt wird, und 3) eine Endlage, in welche es von der Lage 2) aus bei der zweiten Drehung übergeht. Der Raumpunkt sei durch seine Koordinaten $xyz$ im festen Koordinatensystem gegeben. Dann bedeuten $xyz$ gleichzeitig die Koordinaten des Raumpunktes vor der ersten Drehung in Bezug auf die Lage 1) des beweglichen Koordinatensystems. Ferner mögen $x'y'z'$ bez. $XYZ$ die

Koordinaten desselben Raumpunktes in Bezug auf die Lagen 2) und 3) des beweglichen Koordinatensystems sein.

Wir schreiben in einer leicht verständlichen Symbolik:

$$(x\,y\,z) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)\,(x'y'z'),$$
$$(x'y'z') = (\alpha'\beta'\gamma'\delta')\,(XYZ).$$

Gesucht werden die Parameter $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ in der symbolischen Gleichung:

$$(xyz) = (\alpha''\beta''\gamma''\delta'')\,(XYZ).$$

Gehen wir zu den komplexen Gröfsen $\lambda$, $\lambda'$, $\Lambda$ über, welche bez. den Koordinaten $xyz$, $x'y'z'$, $XYZ$ entsprechen mögen, so bedeuten unsere Gleichungen folgendes:

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha\lambda_1' + \beta\lambda_2', \\ \lambda_2 = \gamma\lambda_1' + \delta\lambda_2', \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} \lambda_1' = \alpha'\Lambda_1 + \beta'\Lambda_2, \\ \lambda_2' = \gamma'\Lambda_1 + \delta'\Lambda_2, \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha''\Lambda_1 + \beta''\Lambda_2, \\ \lambda_2 = \gamma''\Lambda_1 + \delta''\Lambda_2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) und (2′) folgt aber durch Elimination

$$\lambda_1 = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')\Lambda_1 + (\alpha\beta' + \beta\delta')\Lambda_2,$$
$$\lambda_2 = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')\Lambda_1 + (\gamma\beta' + \delta\delta')\Lambda_2.$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichungen mit den Gleichungen (3) liefert die gesuchten Werte der Parameter $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$, nämlich:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma', \quad \beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta', \\ \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma', \quad \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'. \end{cases}$$

Wir konstatieren, dafs diese Gröfsen *bilineare zweigliedrige* Verbindungen der $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sind und dafs die letzteren Gröfsen in unsern Formeln *unsymmetrisch* vorkommen. Daraufhin sprechen wir den Satz aus:

*Wenn wir zwei Drehungen nach einander ausführen und diejenige Drehung bestimmen, welche jenen beiden zusammen äquivalent ist, so werden die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der neuen Drehung bilineare zweigliedrige Verbindungen von den Parametern der gegebenen Drehungen. Dabei müssen wir auf die Reihenfolge der zusammenzusetzenden Drehungen Acht geben: wenn wir die Reihenfolge umkehren, ändert sich das Resultat ihrer Zusammensetzung.*

Wir werden wünschen, die vorstehende Zusammensetzungsregel auch auf die anderen Parametersysteme ...

der Quaternionengröfsen $A, B, C, D$ geschieht dieses einfach dadurch, dafs wir die Gleichungen (4) in ihren reellen und imaginären Teil spalten. Es ergiebt sich so, wenn $A, A', A''$ etc. den Gröfsen $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. bez. entsprechen:

$$(5) \quad \begin{cases} A'' = \phantom{-}AD' + BC' - CB' + DA', \\ B'' = -AC' + BD' + CA' + DB', \\ C'' = \phantom{-}AB' - BA' + CD' + DC', \\ D'' = \phantom{-}DD' - AA' - BB' - CC'. \end{cases}$$

Die Parameter der resultierenden Drehung sind wieder bilinear in den Parametern der Teildrehungen. Aber die Ausdrücke sind jetzt viergliedrig geworden.

Die entsprechenden Formeln für die $\varphi, \psi, \vartheta$ wollen wir nicht explicite hinschreiben, weil sie ziemlich kompliziert sind. Sie ergeben sich aus den Gleichungen (4), indem wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch ihre Werte in den $\varphi, \psi, \vartheta$ von pag. 21 ersetzen.

Wir gehen nun dazu über, die *eigentlichen geometrischen Elemente einer Drehung, nämlich die Lage der Drehungsaxe und die Gröfse des Drehungswinkels* zu berechnen, vorausgesetzt, dafs die Drehungsparameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bekannt sind. Dies geht nicht ohne etwas Rechnung ab. Um einen diesbezüglichen ersten Ansatz zu gewinnen, denken wir uns zunächst Drehungswinkel und Drehungsaxe als bekannt. Die Drehungsaxe machen wir zur ersten Koordinatenaxe eines im Raume festen rechtwinkligen Systems mit dem Ursprunge $O$, in welchem $U, V, W$ die Koordinaten eines Punktes vor der Drehung, $u, v, w$ die Koordinaten desselben Punktes nach der Drehung sein mögen. In diesem System werden die Formeln der Drehungstransformation besonders einfach. Sie sind in dem Schema II von pag. 19 enthalten; bezeichnen wir den Drehungswinkel mit $\omega$ und benutzen wir ähnlich wie pag. 20 geschehen, statt der Koordinaten $V, W$ etc. die komplexen Verbindungen $V + iW$, $V - iW$ etc., so lauten sie:

$$(6) \quad \begin{cases} u = U, \\ v + iw = e^{i\omega}(V + iW), \\ v - iw = e^{-i\omega}(V - iW). \end{cases}$$

Wir schliefsen hieraus Folgendes: Die Drehungsaxe selbst oder, wie wir lieber sagen, die *„Hauptaxe der Drehung“* ist dadurch ausgezeichnet, dafs ihre Punkte bei der Drehung durchaus ungeändert bleiben. Aufser dieser „Hauptaxe“ giebt es aber, sobald wir einmal imaginäre Punkte und Geraden mitberücksichtigen, noch zwei bemerkenswerte *„Nebenaxen“*, nämlich die in der Ebene $U=0$ gelegenen

Strahlen $V + iW = 0$ und $V - iW = 0$. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daſs sich die zu ihren Punkten gehörigen komplexen Koordinaten nur um einen Faktor ändern. Dieser Faktor ist gleich $e^{-i\omega}$ längs der ersten Nebenaxe, gleich $e^{+i\omega}$ längs der zweiten und, wie wir hinzufügen mögen, gleich 1 längs der Hauptaxe. In der That, setzen wir $U = 0$ und $V + iW = 0$, so wird nach (6) auch $u = 0$ und $v + iw = 0$, während $v - iw = e^{-i\omega}(V - iW)$ ist. Alle drei Koordinaten $U$, $V + iW$ und $V - iW$, so können wir sagen, multiplizieren sich längs dieser ersten Nebenaxe mit dem gemeinsamen Faktor $e^{-i\omega}$. In entsprechender Weise multiplizieren sich die Koordinaten $U$, $V + iW$, $V - iW$ längs der zweiten Nebenaxe mit dem gemeinsamen Faktor $e^{+i\omega}$ und längs der Hauptaxe mit 1.

Dasselbe gilt natürlich auch von den Koordinaten $U$, $V$, $W$ selbst und weiterhin von allen homogenen linearen Funktionen dieser Gröſsen, also z. B. von den Koordinaten $X$, $Y$, $Z$ in einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem, welches mit dem $U$, $V$, $W$-System einen gemeinsamen Ursprung hat, und schlieſslich auch von unsern früher benutzten Gröſsen $\Xi$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$. *Auch die Koordinaten* $\Xi$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{Z}$, *welche zu einem Punkte auf einer unserer drei Drehungsaxen gehören, multiplizieren sich bei der Drehung mit einem gemeinsamen Faktor, nämlich bez. mit* 1, $e^{+i\omega}$ *und* $e^{-i\omega}$. Bezeichnen wir also mit $m$ irgend einen dieser drei Faktoren, so haben wir in den Punkten unserer drei Axen:

$$\xi = m\Xi, \quad \eta = m\mathsf{H}, \quad \zeta = m\mathsf{Z}. \tag{7}$$

Um die Verbindung mit den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ herzustellen, ziehen wir das Schema (9) von pag. 21 heran. Für einen Punkt unserer Drehungsaxen besagt dasselbe mit Rücksicht auf (7) das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 - m)\Xi + \beta^2\mathsf{H} + 2\alpha\beta\,\mathsf{Z}, \\ 0 &= \gamma^2\,\Xi + (\delta^2 - m)\mathsf{H} + 2\gamma\delta\,\mathsf{Z}, \\ 0 &= \alpha\gamma\,\Xi + \beta\delta\mathsf{H} + (\alpha\delta + \beta\gamma - m)\mathsf{Z}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Sollen diese drei Gleichungen mit einander verträglich sein, so muſs ihre Determinante verschwinden. Es muſs also $m$ der kubischen Gleichung genügen:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - m & \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \gamma^2 & \delta^2 - m & 2\gamma\delta \\ \alpha\gamma & \beta\delta & \alpha\delta + \beta\gamma - m \end{vmatrix} = 0.$$

Bei der Ausrechnung ziehen sich die Koeffizienten vermöge der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wesentlich zusammen; unsere Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$m^3 - (m^2 - m)\left((\alpha+\delta)^2 - 1\right) - 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln müssen bez. identisch sein mit den Gröfsen $1, e^{i\omega}, e^{-i\omega}$. In der That läfst sich zunächst $(m-1)$ als Faktor herausheben. Die übrig bleibende quadratische Gleichung lautet:

$$m^2 + m(2 - (\alpha+\delta)^2) + 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind

$$m = \frac{(\alpha+\delta)^2}{2} - 1 \pm \sqrt{-(\alpha+\delta)^2 + \frac{(\alpha+\delta)^4}{4}} = e^{\pm i\omega}.$$

Daraus folgt

$$\cos\omega = \frac{(\alpha+\delta)^2}{2} - 1,$$

womit die Gröfse des Drehungswinkels gefunden ist. Die Formel vereinfacht sich durch Einführung des halben Winkels; wir haben

$$(9) \qquad \pm\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha+\delta}{2}$$

und

$$(9') \qquad \pm\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2}.$$

Auf die Vorzeichenbestimmung in diesen Formeln werden wir sogleich noch näher eingehen.

Nachdem die *Gröfse des Drehungswinkels* gefunden, erübrigt noch die *Lage der Drehungsaxe* (oder in unserer obigen Bezeichnung der „Drehungshauptaxe") zu berechnen. Hiezu dienen uns die Gleichungen (8). Tragen wir in ihnen $m = 1$ ein, so wird wegen der verschwindenden Determinante eine derselben entbehrlich. Wir greifen zur Bestimmung der Drehungsaxe etwa die beiden Gleichungen

$$(\alpha^2 - 1)\Xi + \beta^2 \mathrm{H} + 2\alpha\beta \mathrm{Z} = 0,$$
$$\gamma^2 \Xi + (\delta^2 - 1)\mathrm{H} + 2\gamma\delta \mathrm{Z} = 0$$

heraus, aus welchen durch eine kleine Determinantenrechnung folgt:

$$(10) \qquad \Xi : \mathrm{H} : \mathrm{Z} = -2\beta : 2\gamma : (\alpha - \delta).$$

Wir wollen geradezu die Richtungscosinus $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ berechnen, welche unsere Drehaxe mit den Koordinatenaxen einschliefst. Da wir annehmen, dafs vor der Drehung das bewegliche mit dem festen System koincidiert, so werden die Richtungscosinus in dem einen System offenbar mit denen im anderen System identisch. Und zwar haben wir längs der Drehungsaxe:

$$\Xi : \mathrm{H} : \mathrm{Z} = \xi : \eta : \zeta = \cos a + i\cos b : -\cos a + i\cos b : -\cos c.$$

Unter $\varrho$ einen Proportionalitätsfaktor verstanden, setzen wir mit Rücksicht auf (10):

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos a + i\cos b = -2\beta\varrho, \\ -\cos a + i\cos b = \quad 2\gamma\varrho, \\ -\cos c \qquad\qquad = (\alpha-\delta)\varrho. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ ergiebt sich noch für $\varrho$ die Bedingung:

$$\varrho^2((\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma) = \varrho^2((\alpha+\delta)^2 - 4) = 1,$$

oder mit Rücksicht auf (9′)

$$(12)\qquad \varrho = \frac{\pm i}{2\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Wir wollen uns nun mit der Unbestimmtheit der Vorzeichen in den vorstehenden und den früheren Formeln, soweit es möglich ist, abfinden.

Zunächst ist klar, daſs sofern wir nur die Anfangs- und Endlage des Körpers betrachten, statt des Winkels $\omega$ auch jeder Winkel $\omega + 2k\pi$ als Drehungswinkel angesehen werden kann, unter $k$ eine beliebige ganze Zahl verstanden. In der That ändert die Hinzufügung einer oder mehrerer voller Umdrehungen an der Endlage des Körpers gar nichts. Von diesem Standpunkte bleibt also das Vorzeichen von $\cos\frac{\omega}{2}$ und $\sin\frac{\omega}{2}$ notwendig unbestimmt.

Demgegenüber wollen wir nun festsetzen, daſs wir die Gröſse einer Drehung nicht lediglich aus der Anfangs- und Endlage des Körpers beurteilen wollen, daſs wir also $\omega$ nicht nur modulo $2\pi$ gegeben denken. *Vielmehr wollen wir die bei einer Drehung durchlaufenen Zwischenlagen soweit als bekannt ansehen, daſs auch $\frac{\omega}{2}$ modulo $2\pi$, also $\omega$ modulo $4\pi$ festgelegt werden kann.*

Trotz dieser Festsetzung bleibt aber immer noch eine Unbestimmtheit bestehen, welche wir nicht gut heben können. Wir können nämlich jede um einen bestimmten Halbstrahl im positiven Sinn erfolgende Drehung $\omega$ sowohl hinsichtlich der Endlage wie hinsichtlich der Zwischenlagen des Körpers ersetzen durch eine Drehung, welche um den entgegengesetzten Halbstrahl im negativen Sinne statt hat. Diesem Umstande entspricht es, daſs wir gleichzeitig $a$, $b$, $c$ und $\omega$ mit $a+\pi$, $b+\pi$, $c+\pi$ und $-\omega$ vertauschen können.

*Aus dem Gesagten ergiebt sich, daſs auf Grund unserer Festsetzung zwar $\cos\frac{\omega}{2}$ sowie die Produkte $\sin\frac{\omega}{2}\cos a$ etc. ein bestimmtes Vorzeichen erhalten werden, daſs aber das Vorzeichen von $\sin\frac{\omega}{2}$, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ einzeln genommen auch jetzt noch unbestimmt bleibt.*

Nach dieser Vorbereitung kommen wir auf die Gleichungen (9) bis (12) zurück; dabei wollen wir eine spezielle Lage des Koordinatensystems zu Grunde legen. Wir nehmen die Drehungsaxe zur $z$-Axe und betrachten eine Drehung, welche von der positiven $z$-Axe aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt und deren Gröſse durch einen modulo $2\pi$ bestimmten Wert von $\frac{\omega}{2}$ gegeben ist. Alsdann haben wir $\cos a = \cos b = 0$, $\cos c = 1$; andrerseits können wir für diese Drehung die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ eindeutig angeben. Es folgt nämlich aus der Definition der Eulerschen Winkel $\vartheta = 0$, $\varphi + \psi = \omega$ oder, genauer gesagt, $\frac{\vartheta}{2} \equiv 0$, $\frac{\varphi + \psi}{2} \equiv \frac{\omega}{2}$ modulo $2\pi$. Mithin bekommen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Werte $\alpha = e^{\frac{i\omega}{2}}$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = e^{-\frac{i\omega}{2}}$. Die dritte der Gleichungen (11) ergiebt nun

$$-1 = \left(e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}\right)\varrho$$

d. h.

$$\varrho = \frac{+i}{2\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Gleichzeitig wird

$$\frac{\alpha+\delta}{2} = +\cos\frac{\omega}{2}.$$

Wir werden dementsprechend auch bei allgemeiner Lage des Koordinatensystems in den Gleichungen (9) und (12) beidemal die *oberen* Vorzeichen wählen. Dagegen bleibt das Vorzeichen in Gleichung (9') auch jetzt noch unbestimmt, wie es nach der obigen Auseinandersetzung nicht anders zu erwarten ist. Indem wir die entwickelten Formeln übersichtlich zusammenstellen, schreiben wir:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \cos a + i\cos b &= -\frac{\beta i}{\sin\frac{\omega}{2}}, \\ -\cos a + i\cos b &= \frac{\gamma i}{\sin\frac{\omega}{2}}, \\ -\cos c &= \frac{(\alpha-\delta)i}{2\sin\frac{\omega}{2}}, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \cos\frac{\omega}{2} &= \frac{\alpha+\delta}{2}, \\ \sin\frac{\omega}{2} &= \pm\sqrt{1-\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Durch die vorstehenden Formeln ist die oben gestellte Aufgabe gelöst: *die geometrischen Elemente der Drehung mittelst der* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *auszudrücken.*

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe: *zu einer durch Axe und*

*Winkel gegebenen Drehung die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu berechnen:* ist in denselben Gleichungen enthalten. Man findet sofort:

$$(13')\quad \begin{cases} \alpha = \cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2}\cos c, \\ \beta = i\sin\frac{\omega}{2}(\cos a + i\cos b), \\ \gamma = i\sin\frac{\omega}{2}(\cos a - i\cos b), \\ \delta = \cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}\cos c. \end{cases}$$

Diese Formeln setzen in Evidenz, dafs die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jetzt auch dem Vorzeichen nach bestimmt sind, da sie nur von $\cos\frac{\omega}{2}$ und den Produkten $\sin\frac{\omega}{2}\cos a$ etc. abhängen.

Dasselbe gilt natürlich von den Quaternionengröfsen $A, B, C, D$, für welche die entsprechenden Formeln besonders einfach werden; sie lauten nämlich:

$$(14)\quad \begin{cases} A = \sin\frac{\omega}{2}\cos a, \\ B = \sin\frac{\omega}{2}\cos b, \\ C = \sin\frac{\omega}{2}\cos c, \\ D = \cos\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

Wir kommen schliefslich von hier aus noch einmal auf die Zusammensetzungsformeln (4) von pag. 32 zurück. Wir denken uns in ihnen die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ eindeutig gegeben, indem wir die zugehörigen Drehungswinkel $\omega$ und $\omega'$ willkürlich modulo $4\pi$ festlegen. Zunächst werden wir vermuten, dafs eine entsprechende Festsetzung auch hinsichtlich der resultierenden Drehung nötig ist, dafs also zunächst die $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ sich wiederum nur bis auf das Vorzeichen bestimmen. Demgegenüber ergeben aber unsere Formeln zu bestimmten $\alpha, \ldots$ und $\alpha', \ldots$ eindeutig bestimmte Werte von $\alpha'', \ldots$; es wird also zwischen den beiden möglichen Vorzeichen von $\alpha'', \ldots$ durch unsere Formeln von vornherein eine bestimmte Auswahl getroffen.

Nach welchem Prinzip diese Auswahl geschieht, stellen wir dadurch fest, dafs wir unsere jetzigen Formeln mit der geometrischen Konstruktion der resultierenden Drehung, auf welche im ersten Paragraphen pag. 10 Bezug genommen wurde, vergleichen. Notwendigerweise werden jene Konstruktion und diese Formeln modulo $2\pi$ denselben Wert des resultierenden Drehungswinkels $\omega''$ ergeben; dagegen ist es zunächst

fraglich, ob der Winkel $\frac{\omega''}{2}$ in beiden Fällen modulo $2\pi$ gleich oder um $\pi$ verschieden herauskommt.

Bei der geometrischen Konstruktion ergiebt sich nach pag. 10 $\frac{\omega''}{2}$ als Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem die gegenüberliegenden Winkel bez. $\frac{\omega}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ sind und die gegenüberliegende Seite gleich dem Winkel $(\widehat{12})$ ist, den die Axe der ersten Drehung mit der Axe der zweiten einschliefst.

Andrerseits ergiebt sich aus unseren Zusammensetzungsformeln (man geht am bequemsten von der letzten der Gleichungen (5) aus) mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) der Wert

$$\cos\frac{\omega''}{2} = \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}(\cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c')$$
$$= \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega'}{2}\cos(\widehat{12}).$$

Dies ist aber eine der bekannten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie. Sie zeigt uns, dafs der so bestimmte Wert von $\frac{\omega''}{2}$ wiederum aufgefafst werden kann als Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks, dessen gegenüberliegende Winkel $\frac{\omega}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ sind, dafs also dieser Wert mit dem geometrisch bestimmten Werte von $\frac{\omega''}{2}$ übereinstimmt. Daraufhin können wir sagen:

*Die Zusammensetzungsformeln* (4) *oder* (5) *sind einfach der analytische Ausdruck für die im ersten Paragraphen genannte Konstruktion in dem Sinne, dafs sie nicht nur denselben Wert von $\omega''$, sondern auch denselben Wert von $\frac{\omega''}{2}$ wie jene ergeben.*

## § 5. Übergang zu den sog. unendlich kleinen Drehungen.

Wir machen jetzt den *Grenzübergang von einer endlichen zu einer „unendlich kleinen Drehung“*, der schon in § 1 erwähnt wurde, lassen also den Drehungswinkel $\omega$ unbegrenzt abnehmen, wobei wir jedoch voraussetzen, dafs sich die Drehungsgeschwindigkeit, welche mit

$$\Omega = \frac{\omega}{dt}$$

bezeichnet werden möge, einer endlichen Grenze nähert. Mit einer unendlich kleinen Drehung operieren wir ebenso, wie wir es in der Infinitesimalrechnung mit einer „unendlich kleinen Verrückung“ gewohnt

sind, nämlich so, dafs wir die höheren Potenzen der in der Grenze verschwindenden Gröfsen neben den niederen vernachlässigen.

Es möge zunächst überhaupt nur eine unendlich kleine Drehung vorgelegt sein, d. h. es sollen die Systeme $x, y, z$ und $X, Y, Z$ direkt durch eine unendlich kleine Drehung verbunden sein.

Indem wir den Begriff des Drehungsvektors von pag. 11 aufnehmen, zerlegen wir die auf der Drehungsaxe aufgetragene Winkelgeschwindigkeit in Komponenten nach den Koordinatenaxen und nennen dieselben $p, q, r$. Wir haben nun ersichtlich

$$\Omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}, \qquad \omega = \Omega\, dt$$

und mit Benutzung der Richtungscosinus der Drehaxe

$$p = \Omega \cos a,$$
$$q = \Omega \cos b,$$
$$r = \Omega \cos c.$$

Wir fragen weiter, wie sich die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. $A, B, C, D$ der unendlich kleinen Drehung durch die $p, q, r$ ausdrücken. Besonders einfach werden die Ausdrücke der Quaternionengröfsen $A, B, C, D$. Nach Gleichung (14) des vorigen Paragraphen wird nämlich in der Grenze $\omega = 0$:

$$(1) \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\,\omega \cos a = \frac{1}{2}\, p\, dt, \\ B = \frac{1}{2}\,\omega \cos b = \frac{1}{2}\, q\, dt, \\ C = \frac{1}{2}\,\omega \cos c = \frac{1}{2}\, r\, dt, \\ D = 1. \end{cases}$$

Mithin lauten die Ausdrücke für unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ folgendermafsen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha = D + iC = 1 + \frac{ir}{2}\, dt, & \beta = -B + iA = \frac{ip - q}{2}\, dt, \\ \gamma = B + iA = \frac{ip + q}{2}\, dt, & \delta = \quad D - iC = 1 - \frac{ir}{2}\, dt. \end{cases}$$

Wir wollen auch die expliciten Transformationsgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten $xyz$ und $XYZ$ im Falle einer unendlich kleinen Drehung hinschreiben. Zu dem Zwecke brauchen wir nur die vorstehenden Werte der $A, B, C, D$ in das Schema (10) von pag. 22 einzutragen. Wir finden so, indem wir konsequent die höheren Potenzen von $dt$ wegwerfen, das folgende schiefe Determinantenschema:

(3)

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $-r\,dt$ | $+q\,dt$ |
| $y$ | $+r\,dt$ | $1$ | $-p\,dt$ |
| $z$ | $-q\,dt$ | $+p\,dt$ | $1$ |

Wir mögen noch den Gleichungen des vorstehenden Schemas eine etwas andere Form geben. Es bedeuten ja $XYZ$ die Koordinaten eines im Kreisel festen Punktes vor der unendlich kleinen Drehung, $xyz$ die Koordinaten desselben Punktes nach derselben, beide bezogen auf ein im Raume festes Koordinatensystem. Mithin sind

$$x - X, \quad y - Y, \quad z - Z$$

die Verrückungskomponenten des Punktes; aus ihnen berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten $x'$, $y'$, $z'$ durch die Gleichungen

$$x'dt = x - X, \quad y'dt = y - Y, \quad z'dt = z - Z.$$

*Auf Grund des Schemas* (3) *wird also die Lineargeschwindigkeit eines Kreiselpunktes*

$$(3') \qquad \begin{cases} x' = \phantom{-qX} - rY + qZ, \\ y' = \phantom{-q}rX \phantom{+pY} - pZ, \\ z' = -qX + pY \phantom{-pZ} . \end{cases}$$

Wir werden hier rechter Hand statt $X, Y, Z$ ebensowohl $x, y, z$ schreiben dürfen, da sich diese Gröſsen von einander nur um Glieder mit dem Faktor $dt$ unterscheiden. Dann haben wir also:

$$(3'') \qquad \begin{cases} x' = \phantom{-qx} - ry + qz, \\ y' = \phantom{-q}rx \phantom{+py} - pz, \\ z' = -qx + py \phantom{-pz} . \end{cases}$$

Jetzt können wir den wichtigen Satz über die Zusammensetzung zweier unendlich kleiner Drehungen, auf den bereits pag. 11 Bezug genommen wurde und der die Einführung des Wortes „Drehungsvektor" rechtfertigt, direkt analytisch verifizieren. Wir betrachten neben der Drehung mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Gl. (2) eine zweite Drehung, welche durch die Parameter

$$\alpha' = 1 + \frac{ir'}{2}\,dt, \qquad \beta' = \frac{ip' - q'}{2}\,dt,$$

$$\gamma' = \frac{ip' + q'}{2}\,dt, \qquad \delta' = 1 - \frac{ir'}{2}\,dt$$

gegeben sei. Nach der Zusammensetzungsregel von pag. 32 sind die

Parameter der resultierenden Drehung bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $dt$ die folgenden:

$$\alpha'' = 1 + \frac{i(r+r')}{2}\,dt, \qquad \beta'' = \frac{i(p+p') - (q+q')}{2}\,dt,$$

$$\gamma'' = \frac{i(p+p') + (q+q')}{2}\,dt, \qquad \delta'' = 1 - \frac{i(r+r')}{2}\,dt.$$

Mithin lauten die Komponenten der resultierenden Drehgeschwindigkeit:

$$p'' = p + p', \quad q'' = q + q', \quad r'' = r + r'.$$

*Zwei unendlich kleine Drehungen setzen sich also ebenso zusammen, wie Vektoren, nämlich so, dafs sich ihre Komponenten einfach addieren.*

Insbesondere wird das Resultat zweier unendlich kleiner Drehungen von ihrer Reihenfolge unabhängig; *unendlich kleine Drehungen stellen,* wie wir sagten, *vertauschbare Operationen vor.*

Wir sehen jetzt auch deutlich den allgemeinen Grund dieses einfachen Resultates ein. Er beruht wesentlich darin, dafs wir uns in dem Grenzfalle einer unendlich kleinen Drehung gestatten, die höheren Potenzen von $dt$ zu vernachlässigen und dafs in den beibehaltenen ersten Potenzen die Gröfsen $p, \ldots, p', \ldots$ notwendig in der Verbindung $p + p', \ldots$ vorkommen. Man erkennt hiernach unmittelbar, dafs ein entsprechendes Ergebnis bei jeder „unendlich kleinen Transformation" eintreten mufs.

Übrigens hätten wir mit Hülfe des letzten Satzes die in dem Schema (3) enthaltenen sehr bekannten Gleichungen einfacher direkt ableiten können, wie dies auch in der That gewöhnlich geschieht, nämlich durch Zusammensetzung der successiven Drehungen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$.

Demnächst kombinieren wir eine endliche Drehung mit einer unendlich kleinen. Die endliche Drehung habe die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und möge zuerst ausgeführt werden, die Parameter der unendlich kleinen Drehung heifsen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Wir fragen nach den Parametern der resultierenden Drehung

$$\alpha'' = \alpha + d\alpha, \quad \beta'' = \beta + d\beta, \quad \gamma'' = \gamma + d\gamma, \quad \delta'' = \delta + d\delta.$$

Da wir jetzt annehmen werden, dafs das bewegliche Koordinatensystem $XYZ$ in seiner Anfangslage *vor der ersten Drehung* mit dem festen Koordinatensystem $xyz$ zusammenfällt, so ist seine Lage *zu Beginn der zweiten* (der unendlich kleinen) *Drehung* von der des festen Systems verschieden. Wir müssen daher von jetzt ab zwischen den Komponenten des Drehungsvektors nach dem beweglichen und festen System wohl unterscheiden. Die ersteren nennen wir $p, q, r$, die letzteren $\pi, \varkappa, \varrho$. Wollen wir die Zusammensetzungsformeln von pag. 32 direkt verwenden, so müssen wir die unendlich kleine Drehung auf das be-

wegliche System beziehen, also die Komponenten $p$, $q$, $r$ benutzen. Wir erhalten so mit Rücksicht auf die Gleichungen (2):

$$\alpha + d\alpha = \alpha\alpha' + \beta\gamma' = \alpha + \left(\frac{ir}{2}\alpha + \frac{ip+q}{2}\beta\right) dt,$$

$$\beta + d\beta = \alpha\beta' + \beta\delta' = \beta + \left(\frac{ip-q}{2}\alpha - \frac{ir}{2}\beta\right) dt \text{ etc.}$$

Hierfür schreiben wir, indem wir die analogen Gleichungen für $\gamma$ und $\delta$ hinzufügen:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{ir}{2}\alpha + \dfrac{ip+q}{2}\beta, & \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{ip-q}{2}\alpha - \dfrac{ir}{2}\beta, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{ir}{2}\gamma + \dfrac{ip+q}{2}\delta, & \dfrac{d\delta}{dt} = \dfrac{ip-q}{2}\gamma - \dfrac{ir}{2}\delta. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben die Änderungen an, welche die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei dem Hinzutreten einer unendlich kleinen Drehung von den Komponenten $p, q, r$ erleiden. Denken wir uns die $p, q, r$ irgendwie als Funktionen der Zeit gegeben, so können wir aus ihnen die successiven Änderungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d. h. die successiven Lagenänderungen des Kreisels im Raume durch Integration des vorstehenden Systems von Differentialgleichungen bestimmen. Sind umgekehrt die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bekannte Funktionen der Zeit, sind also die successiven Lagen des Kreisels im Raume gegeben, so können wir aus unseren Gleichungen die $p, q, r$ vermöge Differentiation berechnen.

Nun bestimmen aber die Verhältnisse $p:q:r$ die Lage der instantanen Drehungsaxe gegen das im Kreisel feste $XYZ$-System und die successiven Werte dieser Verhältnisse die *Gestalt des Polhodiekegels*. Ferner bedeuten $p, q, r$ die Koordinaten des Endpunktes des Drehungsvektors in demselben Koordinatensystem; also geben die successiven Werte der $p, q, r$ selbst die *Gestalt der Polhodiekurve* an.

Die expliciten Ausdrücke der $p, q, r$ finden wir durch Auflösen der Gleichungen (4). Wir behalten die komplexen Verbindungen $p + iq$, $-p + iq$, $-r$ einfach bei und haben

$$(5)\quad \begin{cases} p + iq = 2i\left(\beta\dfrac{d\delta}{dt} - \delta\dfrac{d\beta}{dt}\right), \\ -p + iq = 2i\left(\alpha\dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma\dfrac{d\alpha}{dt}\right), \\ -r \quad = 2i\left(-\alpha\dfrac{d\delta}{dt} + \gamma\dfrac{d\beta}{dt}\right) = 2i\left(-\beta\dfrac{d\gamma}{dt} + \delta\dfrac{d\alpha}{dt}\right), \end{cases}$$

wobei noch die beiden für $-r$ angegebenen Werte wegen der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ identisch sind.

Wir schließen hieran die Formeln für den *Kegel* bez. die *Kurve der Herpolhodie*, berechnen also die Komponenten $\pi, \varkappa, \varrho$ des Drehungs-

vektors im festen System. Wir könnten so verfahren, dafs wir die soeben bestimmten Werte von $p + iq$, $-p + iq$, $-r$ statt $\Xi$, $H$, $Z$ in das Schema (9) von pag. 21 eintragen; die zugehörigen Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ liefern dann die gesuchten Gröfsen $\pi + i\varkappa$, $-\pi + i\varkappa$, $-\varrho$. Direkter führt indessen folgender Weg zum Ziele. Wir bemerkten schon pag. 14, dafs die Herpolhodiekurve der direkten Bewegung diametral in bezug auf den Unterstützungspunkt zu der Polhodiekurve der umgekehrten Bewegung liegt. Nun erhalten wir aus den Gleichungen (5) die Polhodiekurve der umgekehrten Bewegung, indem wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach der pag. 30 gegebenen Regel ersetzen durch $\delta$, $-\beta$, $-\gamma$, $\alpha$. Mithin lauten die *Formeln für die Herpolhodiekurve* der direkten Bewegung:

$$(6)\quad \begin{cases} \pi + i\varkappa = 2i\left(\beta \dfrac{d\alpha}{dt} - \alpha \dfrac{d\beta}{dt}\right), \\ -\pi + i\varkappa = 2i\left(\delta \dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma \dfrac{d\delta}{dt}\right), \\ -\varrho \qquad = 2i\left(\delta \dfrac{d\alpha}{dt} - \gamma \dfrac{d\beta}{dt}\right) = 2i\left(\beta \dfrac{d\gamma}{dt} - \alpha \dfrac{d\delta}{dt}\right). \end{cases}$$

Der *Herpolhodiekegel* ist natürlich schon durch die Verhältnisse der rechts stehenden Gröfsen bestimmt.

Die entsprechenden Gleichungen in den $A$, $B$, $C$, $D$ wollen wir nicht ausführlich hinschreiben; sie folgen durch Zerlegung von (5) und (6) in einen reellen und imaginären Teil. Dagegen werden wir später die Darstellung der $p$, $q$, $r$ durch die Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ und ihre Differentialquotienten nach der Zeit brauchen. Wir kommen hierzu, indem wir etwa von den Gleichungen (5) ausgehen. Die rechter Hand stehenden Aggregate der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ rechnen wir mit Hülfe der ursprünglichen Definition unserer Parameter in die $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ um. So erhalten wir beispielsweise:

$$\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt} = -\frac{i}{2} e^{-i\varphi} \vartheta' \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) + e^{-i\varphi} \psi' \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$
$$= -\frac{i}{2} (\vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{-i\varphi}$$

und

$$-\alpha \frac{d\delta}{dt} + \gamma \frac{d\beta}{dt} = +\frac{i}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (\varphi' + \psi') - \frac{i}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (-\varphi' + \psi')$$
$$= \frac{i}{2} (\varphi' + \cos \vartheta \psi');$$

mithin wird

$$\begin{aligned} p + iq &= (\quad \vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{-i\varphi}, \\ -p + iq &= (-\vartheta' + i\psi' \sin \vartheta) e^{+i\varphi}, \\ -r \quad &= -(\varphi' + \psi' \cos \vartheta) \end{aligned}$$

oder

$$(7)\qquad \begin{cases} p = \quad \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r = \quad \varphi' + \cos\vartheta\, \psi'. \end{cases}$$

Der Übergang zu der umgekehrten Bewegung, welche in den Eulerschen Parametern nach pag. 31 durch Vertauschung von $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ mit $-\psi$, $-\varphi$, $-\vartheta$ zu bewerkstelligen ist, liefert:

$$(8)\qquad \begin{cases} \pi = \vartheta' \cos\psi + \varphi' \sin\vartheta \sin\psi, \\ \varkappa = \vartheta' \sin\psi - \varphi' \sin\vartheta \cos\psi, \\ \varrho = \psi' + \varphi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Nach $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ aufgelöst lauten die Gleichungen (7):

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi' = r - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(p \sin\varphi + q \cos\varphi), \\ \psi' = \quad \frac{1}{\sin\vartheta}(p \sin\varphi + q \cos\varphi), \\ \vartheta' = \quad (p \cos\varphi - q \sin\varphi). \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen (7) und (9) natürlich auch durch elementare Zerlegung der unendlich kleinen Drehung in Komponenten finden, wie dies in den Büchern vielfach ausgeführt wird.

Die Gleichungen (7) und (8) geben eine neue Darstellung für den Polhodie- und Herpolhodiekegel, welche freilich an Durchsichtigkeit den früheren nachsteht; die Gleichungen (9) sagen aus, wie sich die Parameter $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ beim Hinzutreten einer unendlich kleinen Drehung modifizieren; sie bilden einen Bestandteil desjenigen Differentialgleichungssystems, mit dessen Integration wir uns im vierten Kapitel beschäftigen werden. —

Wir haben im zweiten Paragraphen verschiedene Parametersysteme ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $A, B, C, D$; $\varphi, \psi, \vartheta$) aufgestellt, durch welche wir die jeweilige *Lage* des Kreisels bestimmten; andrerseits lernten wir in diesem Paragraphen gelegentlich der Betrachtung unendlich kleiner Drehungen Parametersysteme kennen, durch welche der jeweilige *Geschwindigkeitszustand* des Kreisels charakterisiert wird. Es sind dieses in erster Linie die Gröſsen $p$, $q$, $r$ und $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$. —

Wir können die genannten Gröſsen kurz als *Geschwindigkeitskoordinaten des Kreisels* bezeichnen, u. zw. werden die $p$, $q$, $r$ *rechtwinklige*, die $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ *schiefwinklige Geschwindigkeitskoordinaten* zu nennen sein, weil wir bei Benutzung der ersteren den Drehungsvektor nach den rechtwinkligen Axen $X$, $Y$, $Z$, bei Benutzung der letzteren

nach drei im allgemeinen schiefwinkligen Axen (nämlich der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie) in Komponenten zerlegen.

Zwischen den beiden Gröfsentripeln $p, q, r$ und $\varphi', \psi', \vartheta'$ besteht noch ein weiterer wichtiger Unterschied: *Die $\varphi', \psi', \vartheta'$ sind die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten gewisser Raum-(Winkel-)Abmessungen, die $p, q, r$ sind dieses nicht:* oder: *die Gröfsen $\varphi' dt$, $\psi' dt$, $\vartheta' dt$ sind exakte, dagegen $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ unexakte Differentiale.*

Wir erkennen dies etwa daraus, dafs die Werte der Zeitintegrale

$$\int p\,dt, \quad \int q\,dt, \quad \int r\,dt$$

von einer Anfangszeit $t_0$ bis zu einer Endzeit $t_1$ erstreckt, nicht allein von der Anfangs- und Endlage des Körpers, sondern auch von seinen Zwischenlagen abhängen, was geometrisch evident ist. Dasselbe lehrt auch die Betrachtung irgend einer der zuletzt angeschriebenen Gleichungen. Nehmen wir z. B. die erste der Gleichungen (7):

$$p\,dt = d\vartheta \cos\varphi + d\psi \sin\vartheta \sin\varphi .$$

Soll hier die rechte Seite ein vollständiges Differential sein, so müfsten

$$\frac{\partial \cos\varphi}{\partial \psi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sin\vartheta \sin\varphi}{\partial \vartheta}$$

denselben Wert haben, was ersichtlich nicht der Fall ist.

Wir werden also sagen müssen: *Die $p, q, r$ sind nicht, wie die Geschwindigkeitskoordinaten $x', y', z'$ des einzelnen Massenpunktes, zeitliche Differentialquotienten von Raumabmessungen, sondern nur lineare Funktionen von solchen.* In der Terminologie von H. Hertz sind sie als *nichtholonome* Geschwindigkeitskoordinaten zu bezeichnen.

Wir können den Geschwindigkeitszustand natürlich noch durch beliebig viele andere, mehr oder minder geeignete, Parameter charakterisieren, z. B., was gleichfalls bereits geschehen, durch die Gröfsen $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\delta}{dt}$. Die letzteren stellen offenbar „überzählige Geschwindigkeitskoordinaten" vor, während unsere $p, q, r$ oder unsere $\varphi', \psi', \vartheta'$ als „independente Geschwindigkeitskoordinaten" zu bezeichnen wären.

Von hier aus gelangen wir sofort dazu, auch für den Fall des *frei beweglichen starren Körpers* Geschwindigkeitskoordinaten anzugeben. Wir haben zu dem Zwecke nur die Geschwindigkeit des Bezugspunktes einerseits (die Translationsgeschwindigkeit) und die Bewegung um den Bezugspunkt andrerseits (die Rotationsgeschwindigkeit) je durch drei Parameter festzulegen. Die einfachsten und allgemein gebräuchlichen Geschwindigkeitskoordinaten des frei beweglichen starren Körpers werden hiernach die sechs Gröfsen:

$$x', \; y', \; z', \; p, \; q, \; r,$$

wo $x, y, z$ wie am Ende von § 2 die rechtwinkligen Koordinaten des Bezugspunktes bedeuten. Indessen können wir den Geschwindigkeitszustand natürlich noch in sehr mannigfacher Weise durch andere sechs Gröfsen charakterisieren. Je sechs solche Gröfsen mögen auch aufgefafst werden als *„Koordinaten der instantanen Bewegungsschraube"*, durch welche wir jede unendlich kleine Bewegung des freien starren Körpers nach § 1 charakterisieren können.

## § 6. Das Beispiel der regulären Präcession.

Als Beispiel für die vorangehende allgemeine Theorie behandeln wir eine besonders einfache Bewegung des Kreisels, welche wir in der Folge bei dem Studium komplizierterer Bewegungen stets zur Orientierung heranziehen werden, nämlich die *reguläre Präcession.* Natürlich kann es sich hier nur um die *kinematische* Seite dieser Bewegung handeln; ihre *kinetische* Untersuchung, d. h. die Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Umständen sich bei einem gegebenen Kreisel eine reguläre Präcessionsbewegung einstellen kann, wird uns erst später beschäftigen. Wir wollen die Untersuchung zuerst geometrisch im Anschlufs an den ersten Paragraphen dieses Kapitels, sodann analytisch im Anschlufs an den vorangehenden Paragraphen führen.

Die reguläre Präcession definieren wir in der Weise, dafs wir einerseits die Bewegung der Figurenaxe im Raume, andrerseits die Bewegung des Kreisels gegen die Figurenaxe angeben. Beide Teilbewegungen sind im vorliegenden Falle so einfach wie möglich. *Es dreht sich nämlich die Figurenaxe um eine feste Gerade des Raumes unter konstanter Neigung mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit; gleichzeitig dreht sich der Kreisel um die Figurenaxe gleichfalls mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit herum.* Die feste Gerade des Raumes bezeichnen wir als die „Axe der Präcession"; wir denken uns dieselbe meistens der Einfachheit halber vertikal.

Die Drehgeschwindigkeit der Figurenaxe um diese Axe heifse $\nu$, die hinzutretende Drehgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenaxe $\mu$; erstere bezeichnen wir auch speziell als die „Präcessionsgeschwindigkeit der Figurenaxe". Übrigens wollen wir, um bei der vorläufigen geometrischen Behandlung Fallunterscheidungen möglichst zu vermeiden, zunächst voraussetzen, dafs die Drehgeschwindigkeit $\mu$, im Verhältnis zur „Präcessionsgeschwindigkeit" $\nu$ sehr grofs ist, wie es in den späteren Anwendungen thatsächlich die Regel sein wird.

Unsere Einzeldrehungen $\mu$ und $\nu$ kombinieren sich in jedem Momente zu einer resultierenden Drehung, welche durch ihre Winkelgeschwindigkeit, ihre Axe und ihren Sinn Gröſse, Richtung und Sinn des instantanen Drehungsvektors bestimmt. In den untenstehenden Figuren bedeutet $OV$ die Axe der Präcession, $OF$ die Figurenaxe,

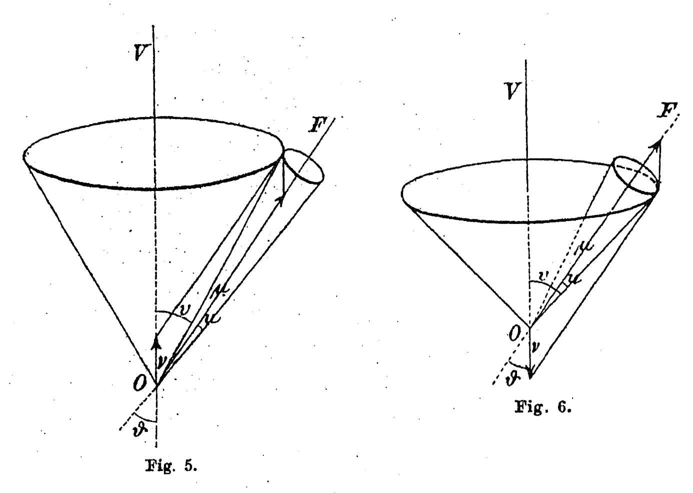



Fig. 5. Fig. 6.

wobei wir die Bezeichnung „Figurenaxe“ so wählen können, daſs der Winkel zwischen $OV$ und $OF$ nicht gröſser als ein Rechter wird und wo wir den Spezialfall, daſs dieser Winkel gerade gleich einem Rechten ist, vorderhand ausschlieſsen wollen. Auf diesen Axen tragen wir bez. die Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$ in der pag. 11 festgesetzten Weise ab. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn besitzen, je nachdem also die zugehörigen Vektoren einen spitzen oder stumpfen Winkel einschlieſsen. Im ersten Fall bezeichnen wir die Präcession als *progressive*, im zweiten als *retrograde*. Machen wir nun die Parallelogrammkonstruktion, so kommt in dem ersten Falle die Diagonale in den spitzen Winkel zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe, im zweiten Falle auſserhalb dieses Winkels zu liegen. Im übrigen aber besitzt unsere Diagonale, da nach Voraussetzung die Teilvektoren $\mu$ und $\nu$ während der Bewegung eine konstante Länge und eine unveränderliche relative Lage haben, in beiden Fällen eine feste Länge und eine unveränderliche relative Lage gegen die Vertikale wie gegen die Figurenaxe.

Der Endpunkt des Drehungsvektors beschreibt also im Laufe der Bewegung, sofern wir seine Lage im Raume betrachten, einen Kreis um die Vertikale; gleichzeitig durchläuft er, sofern wir von seiner Lage gegen den Kreisel sprechen wollen, einen Kreis um die Figurenaxe.

*Mithin sind im Falle der regulären Präcession die Kurven der Polhodie und der Herpolhodie einfache Kreise; dementsprechend werden die Kegel der Polhodie und der Herpolhodie, welche jene Kurven von O aus projizieren, gewöhnliche Kreiskegel.* Hinsichtlich der gegenseitigen Lage dieser beiden Kegel konstatieren wir auf Grund der Figuren 5 und 6 einen Unterschied: *Bei der progressiven Präcession rollt der Polhodiekegel von aufsen, bei der retrograden von innen auf dem Herpolhodiekegel ab.*

Wir mögen noch aus der Parallelogrammkonstruktion einige elementargeometrische Folgerungen ziehen. Wir bezeichnen den Winkel zwischen Figurenaxe und Vertikalen, wie früher, mit $\vartheta$. Ferner heifse der Winkel zwischen der instantanen Rotationsaxe und der Figurenaxe $u$, der Winkel zwischen der instantanen Rotationsaxe und der Vertikalen $v$. Alsdann bestimmt $u$ die Öffnung des Polhodie-, $v$ die des Herpolhodiekegels.

Bedeutet $\Omega$, wie früher, die Gröfse der resultierenden Drehgeschwindigkeit, also die Länge der Diagonalen im Parallelogramm, so haben wir nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

$$\Omega^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos\vartheta.$$

Ferner ergiebt sich aus den beiden Dreiecken, in welche unser Parallelogramm durch die Diagonale zerlegt wird:

$$\frac{\sin u}{\nu} = \frac{\sin\vartheta}{\Omega}$$

und

$$\frac{\sin v}{\mu} = \frac{\sin\vartheta}{\Omega}.$$

Also

$$\mu \sin u = \nu \sin v. \tag{1}$$

Ein wichtiges Beispiel für retrograde Präcession liefert unsere *Erde.* Die Erde spielt hier die Rolle des Kreisels; den Mittelpunkt der Erde denken wir uns bei der Bewegung fest. Der Vertikalen entspricht die Normale zur Ebene der Ekliptik. *Die Erdaxe umkreist diese Gerade unter der festen Neigung von rund* $23\frac{1}{2}^0$ *in ca.* 26000 *Jahren einmal.* Nehmen wir als Zeiteinheit die Länge eines Tages, so wird

$$\mu = 2\pi, \quad \nu = \frac{-2\pi}{365 \,.\, 26000}.$$

Aus der Gl. (1) ergiebt sich

$$\sin u = \frac{-\sin v}{365 \,.\, 26000}. \tag{2}$$

Der Winkel $u$ wird also eine sehr kleine Gröfse, so dafs wir $\sin u$

durch $u$ ersetzen können. Da ferner wie in Fig. 6 $v = \vartheta + u$ ist, so werden wir $v$ durch $\vartheta$ ersetzen dürfen. *Der Herpolhodiekegel wird also sehr nahezu ein Kreiskegel von* $23\frac{1}{2}^0$ *Winkelöffnung.* Wir fragen ferner nach der Gestalt des Polhodiekegels. Statt seines Öffnungswinkels geben wir lieber den Radius ($r$) desjenigen Kreises an, in welchem die Erdoberfläche von diesem Kegel geschnitten wird. Bedeutet $R$ die Länge des Erdradius*) $\left(R = \frac{40\,000\,000}{2\pi} \text{ Meter } = \frac{4\,000\,000\,000}{2\pi} \text{ cm}\right)$, so haben wir nach Gl. (2)

$$r = Ru = \frac{\sin(23\frac{1}{2}{}^0) \,.\, 4\,000\,000\,000}{2\pi \,.\, 365 \,.\, 26\,000} \text{ cm} = 27 \text{ cm}.$$

*Ein kleiner, um den Nordpol beschriebener Kreis von 27 cm Radius würde also die Spur des Polhodiekegels auf der Erdoberfläche sein.* Die Präcessionsbewegung der Erde können wir uns dadurch hervorgebracht denken, dafs ein entsprechend schmaler Polhodiekegel auf einem Herpolhodiekegel von ca. $23\frac{1}{2}^0$ Winkelöffnung von innen abrollt.

Wie wir sehen, giebt die Poinsotsche Theorie der rollenden Kegel im Falle der regulären Präcession ein höchst anschauliches und prägnantes Bild von dem Ablauf der Bewegung. Dementsprechend handelt auch Poinsot bei den Anwendungen seiner Theorie mit Vorliebe von dem Beispiele der regulären Präcession**).

Wir behandeln jetzt die reguläre Präcession noch einmal analytisch auf Grund der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Resultate. Zunächst übertragen wir die obige geometrische Definition unserer Bewegung ins Analytische, was mit Hülfe der Eulerschen Parameter $\varphi, \psi, \vartheta$ auf das Einfachste bewerkstelligt wird.

Wir haben nämlich offenbar:

$$(3) \qquad \vartheta = \text{const.} \quad \varphi = \mu t, \quad \psi = \nu t.$$

Die Komponenten des instantanen Drehungsvektors werden daraufhin nach Gleichung (7) des vorigen Paragraphen, wenn wir sie auf das im Kreisel feste System beziehen:

$$(4) \qquad p = \nu \sin\vartheta \sin\varphi, \quad q = \nu \sin\vartheta \cos\varphi, \quad r = \mu + \nu\cos\vartheta$$

und nach Gleichung (8) desselben Paragraphen, wenn wir sie für das im Raume feste System berechnen:

$$(5) \qquad \pi = \mu \sin\vartheta \sin\psi, \quad \varkappa = -\mu\sin\vartheta\cos\psi, \quad \varrho = \nu + \mu\cos\vartheta.$$

Diese Gleichungen zeigen zunächst wieder, *dafs Polhodie- und Herpolhodiekurve in unserem Falle Kreise werden.* In der That haben wir z. B.:

$$p^2 + q^2 = \nu^2 \sin^2\vartheta = \text{const.}, \quad r = \mu + \nu\cos\vartheta = \text{const.}$$

*) Alles in runden Zahlen gerechnet.

**) Vgl. z. B. seine Schrift: Théorie des cônes circulaires roulants, in der Zeitschrift Connaissance des temps, 1853.

Die Winkelöffnungen der abrollenden Kegel berechnen sich, wenn $u$ und $v$ die oben angegebene Bedeutung haben, nach der Formel:

$$(6) \qquad \operatorname{ctg} u = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \operatorname{ctg} v = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi^2+\varkappa^2}};$$

den Gleichungen (4) und (5) zufolge haben wir also:

$$(7) \qquad \operatorname{ctg} u = \frac{\frac{\mu}{\nu}+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \operatorname{ctg} v = \frac{\frac{\nu}{\mu}+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Natürlich genügen diese Werte von $u$ und $v$ der obigen Relation (1), wie man leicht nachrechnet.

Wir geben jetzt eine *ausführliche Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle regulärer Präcessionsbewegung*, indem wir dieselben nach den Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ klassifizieren. Die jetzt zu gebende Einteilung subsumiert sich dabei der früheren, in welcher wir, je nach dem $\frac{\nu}{\mu} > 0$ oder $< 0$ war, die Bewegung als progressive oder retrograde unterschieden.

Bei der folgenden Diskussion denken wir uns $\vartheta$ als fest gegeben und zwar können wir, wie oben, voraussetzen, daſs $\vartheta$ nicht gröſser als ein Rechter ist. Indem wir die Grenzfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bis zum Schlusse zurückschieben, nehmen wir für das zunächst Folgende an:

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.$$

Von den Winkelöffnungen $u$ und $v$ dürfen wir noch eine, etwa $v$, als spitzen Winkel rechnen. Gleichzeitig mit den Kegeln $u$ und $v$ rollen nämlich auch die diametralen Kegel $\pi - u$ und $\pi - v$ auf einander ab. Wenn daher $v > \frac{\pi}{2}$, so können wir durch Übergang zu den Kegeln $u' = \pi - u$ und $v' = \pi - v$ erreichen, daſs $v' < \frac{\pi}{2}$ wird.

Das ganze Wertegebiet von $\frac{\nu}{\mu}$ zerlegt sich für unsere Zwecke in vier Intervalle, welche durch die folgenden vier Grenzwerte

$$\frac{\nu}{\mu} = \infty, \quad \frac{\nu}{\mu} = 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = -\cos\vartheta, \quad \frac{\nu}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$$

geschieden werden.

*Erster Grenzfall:* $\frac{\nu}{\mu} = +\infty$. In diesem Falle ist $\mu = 0$, d. h. der Kreisel rotiert relativ zu seiner Figurenaxe überhaupt nicht. Die Formeln

(7) zeigen gleichzeitig, dafs $v = 0$. Der Herpolhodiekegel ist also unendlich dünn und die instantane Rotationsaxe fällt beständig mit der Vertikalen zusammen. *In unserem ersten Grenzfalle führt der Kreisel eine gleichförmige Rotation von der Winkelgeschwindigkeit* $\boldsymbol{v}$ *um eine (von der Figurenaxe verschiedene) feste Gerade (nämlich die Vertikale) aus.*

*Erstes Intervall:* $+\infty > \frac{\nu}{\mu} > 0$. Im Innern unseres ersten Intervalles haben $\nu$ und $\mu$ gleiche Zeichen. Die Parallelogrammkonstruktion, welche wir oben ausführten, zeigt dann, dafs die instantane Rotationsaxe in dem spitzen Winkel zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe liegt. Dementsprechend ergiebt sich aus den Gl. (7), dafs $u$ und $v$ kleiner als $\vartheta$ sind. *Der bewegliche Kegel rollt daher auf dem festen von aufsen ab* (vgl. Fig. 7). Wir werden diese Bewegung als *epicykloidische* bezeichnen.

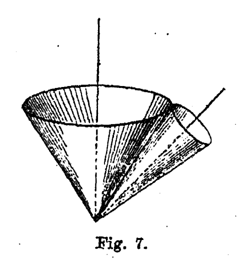


Fig. 7.

*Zweiter Grenzfall:* $\frac{\nu}{\mu} = 0$. Bei abnehmenden positiven Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ erweitert sich der Herpolhodiekegel allmählich, während der Polhodiekegel sich verengert. In dem Grenzfalle $\frac{\nu}{\mu} = 0$ ist der Polhodiekegel unendlich dünn geworden; in der That ergeben die Gl. (7) in diesem Falle $u = 0$. Infolgedessen fällt die instantane Rotationsaxe beständig mit der Figurenaxe zusammen. Gleichzeitig steht wegen $\nu = 0$ die Figurenaxe im Raume stille. *Der Kreisel rotiert also mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* $\mu$ *um seine im Raume feste Figurenaxe.*

*Zweites Intervall:* $0 > \frac{\nu}{\mu} > -\cos\vartheta$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ zu negativen Werten übergeht, beginnt sich der Polhodiekegel wieder zu erweitern. Gleichzeitig tritt er ins Innere des Herpolhodiekegels ein. In der That ergiebt sich aus den Gl. (7) $v > \vartheta$. *Der bewegliche Kegel rollt daher auf dem festen von innen ab* (vgl. Fig. 8). Wir werden diesen Fall als *Hypocykloidenbewegung* bezeichnen.

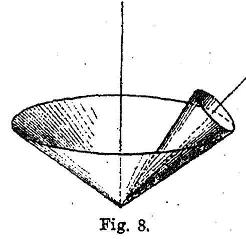


Fig. 8.

*Dritter Grenzfall:* $\frac{\nu}{\mu} = -\cos\vartheta$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ den Wert $-\cos\vartheta$ erreicht hat, ist nach Gl. (7) $v = \frac{\pi}{2}$ geworden, *der Herpolhodiekegel also in eine Horizontalebene ausgeartet.*

*Drittes Intervall:* $-\cos\vartheta > \frac{\nu}{\mu} > -\frac{1}{\cos\vartheta}$. Wenn $\frac{\nu}{\mu}$ weiter abnimmt, würde sich $v > \frac{\pi}{2}$ ergeben. Nach unserer obigen Verabredung

haben wir dann zu den diametralen Kegeln $\pi - u$ und $\pi - v$ überzugehen, wodurch $v < \frac{\pi}{2}$ und $u > \frac{\pi}{2}$ wird. *In dem dritten Intervalle rollt daher ein stumpfer Polhodiekegel auf einem spitzen Herpolhodiekegel von aufsen ab* (vgl. Fig. 9). Wir wollen diese Art der Bewegung als *anticykloidisch* bezeichnen.

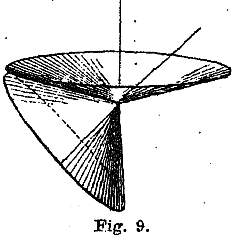


Fig. 9.

*Vierter Grenzfall:* $\frac{\nu}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$. Während $\frac{\nu}{\mu}$ von $-\cos\vartheta$ bis $-\frac{1}{\cos\vartheta}$ abnimmt, flacht sich der Polhodiekegel allmählich ab. Für den Grenzwert $\frac{\nu}{\mu} = -\frac{1}{\cos\vartheta}$ ist er nach (7) *in eine Ebene ausgeartet.*

*Viertes Intervall:* $-\frac{1}{\cos\vartheta} > \frac{\nu}{\mu} > -\infty$. Bei weiter abnehmendem $\frac{\nu}{\mu}$ verengert sich der Polhodiekegel, so dafs im vierten Intervalle wieder $u < \frac{\pi}{2}$ ist. *Gleichzeitig umfafst der Polhodiekegel den Herpolhodiekegel von aufsen* (vgl. Fig. 10). Die hieraus sich ergebende Art des Abrollens wollen wir als *Pericykloidenbewegung* bezeichnen.

Der Grenzfall $\frac{\nu}{\mu} = -\infty$ schliefslich deckt sich mit dem Grenzfalle $\frac{\nu}{\mu} = +\infty$, mit dem wir diese Diskussion begonnen haben.

Fig. 10.

Um unsere jetzige Einteilung mit der früheren in Beziehung zu setzen, fügen wir das nachfolgende Schema bei, welches ohne weitere Erklärung verständlich sein wird:

Retrograde, Progressive Präcession

Peri- Anti- Hypo- Epi-Cykloidenbewegung

$-\infty \leftarrow -\frac{1}{\cos\vartheta}$ $-\cos\vartheta$ $0$ $\rightarrow +\infty$

Es erübrigt nur noch ein Wort über die Grenzfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ zu sagen.

Wenn $\vartheta = 0$, fällt die Figurenaxe mit der Vertikalen zusammen, hat also eine feste Richtung im Raume und ist gleichzeitig Drehungsaxe. *Der Kreisel rotiert mit konstanter Geschwindigkeit um diese Axe; die auf einander abrollenden Kegel sind beide unendlich dünn.* Die Lage der Knotenlinie in der Äquatorebene ist unbestimmt, desgleichen die Werte von $\nu$ und $\mu$.

In dem anderen Grenzfalle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ beschreibt die Figurenaxe die Horizontalebene. Das zweite und vierte unserer obigen Intervalle kommt dabei in Fortfall; die Bewegung ist entweder *epi-* oder *anticykloidisch.* —

Wir sind auf die reguläre Präcession um so lieber eingegangen, weil uns eine geringe Modifikation des Begriffes gestattet, jede beliebige Bewegung des Kreisels für einen bestimmten Zeitpunkt als eine geeignete Präcessionsbewegung aufzufassen. Die Modifikation des Begriffes besteht darin, dafs wir von der regulären (oder gleichförmigen) Präcession zu einer *gleichförmig beschleunigten Präcession* übergehen. Wir verstehen darunter eine Bewegung, welche sich hinsichtlich der successiven Richtungen der Drehungsaxe ebenso verhält, wie eine reguläre Präcession, welche sich aber hinsichtlich der Gröfse der Drehung dadurch von jener unterscheidet, dafs diese Gröfse proportional mit der Zeit anwächst. Die Kegel der Polhodie und Herpolhodie sind bei dieser Bewegung wieder einfache Kreiskegel; dagegen sind die entsprechenden Kurven keine Kreise, sondern spiralförmige Linien, welche sich mit immer weiter werdenden Windungen um die Kreiskegel herumziehen.

Sei nun eine beliebige Bewegung durch ihre Polhodie- und Herpolhodie-Kegel und Kurven gegeben. Wir haben im ersten Paragraphen gesehen, dafs wir jede Bewegung des Kreisels für den einzelnen Augenblick durch eine *einfache Rotation* um die instantane Drehungsaxe ersetzen können. *Diese ersetzt die gegebene Bewegung sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsrichtung wie hinsichtlich der Geschwindigkeitsgröfse aller einzelnen Massenpunkte des Kreisels für einen bestimmten Zeitpunkt, oder, wie wir sagen können, sie approximiert sie von der ersten Ordnung.*

In entsprechender Weise behaupten wir: *Durch eine gleichförmig beschleunigte Präcession können wir jede beliebige Bewegung des Kreisels nach Richtung und Gröfse der Bewegung von der zweiten Ordnung d. h. in zwei benachbarten Zeitmomenten approximieren.*

Um dieses einzusehen, konstruieren wir uns zu den gegebenen Kegeln der Polhodie und Herpolhodie diejenigen Kreiskegel hinzu, welche jene längs der instantanen Drehungsaxe oskulieren. Wir können sie als *Krümmungskegel* bezeichnen, da sie für uns genau dieselbe Rolle spielen, wie die Krümmungskreise in der Kurventheorie. Wir betrachten ferner die Polhodie- und Herpolhodiekurve der gegebenen Bewegung. Diese bestimmen mittelst der Richtung, in welcher sie durch den Endpunkt des instantanen Drehungsvektors hindurchlaufen, eine bestimmte Änderungsgeschwindigkeit für die Länge des Drehungsvektors in dem

betrachteten Zeitpunkte. Wir konstruieren uns nun auf den Krümmungskegeln je eine neue Polhodie- und Herpolhodiekurve, welche dieselbe Änderungsgeschwindigkeit konstant aufweist. Die so entstehenden Spiralkurven berühren die Polhodie- und Herpolhodiekurve der gegebenen Bewegung in dem betrachteten Zeitpunkte. Wickeln wir nun die beiden Krümmungskegel so aufeinander ab, dafs die Drehgeschwindigkeit in jedem Momente der durch unsere Polhodie- oder Herpolhodiekurve bestimmten Länge des Drehungsvektors proportional ist, so erhalten wir eine gleichförmig beschleunigte Präcession, welche die gegebene Bewegung sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsrichtung wie der Geschwindigkeitsgröfse sämmtlicher Kreiselpunkte von der zweiten Ordnung approximiert. In der That stimmt die Lage und Gröfse des Drehungsvektors bei der vorgegebenen Bewegung und bei unserer gleichförmig beschleunigten Präcession in zwei benachbarten Zeitmomenten überein.

Wenn es uns nur darauf angekommen wäre, die Geschwindigkeits*richtung* der wirklichen Bewegung wiederzugeben, wenn wir also von der Geschwindigkeits*gröfse* absehen wollten, so hätten wir schon mit einer *regulären* Präcession auskommen können, welche sich aus irgendwelcher *gleichförmigen* Abwickelung unserer Krümmungskegel ergiebt.

## § 7. Exkurs über die Quaternionentheorie.

Wir können dieses Kapitel nicht schliefsen, ohne auf den Zusammenhang hinzuweisen, in dem die vorhergehenden Erörterungen mit der Theorie der Hamiltonschen Quaternionen stehen. Trotzdem diese Theorie nicht mehr jung ist*), gehen die Ansichten über ihren Wert bis heute stark auseinander. Der Grund hiervon dürfte darin zu suchen sein, dafs die Vertreter der Quaternionentheorie ihre Lehren meistens einseitig und mit einem metaphysischen Anfluge behaftet darstellen, wobei die einfache geometrische Deutung, welche man den Operationen ihres Kalkuls geben kann, nicht immer genügend hervortritt. Wir hoffen in dieser Hinsicht durch die folgende Darstellung, welche sich dem Vorangehenden ungezwungen anpafst, zur Klärung der Ansichten einen Beitrag liefern zu können, und thun dieses um so lieber, als die Quaternionentheorie, wie wir unten sehen werden, als speziellen Fall die sog. *Vektorenrechnung* umfafst, und als letztere für viele Probleme der modernen Physik ein bequemes und allgemein übliches Ausdrucksmittel

*) Hamiltons grundlegendes Werk: Lectures on Quaternions stammt aus dem Jahre 1853; 1866 folgten die Elements of Quaternions (deutsch von Glan).

geworden ist, von dem wir selbst mannigfachen Gebrauch machen werden. —

Als „Quaternionengröfsen" haben wir früher vier Parameter $A, B, C, D$ bezeichnet, welche wir bei der analytischen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt einführten. Es sind dieses spezielle Fälle derjenigen Gröfsen, welche wir weiterhin mit $A, B, C, D$ bezeichnen werden. Um zu letzteren zu gelangen, machen wir folgende Überlegung:

Wir betrachten *eine Operation, welche sich aus einer Drehung um O und einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum O zusammensetzt.* Die Drehung ist durch die Richtung der Drehungsaxe und die Gröfse des Drehungswinkels bestimmt und möge wie früher (vgl. pag. 36) durch die Winkel $a, b, c$ und $\frac{\omega}{2}$ charakterisiert werden; der Ähnlichkeitstransformation kommt ein gewisses Vergröfserungsverhältnis zu, welches wir mit $T$ bezeichnen wollen. Für die so entstehende zusammengesetzte Operation schlagen wir den abkürzenden Ausdruck *Drehstreckung* vor. Durch unsere Drehstreckung wird jeder Punkt $XYZ$ in einen Punkt $xyz$ übergeführt. Die Beziehung zwischen den Koordinaten beider Punkte ist ganz ähnlich wie im Falle der reinen Drehung. Wir haben, nachdem wir aus $XYZ$ durch die *Drehung* einen Punkt $x'y'z'$ erhalten haben, nur noch die Koordinaten des letzteren mit dem Vergröfserungsverhältnisse $T$ zu multiplizieren, um zu dem Punkte $xyz$ zu gelangen, welcher das Resultat der *Drehstreckung* darstellt. Infolgedessen würde in dem Drehungsschema von pag. 22 zu jedem Koeffizienten der Faktor $T$ hinzuzufügen sein. Wir können aber auch jenes Schema direkt als Ausdruck der Drehstreckung ansehen, wenn wir die Bedeutung der Parameter $A, B, C, D$ ein wenig gegen früher abändern. *Wir definieren nämlich* (im Gegensatz zu den Gl. 14 von pag. 38) *die $A, B, C, D$ jetzt durch die folgenden Ausdrücke:*

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
A &= \sqrt{T}\sin\frac{\omega}{2}\cos a,\\
B &= \sqrt{T}\sin\frac{\omega}{2}\cos b,\\
C &= \sqrt{T}\sin\frac{\omega}{2}\cos c,\\
D &= \sqrt{T}\cos\frac{\omega}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Transformationsformeln der Drehstreckung sind daraufhin in dem mit dem früher angeschriebenen identischen Schema enthalten:

(2)

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $D^2+A^2-B^2-C^2$ | $2(AB-CD)$ | $2(AC+BD)$ |
| $y$ | $2(AB+CD)$ | $D^2-A^2+B^2-C^2$ | $2(BC-AD)$ |
| $z$ | $2(AC-BD)$ | $2(BC+AD)$ | $D^2-A^2-B^2+C^2$ |

Der Unterschied zwischen der jetzigen und der früheren Definition der $A, B, C, D$ besteht darin, dafs diese Gröfsen jetzt *frei veränderliche Parameter* sind, während sie früher durch die Relation von pag. 21

$$A^2+B^2+C^2+D^2=1 \tag{3}$$

verbunden waren. Wir können sagen: *Zu jedem beliebig vorgegebenen Wertsystem $A, B, C, D$ gehört jetzt eine bestimmte Drehstreckung.* Den Definitionsgleichungen (1) zufolge berechnen wir nämlich aus den absoluten Werten der $A, B, C, D$ das Vergröfserungsverhältnis der Drehstreckung zu

$$A^2+B^2+C^2+D^2=T, \tag{4}$$

während sich aus den Verhältnissen $A:B:C:D$ Axe und Drehungswinkel der Drehstreckung eindeutig ergeben.

*Umgekehrt gehört auch zu jeder Drehstreckung ein ganz bestimmtes Parametersystem $A, B, C, D$,* vorausgesetzt, dafs wir uns den Drehungswinkel $\omega$ nicht nur schlechtweg, d. h. modulo $2\pi$ gegeben denken, sondern dafs wir, wie oben verabredet, auch $\frac{\omega}{2}$ in bestimmter Weise modulo $2\pi$ festlegen.

Wir fragen sodann nach den Formeln für die *Zusammensetzung zweier Drehstreckungen.* Sei eine erste Drehstreckung durch die Parameter $A, B, C, D$, eine zweite durch $A', B', C', D'$ gegeben. Das Resultat beider werde mit $A'', B'', C'', D''$ bezeichnet. Offenbar bekommen wir die resultierende Drehstreckung, indem wir die zugehörigen Drehungen einerseits, die Streckungen andrerseits einzeln zusammensetzen. Die Formeln für die Zusammensetzung zweier Drehungen haben wir pag. 33 in den Quaternionengröfsen angeschrieben. Die Zusammensetzung zweier Streckungen geschieht nach der einfachen Formel

$$T''=TT'.$$

Mithin lauten die Zusammensetzungsformeln für Drehstreckungen bei der neuen Bedeutung der Parameter $A, B, C, D$ formal genau ebenso wie die für Drehungen. Wir haben:

$$(5)\quad \begin{cases} A'' = \phantom{-}AD' + BC' - CB' + DA', \\ B'' = -AC' + BD' + CA' + DB', \\ C'' = \phantom{-}AB' - BA' + CD' + DC', \\ D'' = \phantom{-}DD' - AA' - BB' - CC'. \end{cases}$$

Wir betrachten nun die vorangehenden Formeln im Lichte der Quaternionentheorie. Als ursprüngliche Definition des Wortes Quaternion legen wir unsern Begriff der Drehstreckung zu Grunde: *Eine Quaternion bedeutet nichts anderes als die Operation der Drehstreckung.* Sie ist eindeutig bestimmt durch die Gröfse der Streckung ($T$), durch die Axe der Drehung ($a$, $b$, $c$) und die Gröfse des *halben* Drehungswinkels $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Der Quaternion kommen hiernach vier „Komponenten“ $A$, $B$, $C$, $D$ zu. Um letztere auch äufserlich als etwas Zusammengehöriges erscheinen zu lassen, fassen wir sie mittelst „dreier imaginärer Einheiten“ $i$, $j$ und $k$ in einen symbolischen Ausdruck zusammen. Wir schreiben hiernach die Quaternion als eine „viergliedrige komplexe Zahl“ folgendermafsen:

$$(6)\qquad Q = iA + jB + kC + D.$$

Die Einführung der imaginären Einheiten $i$, $j$, $k$ ist von unserem Standpunkte aus natürlich etwas rein konventionelles; sie dient lediglich dazu, die Parameter $A$, $B$, $C$, $D$ gewissermafsen als benannte Gröfsen erscheinen zu lassen. Bei ihrer ursprünglichen Einführung durch Hamilton lag die Sache anders. Hamilton ging darauf aus, die gewöhnlichen komplexen Zahlen zu verallgemeinern. Deshalb war für ihn die obige Schreibweise etwas wesentlicheres.

Wir erwähnen zunächst einige Kunstausdrücke. Die Gröfse $T$ bezeichnet man nach Hamilton als den *Tensor der Quaternion.* Hiernach können wir sagen: *Eine gewöhnliche Drehung ist eine Einheitsquaternion* (d. h. eine *Quaternion von dem Tensor* 1).

Ferner bezeichnen wir den unbenannten Term $D$ in dem Ausdrucke (6) als den *skalaren Teil der Quaternion.* Dem Terme $D$ kommt nämlich eine gewisse numerische Gröfse $\sqrt{T}\cos\frac{\omega}{2}$ zu, welche sich durch Messung auf irgend welcher Skala festlegen läfst und keine besondere Orientierung im Raume besitzt. Sodann heifst der benannte Term $iA + jB + kC$ der *vektorielle Teil der Quaternion.* Dieser Term hat nämlich den Charakter eines Vektors, da ihm gleichzeitig eine gewisse Axe (gegeben durch die Winkel $a$, $b$, $c$) und eine gewisse Gröfse (gegeben durch das Produkt $\sqrt{T}\sin\frac{\omega}{2}$) zukommt.

Betrachten wir noch speziell eine Quaternion, welche sich auf ihren vektoriellen Teil reduziert. Es ist dieses nach den Gleichungen

(1) eine Drehstreckung von dem Drehungswinkel $\omega = \pi$; sie besteht aus einer Streckung und einer Umklappung des Raumes um die Axe $a, b, c$. Wir wollen dafür das Wort *Wendestreckung* benutzen. Andrerseits besitzt eine solche Quaternion durchaus den Charakter eines Vektors; ihre Komponenten $A$, $B$, $C$ sind direkt die Komponenten einer auf der Axe $a$, $b$, $c$ aufgetragenen Strecke von der Länge $\sqrt{T}$. Wir können also sagen: *Vektoren treten in der Quaternionentheorie als Wendestreckungen auf.*

Einen Vektor ($V$) liefert uns z. B. die Verbindung eines beliebigen Punktes ($XYZ$) mit dem Anfangspunkte $O$. Als Wendestreckung aufgefafst können wir ihn so darstellen:

(7) $$V = iX + jY + kZ. —$$

Bei der Einführung der Quaternionenbezeichnung besteht nun weiterhin die Absicht, mit den symbolischen Ausdrücken von der Form (6) Rechnungen vorzunehmen, ähnlich wie mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen. Vorbedingung hierzu ist, dafs man Regeln für das Rechnen mit Quaternionen festsetzt. An sich könnten solche Regeln natürlich willkürlich angenommen werden. Indessen wird man zweckmässigerweise darauf ausgehen, den Quaternionenkalkul so einzurichten, dafs er sonst übliche Operationen umfafst.

Wir definieren in diesem Sinne zunächst die *Addition der Quaternionen*, die für uns allerdings nur beiläufig in Betracht kommt. Dabei lassen wir uns von dem Prinzipe leiten, dafs die Addition der Quaternionen in dem speziellen Falle der Wendestreckungen mit der gewöhnlichen Addition der Vektoren, d. h. mit der Parallelogrammkonstruktion zusammenfällt. Alsdann liegt folgende Festsetzung nahe:

*Man addiert zwei Quaternionen, indem man die skalaren Teile einerseits, die vektoriellen andrerseits für sich addiert, erstere im gewöhnlichen algebraischen Sinne, letztere nach der Regel der geometrischen Addition.*

Ist also neben $Q$ (s. Gl. (6)) eine zweite Quaternion

$$Q' = iA' + jB' + kC' + D'$$

gegeben, so bedeutet ihre Summe $Q''$ die folgende Quaternion

$$Q'' = Q + Q' = i(A + A') + j(B + B') + k(C + C') + (D + D').$$

Dies Verfahren kann übrigens auch als Verallgemeinerung der Addition der gemeinen zweigliedrigen komplexen Zahlen angesehen werden.

Sodann definieren wir ein Verfahren zur *Multiplikation der Quaternionen.* Das Prinzip, welches uns hierbei leiten wird, soll die geometrische Vorstellung der Drehstreckungen sein. Wir setzen fest:

*Man multipliziert zwei Quaternionen, indem man die zugehörigen Drehstreckungen nach den früheren Regeln zusammensetzt.*

Ist also $Q$ eine erste, $Q'$ eine zweite Quaternion, so soll ihr Produkt

$$Q'' = QQ'$$

zu Komponenten gerade diejenigen Gröfsen $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ haben, welche durch die Gleichungen (5) bestimmt werden. Da in diesen Gleichungen die Komponenten von $Q$ und $Q'$ in unsymmetrischer Weise vorkommen, so wird das Resultat der Multiplikation von der Reihenfolge der Faktoren abhängig sein. Daher der Satz:

*Die Multiplikation der Quaternionen ist keine kommutative Operation.*

Dieser Satz ist in unserer Auffassung ein unmittelbarer Ausflufs der mehrfach hervorgehobenen Thatsache, dafs bei endlichen Drehungen das Resultat mehrerer Drehungen von der Reihenfolge der Teildrehungen abhängt.

Wir können dem somit festgelegten Multiplikationsgesetze noch einen anderen bemerkenswerten Ausdruck geben. Führen wir nämlich das Produkt $QQ'$ rein formal aus, wie wenn es sich um die Multiplikation gewöhnlicher mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke handelt, so treten dabei Terme mit den Faktoren $i^2, ij, j^2, \ldots$ auf. Soll nun der so erhaltene Ausdruck mit dem obigen Produkte $Q''$ übereinstimmen, so müssen wir über die Bedeutung jener Faktoren folgendes festsetzen. *Es sei:*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{8}$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \tag{9}$$

*und*

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \tag{10}$$

Alsdann führt die formale Ausrechnung des Produktes $QQ'$ genau auf die Gleichungen (5) zurück*).

Bemerken wir noch, dafs die vorstehenden Gleichungen (9) und (10), welche übrigens nicht von einander unabhängig sind, die Nichtver-

*) Übrigens sind die Zusammensetzungsformeln (5) und also die Multiplikationsformeln der Quaternionen, wenigstens im Falle $T = 1$, im Prinzip schon vor Hamilton bekannt gewesen; sie decken sich mit den Formeln, welche Rodrigues in Liouville's Journal (1. sér.) V, 1841 für die Zusammensetzung der Drehungen angegeben hat. Um dies einzusehen, führe man statt der Quaternionenkomponenten selbst ihre Verhältnisse ein durch die Proportion

$$A : B : C : D = \lambda : \mu : \nu : 1.$$

Diese Gröfsen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ kommen zur Bezeichnung der einzelnen Drehung schon bei Euler vor; sie werden (im Gegensatz zu den $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$) als *Eulers symmetrische Drehungsparameter* bezeichnet. Schreibt man nun die Gleichungen (5) in die $\lambda$, $\mu$, $\nu$ um, indem man mit der letzten dieser Gleichungen in die vorangehenden hineindividiert, so ergeben sich die Formeln von Rodrigues.

tauschbarkeit der Faktoren eines Quaternionenproduktes von neuem in Evidenz setzen. Offenbar können wir die Einheiten $i$, $j$ und $k$ ihrerseits als spezielle Quaternionen auffassen und zwar geometrisch als Wendestreckungen vom Tensor 1, d. h. als Umklappungen bez. um die $x$, $y$ und $z$-Axe. Die Formeln (8), (9) und (10) ergeben sich dann leicht geometrisch, allerdings zunächst nur bis auf das Vorzeichen. Sie sagen nämlich einfach aus: Das Resultat zweier Umklappungen um dieselbe Axe ist die Identität; zwei Umklappungen um zwei zu einander rechtwinklige Axen ergeben eine Umklappung um das gemeinsame Lot der beiden Axen. Wünscht man auch das Vorzeichen richtig zu treffen, so mufs man nach pag. 36 u. ff. von der Betrachtung des ganzen zu der des halben Drehungswinkels übergehen. Alsdann erkennt man: Es wird $i^2 = -1$, weil es sich bei $i^2$ um eine volle Umdrehung handelt, deren halber Drehungswinkel modulo $2\pi$ gleich $\pi$ (und nicht gleich Null) ist. Übrigens erinnern die Formeln (8) an die Gleichung $i^2 = -1$ aus der Theorie der gewöhnlichen komplexen Zahlen. —

Etwas näher gehen wir speziell auf die Multiplikation der Wendestreckungen, d. h. auf *Vektorenprodukte* ein, deren Benutzung uns später gelegentlich gute Dienste leisten wird. Gegeben seien zwei Vektoren $v$ und $v'$ durch die Koordinaten ihrer Endpunkte $x, y, z$ bez. $x', y', z'$. Wir bilden dann

$$vv' = (ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz').$$

Die Multiplikationsregeln (8), (9) und (10) liefern als Resultat eine Quaternion, nämlich

$$vv' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') \\ - (xx' + yy' + zz').$$

Wir betrachten den skalaren und den vektoriellen Teil der so erhaltenen Quaternion einzeln. Den ersteren, negativ genommen, nennen wir das *skalare Produkt* der Vektoren $v$ und $v'$ (in Grassmanns Terminologie als „inneres Produkt“ zu bezeichnen); der letztere heifse das *vektorielle Produkt* (gleich Grassmanns „Ergänzung des äufseren Produkts“). Das skalare Produkt möge durch das Zeichen $(v\,v')$, das vektorielle durch $[v\,v']$ charakterisiert werden.

Skalares und vektorielles Produkt lassen sich so fassen, dafs sie eine von der Wahl des Koordinatensystems, in welchem wir $x, \ldots$ und $x', \ldots$ messen, unabhängige Bedeutung haben. Es folgt dieses sofort aus ihrer Einführung als Zusammensetzungsresultat der beiden Wendestreckungen; wir erkennen es aber auch auf Grund ihrer unmittelbaren geometrischen Bedeutung. *Das skalare Produkt ist nämlich*

*gleich dem Produkt aus der Länge von $v$ in die Projektion von $v'$ auf $v$*, wie unmittelbar aus der Formel

$$(11) \qquad (v, v') = xx' + yy' + zz'$$

hervorgeht. *Das vektorielle Produkt ist selbst ein Vektor, welcher senkrecht auf $v$ und $v'$ nach derjenigen Seite hin errichtet ist, von der aus gesehen $v$ auf kürzestem Wege durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers in $v'$ übergeführt wird; die Länge dieses Vektors ist gleich dem Inhalte des aus $v$ und $v'$ zu konstruierenden Parallelogrammes.* Auch dieses wird man ohne Schwierigkeit auf Grund der Formel

$$(12) \qquad V(v, v') = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

verifizieren. —

Wir gehen ferner darauf aus, auch die Gleichungen (2) unter die formale Operation der Quaternionenmultiplikation einzubegreifen. In den Gleichungen (2), können wir sagen, werden zwei Vektoren

$$v = ix + jy + kz$$

und

$$V = iX + jY + kZ,$$

welche bez. durch Verbindung des Punktes $x, y, z$ und $X, Y, Z$ mit $O$ entstehen, mittelst der Drehstreckung

$$Q = iA + jB + kC + D$$

zu einander in Beziehung gesetzt. Dabei nehmen wir in Übereinstimmung mit den den Gleichungen (2) zu Grunde liegenden Vorstellungen an, daſs die Richtung von $v$ zur Richtung von $V$ so liegt, daſs erstere in letztere durch die in $Q$ enthaltene Drehung übergeführt wird, und ferner, daſs die Länge von $V$ zur Länge von $v$ sich so verhält, daſs erstere in letztere durch die in $Q$ enthaltene Streckung übergeht. Ist also $T$ der Tensor von $Q$ und nehmen wir, was bequem ist und keine wesentliche Einschränkung bedeutet, die Länge von $V$ gleich 1 an, so wird die Länge von $v$ gleichfalls $T$ sein. Wir fassen nun im folgenden nicht nur $Q$, sondern auch $v$ und $V$ als *Operationen*, letztere natürlich als ***Wendestreckungen***, auf. Dann gelangen wir zu den Gleichungen (2) im Anschluſs an bekannte Vorstellungen der Gruppentheorie sehr elegant auf folgendem Wege:

Wir markieren uns die von $O$ auslaufenden Axen der Wendestreckungen $v$ und $V$ und der Drehstreckung $Q$. Das Objekt, auf welches die Operationen $v$, $V$ und $Q$ auszuüben sind, repräsentieren wir — ähnlich wie gegen Ende von § 3 — durch eine um $O$ gelegte Einheitskugel. In der Anfangslage möge sie mit $K$ bezeichnet werden. Auf dieses Objekt üben wir zwei Serien von Operationen aus, welche zu demselben Resultate führen werden.

1) Wir unterwerfen $K$ der Wendestreckung $v$, wobei $K$ einerseits um die Axe von $v$ umgeklappt und andrerseits im Verhältnisse von $T:1$ vergröfsert wird. Die so entstehende Kugel vom Radius $T$ nennen wir $(K)v$. Darauf machen wir die Vergröfserung der Kugel wieder rückgängig, indem wir auf $(K)v$ eine Ähnlichkeitstransformation $T^{-1}$ vom Vergröfserungsverhältnisse $1:T$ ausüben. So entsteht wiederum eine Einheitskugel, die wir mit $(K)v\,T^{-1}$ bezeichnen. Wir hätten übrigens $(K)v\,T^{-1}$ auch aus $K$ durch eine blofse Umklappung um die Richtung von $v$ erhalten können.

2) Andrerseits unterwerfen wir $K$ successive der Drehstreckung $Q$, der Wendestreckung $V$ und der „inversen Drehstreckung $Q^{-1}$". Unter letzterem Worte verstehen wir diejenige Operation, welche die Operation $Q$ gerade rückgängig macht. Diese Drehstreckung $Q^{-1}$ hat dieselbe Axe wie $Q$, bewirkt dieselbe Drehung, nur im umgekehrten Sinne, und die reciproke Streckung $\frac{1}{T}$. Insbesondere führt sie die Richtung von $V$ in die von $v$ über.

Durch die Drehstreckung $Q$ geht nun $K$ zunächst in eine Kugel $(K)Q$ vom Radius $T$ über, wobei insbesondere diejenigen Punkte, welche ursprünglich auf der Axe von $v$ lagen, in die Axe von $V$ zu liegen kommen. Sodann nehmen wir die Wendestreckung $V$ vor. Hierdurch wird $(K)Q$ in eine Kugel $(K)QV$ verwandelt, welche gegen $(K)Q$ um die Axe von $V$ durch zwei Rechte verdreht ist und denselben Radius wie $(K)Q$ besitzt. Endlich fügen wir die Drehstreckung $Q^{-1}$ hinzu. Diese Operation möge der Deutlichkeit halber sowohl auf $(K)QV$ wie auf $(K)Q$ angewandt werden. Dabei entstehen aus $(K)QV$ bez. $(K)Q$ zwei Einheitskugeln, welche bez. $(K)QVQ^{-1}$ und $(K)QQ^{-1}$ heifsen mögen. Offenbar ist $(K)QQ^{-1}$ mit der Ausgangskugel $K$ identisch. Wir behaupten aber ferner, dafs $(K)QVQ^{-1}$ mit unserer früheren Kugel $(K)v\,T^{-1}$ nach Gröfse und Lage übereinstimmt. In der That: durch die Operation $Q^{-1}$ wird die gegenseitige Lage der vorher mit $(K)Q$ und $(K)QV$ bezeichneten Kugeln nicht geändert. Wenn also $(K)Q$ in $K$ übergeht, verwandelt sich $(K)QV$ in eine Kugel, welche aus $K$ durch eine Umklappung um diejenige Axe entsteht, in welche die Axe $V$ durch die Operation $Q^{-1}$ übergeht, d. h. durch eine Umklappung um die Axe von $v$.

Durch dieselbe Umklappung haben wir aber vorher $(K)v\,T^{-1}$ aus $K$ erzeugt. Die unter 1) und 2) genannten Operationen führen also wirklich zu demselben Resultat d. h. sie geben, zusammengesetzt, dieselbe Drehungsaxe und denselben Drehungswinkel. Letzterer ist dabei zunächst nur modulo $2\pi$ bestimmt. Um zu sehen, dafs der Drehungs-

winkel auch modulo $4\pi$ derselbe ist, machen wir eine kleine Kontinuitätsbetrachtung. Wir lassen nämlich den zur Quaternion $Q$ gehörigen Winkel $\frac{\omega}{2}$ von Null bis zu seinem definitiven Werte wachsen. Sicherlich geben im Falle $\frac{\omega}{2} = 0$ unsere Operationen 1) und 2) modulo $4\pi$ denselben Drehungswinkel. In Folge dessen wird das Gleiche auch bei stetiger Zunahme von $\frac{\omega}{2}$ stattfinden. Diese Kontinuitätsbetrachtung ist deshalb nötig, weil wir sonst in den folgenden Formeln unbestimmte Vorzeichen haben würden.

Die Gleichheit der Operationen 1) und 2) drücken wir durch die symbolische Gleichung aus:

$$(K)v\,T^{-1} = (K)\,Q\,V Q^{-1},$$

oder, indem wir von dem Objekte $K$ absehen und nurmehr auf die Operationen achten:

$$vT^{-1} = QVQ^{-1}. \text{ —} \tag{13}$$

Bemerken wir noch, dafs die beiden Operationen $v\,T^{-1}$ und $V$ denselben Tensor (1) und denselben Drehungswinkel ($\pi$) besitzen, und dafs sich unsere Überlegung auf irgend zwei Drehstreckungen von übereinstimmendem Tensor und Drehungswinkel ausdehnen läfst, deren Axen mittelst $Q$ in einander übergeführt werden. —

Die Gleichung (13) kann nun ihrer Ableitung nach nichts anderes aussagen, wie die Gleichungen (2); sie mufs den Zusammenhang zwischen den Komponenten $x$, $y$, $z$ und $X$, $Y$, $Z$ von $v$ und $V$ aussprechen. In der That wird man, wenn man sich die Mühe nehmen will, die Quaternionenprodukte rechts wirklich auszurechnen, und wenn man die Faktoren von $i$, $j$ und $k$ rechts und links einander einzeln gleichsetzt, zu den Gleichungen (2) zurückgeführt*). Die Umrechnung ist aber ziemlich umständlich. Wir wollen daher folgenden einfacheren und überdies instruktiveren Weg einschlagen.

Wir fügen in (13) rechts und links die Operation $Q$ hinzu, wodurch nichts geändert wird. So erhalten wir

$$v\,T^{-1}Q = Q\,V. \tag{14}$$

Jetzt berechnen wir mit Rücksicht auf (9), (10) und (11):

$$\begin{aligned} QV &= (iA + jB + kC + D)(iX + jY + kZ) \\ &= i(DX - CY + BZ) + j(CX + DY - AZ) + k(-BX + AY + DZ) \\ &\quad - (AX + BY + CZ). \end{aligned}$$

*) Dies bemerkt Cayley Philos. Magazin, Bd. 26, 1845; vgl. Ges. W. Bd. 1, pag. 123; Gl. (13) tritt kurz vorher schon bei Hamilton auf: Proc. Irish Academy, 11. Nov. 1844.

Ebenso ergiebt sich:

$$vQ = (ix + jy + kz)(iA + jB + kC + D)$$
$$= i(Dx + Cy - Bz) + j(-Cx + Dy + Az) + k(Bx - Ay + Dz)$$
$$- (Ax + By + Cz).$$

Die Gleichung (14) zerlegt sich daher in folgende vier Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{T}(\ \ Dx + Cy - Bz) = \ \ DX - CY + BZ, \\ \frac{1}{T}(-Cx + Dy + Az) = \ \ CX + DY - AZ, \\ \frac{1}{T}(\ \ Bx - Ay + Dz) = -BX + AY + DZ, \\ \frac{1}{T}(\ \ Ax + By + Cz) = \ \ AX + BY + CZ. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besitzen eine merkwürdige Struktur; in den drei ersten bilden nämlich die Koeffizienten auf der rechten und linken Seite je eine schiefe Determinante, wobei noch die Horizontalreihen der einen mit den Vertikalreihen der anderen Determinante übereinstimmen.

Es ist nun ein Leichtes, von den Gleichungen (15) zu den im Schema (2) enthaltenen Gleichungen zu gelangen. Wir lösen die Gleichungen (15) beispielsweise nach $x$ auf, indem wir sie der Reihe nach mit $D$, $-C$, $B$, $A$ multiplizieren und addieren; der Koeffizient von $x$ wird dabei

$$\frac{1}{T}(D^2 + C^2 + B^2 + A^2) = 1,$$

während die Koeffizienten von $y$ und $z$ gleich Null werden; wir erhalten schliefslich:

$$x = (D^2 - C^2 - B^2 + A^2)X + 2(AB - CD)Y + 2(BD + AC)Z.$$

Dies ist aber eine der in (2) enthaltenen Gleichungen. In entsprechender Weise findet man die übrigen. Wir können also sagen:

*Die Transformationsgleichungen* (2) *sind vom Standpunkte der Quaternionentheorie nur eine andere Schreibweise der selbstverständlichen Relation* (13).

Wie man sieht, führt unsere geometrische Definition der Drehstreckungen zu einer vollkommen klaren begrifflichen Auffassung des Quaternionenkalkuls. Sie hat überdies den Vorteil, das *Anwendungsgebiet der Quaternionen* klar zu umgrenzen. Ähnlich wie in der letzten Betrachtung, werden die Quaternionen dann am Platze sein, wenn man für die Zusammensetzung von Drehungen und Streckungen einen handlichen Algorithmus zu haben wünscht. Wir können diese Operationen als Operationen der sog. „Hauptgruppe“ der Geometrie zusammenfassen;

sie sind dadurch ausgezeichnet, daſs sie die Eigenschaften der geometrischen Figuren nur in unwesentlicher Weise, d. h. nur ihrer Gröſse und ihrem Maſsstabe nach, verändern. Darüber hinaus werden wir aber der Quaternionentheorie eine allgemeinere Bedeutung für die Mathematik nicht beimessen können, im Gegensatz zu vielen Vertretern der Theorie, welche in den Quaternionen ein für Funktionentheorie und Algebra ebenso fundamentales Hülfsmittel erblicken möchten, wie in den gewöhnlichen komplexen Zahlen. Überhaupt scheint uns der eigentliche *Quaternionenkalkul* (bei welchem Additionen und Multiplikationen von Quaternionen in beliebiger Mannigfaltigkeit mit einander verbunden werden) von nur sekundärem Interesse zu sein.

Übrigens soll mit den vorstehenden Bemerkungen nicht gesagt sein, daſs für unser Kreiselproblem, bei dem es sich ja wesentlich um die Zusammensetzung von Drehungen handelt, die Quaternionen die geeignetsten Drehungsparameter liefern. Thatsächlich besitzen für uns die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in analytischer, die Eulerschen Winkel $\varphi, \psi, \vartheta$ in geometrischer Hinsicht den Vorzug gröſserer Einfachheit. Wenn wir also keinen Grund haben werden, in den folgenden Kapiteln auf die Quaternionenrechnung zurückzukommen, so werden wir uns dagegen der Vektoranalysis mehrfach mit Vorteil bedienen. Die Addition der Vektoren hat auf Grund des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte in der Mechanik ihre naturgemäſse Stelle. Auch die Multiplikation der Vektoren ist gerade den Fundamentaloperationen der Mechanik angepaſst. Ist doch die Arbeit ein skalares Produkt und das Moment ein vektorielles Produkt.

Wie schon eingangs erwähnt, kommt unsere geometrische Definition der Quaternionen in den gewöhnlichen Darstellungen bei Hamilton und seinen Nachfolgern nicht genügend zur Geltung. Hamilton definiert vielmehr eine Quaternion als *„den Quotienten zweier Vektoren“*. Als Grundlage einer Theorie ist diese Definition kaum zweckmäſsig; denn der Ausdruck „Quotient zweier Vektoren“ bedarf seinerseits erst der Erklärung und verweist uns, falls eine solche nicht gegeben wird, lediglich auf eine unklare Analogie mit den Rechnungsregeln der gewöhnlichen Algebra. Die Bezeichnung läſst sich natürlich theoretisch rechtfertigen und hat dann sogar gewisse sogleich zu erwähnende Vorzüge; aber es scheint nicht geeignet, mit ihr zu beginnen.

Um mit der Hamiltonschen Definition einen präzisen Sinn verbinden zu können, werden wir im Anschluſs an Gl. (13) folgendermaſsen verfahren:

Wir machen uns zunächst klar, daſs eine Drehstreckung $Q$ mit einer Wendestreckung $V$ zusammengesetzt, deren Axe zur Axe von $Q$

senkrecht steht, dasselbe Resultat ergiebt, wie die Aufeinanderfolge der Wendestreckung $V$ und der inversen Drehstreckung $Q^{-1}$ verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation vom Vergröfserungsverhältnisse $T^2$, wo $T$ der Tensor von $Q$ ist. In Zeichen bedeutet dieses

$$QV = VQ^{-1}T^2. \tag{16}$$

Hierbei möge, ebenso wie pag. 62, $V$ der Kürze halber einen Einheitsvektor, d. h. eine einfache Umklappung bedeuten. Den Beweis der Gleichung (16) wird man ähnlich wie den von (13) geometrisch erbringen können, indem man die successiven Veränderungen einer Einheitskugel $K$ betrachtet. Ihre Richtigkeit wollen wir hier auf Grund des Quaternionenmultiplikationsgesetzes nachrechnen. Zu dem Zwecke legen wir die $x$-Axe in die Axe der Wendestreckung $V$, so dafs $V$ einfach gleich $i$ wird. Gleichzeitig mufs dann die erste Komponente von $Q$ verschwinden, weil die Axe von $Q$ nach Voraussetzung auf der von $V$ senkrecht steht. Wir haben also

$$V = i, \quad Q = jB + kC + D.$$

Um die inverse Quaternion $Q^{-1}$ zu finden, haben wir nach pag. 63 den Winkel $\frac{\omega}{2}$ von $Q$ in $-\frac{\omega}{2}$, den Tensor $T$ in $\frac{1}{T}$ zu verwandeln und die Axe ungeändert zu lassen. In Folge dessen wird

$$Q^{-1} = \frac{1}{T^2}(-jB - kC + D).$$

Die Gleichung (16) geht daher in die folgende Gleichung über

$$(jB + kC + D)i = i(-jB - kC + D),$$

welche nach (8), (9) und (10) identisch erfüllt ist.

Sodann tragen wir den Wert von $VQ^{-1}$ aus (16) in (13) ein. So ergiebt sich

$$Tv = Q^2 V$$

oder

$$Q^2 = T\frac{v}{V}. \tag{17}$$

Da wir annehmen, dafs $V$ zur Axe von $Q$ senkrecht steht, mufs auch der Vektor $v$, welcher ja durch die Drehstreckung $Q$ aus $V$ hervorgeht, senkrecht zur Axe von $Q$ liegen. Wir bezeichnen noch das Produkt $Tv$ mit $v'$; dann hat $v'$ die Länge $T^2$, wenn, wie wir voraussetzen, $V$ die Länge 1 besitzt. Ferner fassen wir $Q^2$ als eine neue Quaternion $Q'$ auf; $Q'$ hat dann offenbar dieselbe Axe wie $Q$, den doppelten Drehungswinkel und das Quadrat des Tensors von $Q$. Die Gleichung (17) geht daraufhin über in folgende:

$$Q' = \frac{v'}{V}. \tag{18}$$

In Worte gefaſst liefert diese Gleichung die Hamiltonsche Definition der Quaternionen. Wir können sagen:

*Die Quaternion $Q'$ wird in Gleichung* (18) *dargestellt als Quotient zweier Vektoren $v'$ und $V$, welche senkrecht zur Axe von $Q'$ gerichtet sind, welche mit einander einen Winkel bilden, der gleich der Hälfte des Drehungswinkels von $Q'$ ist, und deren Länge sich verhält wie der Tensor von $Q'$ zur Einheit.*

---

## Kapitel II.

## Einführung in die Kinetik (Statik und Impulstheorie).

### § 1. Gegensatz zwischen kontinuierlich wirkenden Kräften und Stofskräften; der Impuls beim einzelnen freien Massenpunkte.

Während wir in dem vorangehenden kinematischen Kapitel von den Prinzipien der Mechanik an keiner Stelle zu sprechen Gelegenheit hatten, werden wir diese bei den nun folgenden kinetischen Betrachtungen in irgend einer Form heranzuziehen haben. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen.

Die ursprüngliche Fassung der mechanischen Prinzipien bei Newton setzt den *Begriff der Kraft* als etwas unmittelbar Gegebenes und Verständliches voraus. Neuere Darstellungen suchen diesen Begriff vielfach aus den Grundlagen zu eliminieren und führen ihn erst nachträglich als eine bequeme abkürzende Bezeichnung in die Mechanik ein. Die Zweckmäfsigkeit des einen oder anderen Verfahrens hängt wesentlich von dem Ziele ab, welches man verfolgt. Geht man, wie Hertz in seinem schönen Werk über die „Prinzipien der Mechanik“ lediglich darauf aus, ein in sich folgerichtiges, begriffliches System aufzustellen, so kann man den Kraftbegriff wohl entbehren. Will man aber, wie es in dieser Vorlesung unsere Absicht ist, ein lebendiges Erfassen der mechanischen Erscheinungen und eine schnelle Orientierung in speziellen Fragen erreichen, so scheint der Kraftbegriff schon aus psychologischen Gründen besonders wertvoll; er knüpft nämlich unmittelbar an die Thätigkeit des Menschen an, welcher in seinen Muskeln die Möglichkeit der Arbeitsleistung hat. Eine solche Arbeitsleistung ist für unsere Empfindung mit dem Gefühl der *Anstrengung* verbunden. Unwillkürlich übertragen wir diese Empfindung auch auf äufsere Bewegungsvorgänge. In dieser anthropomorphen Auffassung der äufseren Geschehnisse liegt ohne Zweifel die Wurzel des Kraftbegriffs. Wir werden denselben darum nicht zurückdrängen, sondern gerade unter diesem Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken.

Ob auf einen Massenpunkt, der irgendwie im Raume fest gedacht werde, in einer gewissen Richtung eine Kraft wirkt, konstatieren wir, indem wir ihn in der entgegengesetzten Richtung ein wenig verschieben. Haben wir dabei eine Arbeit zu leisten (unsere Muskeln anzuspannen), so ist eine Kraft vorhanden; im anderen Falle ist der Punkt in der betr. Richtung kräftefrei. Dasselbe Verfahren kann auch zur Messung der Kraft dienen: *Wir messen eine auf einen Punkt in einer bestimmten Richtung wirkende Kraft durch das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche wir bei einer Verschiebung des Punktes in der entgegengesetzten Richtung zu leisten haben, zu dieser Verschiebung* $\left(P = \frac{A}{l}\right)$. Ist über die Einheit der Länge und der Arbeit verfügt worden, so ist hiernach auch die Einheit der Kraft bestimmt.

*Die Einheit der Länge* haben wir schon pag. 11 definiert, indem wir das „absolute Maſssystem" acceptierten. *Die Einheit der Arbeit* definiert man in diesem Maſssystem bekanntlich dadurch, daſs man zunächst *die Einheit der Masse* als die eines Grammes festsetzt und sich übrigens auf die Erfahrungen beruft, die man mit frei fallenden Körpern gemacht hat (die sog. Fallgesetze). Alsdann bestimmt man etwa: Die Arbeitseinheit ist der 980, 60$^{\text{te}}$ Teil derjenigen Arbeit, welche man beim Heben eines Grammes um einen Centimeter unter dem 45$^{\text{ten}}$ Breitengrade zu leisten hat. Die Arbeit erhält hier die Dimension $\frac{m l^2}{t^2}$, die Kraft $\frac{m l}{t^2}$. Allerdings werden wir diese Definition der Arbeitseinheit von dem obigen psychologischen Standpunkte aus für ziemlich indirekt erklären müssen. Da nämlich Kräfte und Arbeiten unmittelbarer in unsere Wahrnehmung fallen, als Massen, so könnten wir verlangen, die Arbeitseinheit vor der Masseneinheit festzulegen, und könnten die Einführung eines allgemeinen Maſssystems befürworten, (welches übrigens auch von anderer Seite gelegentlich vorgeschlagen ist) in dem neben Raum und Zeit als dritte Grunddimension die Arbeit benutzt wird. Ob sich ein solches Maſssystem praktisch empfehlen würde, lassen wir hier völlig dahingestellt.

Des Weiteren unterscheidet man von altersher zwei Arten von Kräften: *kontinuierlich wirkende Kräfte* und *Stoſs-* oder *Momentankräfte*. Die soeben gegebene Regel für die Messung einer Kraft bezog sich, wie wir ausdrücklich hervorheben müssen, auf kontinuierlich wirkende Kräfte. Um die Messung der Stoſskräfte hieran anzuschlieſsen, sagen wir: *eine Stoſskraft ist äquivalent mit einer auſserordentlich groſsen kontinuierlichen Kraft, welche nur eine auſserordentlich kurze Zeit hindurch wirksam ist.*

Die Gröfse der Stofskraft bemessen wir daraufhin durch das *Produkt der Gröfse jener kontinuierlich wirkenden Kraft in die Länge des Wirkungsintervalles* $\left([P]=\frac{ml}{t}\right)$.

Wir erinnern nun kurz an diejenigen Erfahrungsthatsachen (oder Axiome), welche die Statik der Kräfte (und zwar der kontinuierlichen wie der Stofskräfte) beim einzelnen Massenpunkte ausmachen. Man kann diese in die eine Aussage zusammenfassen:

*Das allgemeinste Kraftsystem hat beim einzelnen frei beweglichen Massenpunkte den Charakter eines von dem Punkte auslaufenden Vektors.*

In diese Aussage begreifen wir sowohl den Satz vom Parallelogramm der Kräfte wie die Zerlegung der Kraft in Komponenten ein, ebenso die algebraische Addition der zugehörigen Arbeitsbeträge.

Die Vektorvorstellung einer Kraft ist uns so geläufig, dafs wir leicht unser Axiom für selbstverständlich halten und seine Tragweite unterschätzen könnten. Es ist daher vielleicht nicht überflüssig auf die unmittelbarsten Konsequenzen unseres Axioms einzugehen. Der Kraft kommt, ebenso wie dem Vektor, eine gewisse Gröfse und eine ausgezeichnete Richtung zu. Stellen wir uns nun einen Massenpunkt vor, der von beliebigen äufseren Kräften angegriffen werden möge. Die Richtung der resultierenden Kraft ist derjenigen Richtung entgegengesetzt, in welcher wir bei einer Verschiebung die maximale Arbeit zu leisten haben. Verschieben wir andrerseits den Punkt in einer von dieser ausgezeichneten abweichenden Richtung, so ist nach unserem Grundsatz die hierbei zu leistende Arbeit gleich der vorherigen maximalen Arbeitsleistung multipliziert in den Cosinus des Winkels, welchen die jetzige mit der früheren Verschiebung einschliefst. Insbesondere werden wir, so oft wir bei einer bestimmten Verschiebung eine gewisse Arbeit zu leisten haben, bei der entgegengesetzten Verschiebung dieselbe Arbeitsgröfse gewinnen.

Wir erinnern sodann an diejenigen Axiome, welche der Kinetik des einzelnen Massenpunktes zu Grunde liegen. Sie lauten bekanntlich: *Eine kontinuierlich wirkende Kraft ruft eine Beschleunigung des Punktes hervor, deren Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt und deren Gröfse, multipliziert in die Masse des Punktes, (bei Benutzung des einmal angenommenen absoluten Mafssystems) gleich ist der Gröfse der Kraft;* ferner: *Eine Momentankraft ruft eine momentane Geschwindigkeitsänderung hervor, deren Richtung mit der Richtung der Kraft übereinstimmt und deren Gröfse, multipliziert in die Masse des Punktes, gleich ist der Gröfse der Stofskraft.*

Da die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Punktes,

ebenso wie nach Obigem die Kraft, den Charakter eines Vektors hat, so folgt aus unserem die Gleichheit der Vektoren aussagenden Axiom sofort die Gleichheit ihrer Komponenten. Bedeutet also $X$ bez. $[X]$ die $x$-Komponente einer kontinuierlichen bez. einer Stofskraft, so haben wir:

(1) $$X = m \frac{d^2x}{dt^2} \text{ etc.,} \qquad (2) \quad [X] = m\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ etc.}$$

Hier soll $\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)$ schlechtweg die Änderung des $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ bezeichnen.

Im Übrigen lassen sich Stofskräfte auf kontinuierlich wirkende Kräfte zurückführen und umgekehrt, wie solches durch bekannte Beispiele aus der Physik dargethan wird. Z. B. denkt man sich in der kinetischen Gastheorie den kontinuierlich wirkenden Druck eines Gases gegen die Wand des Gefäfses durch das Anprallen der Gasmoleküle hervorgebracht. Man löst also den kontinuierlichen Druck in eine Reihe sehr kleiner und sehr schnell hintereinander erfolgender Einzelstöfse auf. Umgekehrt verfährt man in der Elastizitätstheorie, wenn man den Zusammenstofs zweier Kugeln näher verfolgen will. Dort ersetzt man die scheinbar momentane Stofskraft durch eine zwar sehr kurze aber doch kontinuierlich zu- und abnehmende Kraft, welche von der stofsenden zu der gestofsenen Kugel wirksam ist.

Man erkennt sofort, dafs die Gleichungen (1) und (2) bei der einen oder anderen Auffassung wechselweise in einander übergehen. Denken wir uns nämlich, wie in dem Beispiel der Gastheorie, eine Reihe von Einzelstöfsen $[X_1], [X_2], \ldots, [X_n]$ in dem sehr kleinen Zeitintervalle $\Delta t$ auf einander folgen, und nehmen wir an, dafs das Verhältnis $[X_i] : \Delta t$ bei abnehmendem $\Delta t$ einer endlichen Grenze $X$ zustrebt, so erhalten wir aus (2) durch Übergang zur Grenze $\Delta t = 0$ die Gleichung (1). Gehen wir andrerseits von einer kontinuierlich wirkenden Kraft $X$ aus, welche nur in dem Zeitintervalle $\Delta t$ eine von Null verschiedene, dann aber gleich sehr bedeutende Intensität besitzt, so zwar, dafs das „Zeitintegral"

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} X\, dt$$

einen endlichen Wert $[X]$ selbst dann noch behält, wenn wir $\Delta t$ zu Null abnehmen lassen, so erhalten wir aus (1) durch Integration nach $t$ die Gleichung (2).

Da hiernach Stofskräfte und kontinuierliche Kräfte in gewissem Sinne mathematisch äquivalent sind, wird es möglich sein, die Mechanik ebensowohl auf die einen wie auf die anderen zu begründen. Beide

Methoden entsprechen je einem besonderen naturphilosophischen Standpunkte: Wer der Meinung ist, dafs in der Natur keine unstetigen Übergänge vorkommen können, wird die kontinuierlichen Kräfte bevorzugen. Wer aber die Stetigkeit in der Natur nur für scheinbar und dadurch hervorgebracht hält, dafs unsere unvollkommenen Sinnesorgane uns ein undeutliches Bild der Welt liefern, wird überall auf Stofskräfte zurückgehen wollen*). Für den Mathematiker als solchen kommen derartige Fragen nicht in Betracht; dieser wird die Vorzüge beider Methoden nach ihrer gröfseren oder geringeren mathematischen Brauchbarkeit und Bequemlichkeit abschätzen.

Von diesem Gesichtspunkte aus können wir nicht umhin, der Methode der Stofskräfte bei der Einführung in die Mechanik im allgemeinen vor der jetzt gebräuchlicheren Methode der kontinuierlichen Kräfte den Vorzug zu geben. Wir werden von dieser Methode auch da Gebrauch machen, wo es sich garnicht um plötzlich oder schnell erfolgende Änderungen des Bewegungszustandes handelt. Damit nehmen wir nur eine Darstellungsweise wieder auf, die bei den eigentlichen Begründern der Mechanik allgemein üblich war.

Im Grunde übrigens handelt es sich dabei nur darum, die Bedeutung der mechanischen Differentialgleichungen oder der Differentialgleichungen überhaupt unabhängig von der Formel, nach ihrem inneren begrifflichen Inhalte zu erfassen.

Unser Vorhaben erläutern wir zunächst an dem Beispiel des einzelnen frei beweglichen Massenpunktes.

Wir betrachten unsern Punkt an irgend einer Stelle seiner Bahn und denken uns allemal *diejenige Stofskraft* hinzu, *welche im stande ist, den Punkt an Ort und Stelle aus dem Zustande der Ruhe momentan in den der gerade vorliegenden Bewegung überzuführen.* Dieselbe Stofskraft würde der Punkt, an der betr. Stelle in seiner Bewegung plötzlich gehemmt, gegen das Hindernis auszuüben im stande sein. Diese Stofskraft nennen wir den *Impuls des Punktes* und haben fortan gewissermafsen als erstes Interesse, nicht die Bewegung des Punktes sondern die Änderung seines Impulses zu verfolgen.

Auf Grund des allgemeinen statischen Axioms können wir sagen: *Beim einzelnen freien Massenpunkte ist der Impuls ein Vektor.*

Auf Grund der kinetischen Axiome können wir ferner Gröfse und Richtung dieses Vektors sofort angeben. Nach Gleichung (2) ist nämlich eine Stofskraft, welche die Geschwindigkeit 0 in die Ge-

*) Vgl. hierzu etwa L. Boltzmann: Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft, Berichte der Wiener Akademie 1896 sowie Wied. Ann. 1897.

schwindigkeit $v$ verwandelt, der Gröfse nach gleich $mv$; der Richtung nach fällt sie mit der Richtung $v$ zusammen. Wir werden also sagen:

*Beim einzelnen Massenpunkte ist die Gröfse des Impulses gleich der sog. Quantität der Bewegung; die Richtung des Impulses stimmt mit der jeweiligen Fortschreitungsrichtung überein.*

Mit Benutzung des so eingeführten Impulsbegriffes läfst sich die Bewegung des einzelnen Massenpunktes nunmehr besonders einfach schildern.

Wir haben zunächst den

Satz I. *Wenn keine Kräfte auf den Punkt einwirken, bleibt der Impuls nach Gröfse und Richtung im Raume konstant.* (Galileisches Trägheitsgesetz = Newtons lex prima).

Ist der Punkt dagegen äufseren Einwirkungen ausgesetzt, so können diese in momentanen Stöfsen $[P_i]$ oder in einer kontinuierlichen Kraft $P$ bestehen. Im ersteren Falle setzen sich die Stöfse $[P_i]$ mit dem schon vorhandenen Impuls nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Im zweiten Falle konstruieren wir denjenigen Einzelstofs, welcher während des einzelnen Zeitelementes $\Delta t$ der kontinuierlichen Kraft äquivalent ist; wir bilden also:

$$[P] = \int_t^{t+\Delta t} P \, . \, dt = P \, . \, \Delta t.$$

Dieser „unendlich kleine Stofs" setzt sich wieder mit dem schon vorhandenen Impulse nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen.

Wir formulieren daher den

Satz II. *Wenn äufsere Kräfte auf unseren Punkt einwirken, ändert sich der Impuls so, dafs seine Änderung nach Gröfse und Richtung in jedem Momente $\Delta t$ gleich dem während dieses Zeitmomentes von den äufseren Kräften hervorgerufenen (endlichen oder unendlich kleinen) Stofse ist* (Newtons lex secunda).

Diese fundamentalen Sätze übertragen sich, wie wir später sehen werden, wörtlich auf den Fall des Kreisels und mutatis mutandis auf beliebige mechanische Systeme. —

Wir fragen sodann nach *der Arbeit, welche der Impuls oder irgend eine kontinuierliche Kraft bei der Erzeugung des instantanen Bewegungszustandes zu leisten hat, d. h. nach derjenigen Arbeit, welche erforderlich ist, um den Punkt aus dem Zustande der Ruhe in den gerade vorhandenen Bewegungszustand überzuführen.* Dieselbe Arbeit vermag der Punkt umgekehrt abzugeben, wenn wir seine Bewegung plötzlich oder allmählich hemmen. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung unseres Arbeitsquantums als der *lebendigen Kraft des Punktes.*

Offenbar beträgt die Arbeit, welche eine *kontinuierliche Kraft* $(X, Y, Z)$ an dem Massenpunkte bei der Verrückung $(dx, dy, dz)$ leistet

(3) $$dA = X dx + Y dy + Z dz = (Xx' + Yy' + Zz')\,dt.$$

In der That ist diese Gleichung weiter nichts, als der analytische Ausdruck für unsere ursprüngliche Definition des Kraftbegriffes.

Hier tragen wir für $X, Y, Z$ die Werte aus Gleichung (1) ein, indem wir uns vorstellen, dafs $(X, Y, Z)$ diejenige Kraft ist, welche die faktische Bewegung des Punktes von der Ruhe beginnend erzeugt hat. Dann lautet das Arbeitselement:

$$dA = m(x''x' + y''y' + z''z')\,dt.$$

Die Gesamtarbeit, welche eben die lebendige Kraft des Punktes ausmacht, folgt hieraus durch Integration nach der Zeit; wir erhalten so die genugsam bekannte Formel:

(4) $$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Die lebendige Kraft des Punktes ist hiernach durch den jeweiligen Bewegungszustand des Punktes allein bestimmt; sie ist unabhängig davon, wie wir uns diesen Zustand entstanden denken, in welcher Weise wir also $x', y', z'$ bez. $X, Y, Z$ während der Erzeugung der Bewegung variieren lassen. Sie gilt daher insbesondere auch, wenn wir uns die Bewegung instantan durch den Impuls erzeugt denken, was wir jetzt thun wollen.

Nehmen wir unter dieser speziellen Voraussetzung die Berechnung der lebendigen Kraft noch einmal vor, so wird die Sache besonders anschaulich. Wir können uns zu dem Zwecke zunächst vorstellen, dafs eine Kraft $(X, Y, Z)$ von konstantem sehr grofsen Betrage während eines sehr kleinen Intervalles $\Delta t$ wirksam ist, so dafs die Geschwindigkeit $(x', y', z')$ während dieses Intervalles *gleichmäfsig* anwächst. Aus unserem obigen Ausdruck für die Arbeit ergiebt sich dann, wenn wir die Wirkungsdauer der Kraft mit $\Delta t$ bezeichnen:

$$T = \int_0^{\Delta t} dA = X\int_0^{\Delta t} x'\,dt + Y\int_0^{\Delta t} y'\,dt + Z\int_0^{\Delta t} z'\,dt.$$

Zu Anfang des Intervalles $\Delta t$ ist die Geschwindigkeit des Punktes gleich Null, zum Schlufs ist sie $(x', y', z')$ geworden. Da sie überdies von ihrem Anfangs- zu ihrem Endwerte gleichmäfsig anwächst, so bekommen die vorstehenden Zeitintegrale der rechten Seite bez. die Werte $\frac{1}{2}x'\Delta t,\ \frac{1}{2}y'\Delta t,\ \frac{1}{2}z'\Delta t.$ Wir haben also:

$$T = \frac{1}{2}(Xx' + Yy' + Zz')\,\Delta t.$$

Nunmehr lassen wir $\Delta t$ gegen Null abnehmen. Dann gehen die Produkte $X\Delta t$, $Y\Delta t$, $Z\Delta t$ in die Komponenten des Impulses über, welche wir mit $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ bezeichnen:

$$[X] = \int_0^{\Delta t} X dt = X\Delta t, \quad [Y] = \int_0^{\Delta t} Y dt = Y\Delta t, \quad [Z] = \int_0^{\Delta t} Z dt = Z\Delta t.$$

Infolgedessen können wir den letzten Ausdruck für die lebendige Kraft folgendermaßen schreiben:

$$(5) \qquad T = \frac{1}{2}([X]x' + [Y]y' + [Z]z').$$

*Die durch den Impuls erzeugte lebendige Kraft erscheint hier als das halbe Produkt aus der Gröfse des Impulses in die Länge des Geschwindigkeitsvektors.*

Der Ausdruck (5) ist mit (4) natürlich identisch. In der That folgt aus unserer obigen Impulsdefinition sofort

$$(6) \qquad [X] = mx', \quad [Y] = my', \quad [Z] = mz'.$$

Dieselben Gleichungen können auch in der bemerkenswerten Form geschrieben werden:

$$(7) \qquad [X] = \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad [Y] = \frac{\partial T}{\partial y'}, \quad [Z] = \frac{\partial T}{\partial z'}.$$

Hier ist bei der Ausführung der partiellen Differentiationen $T$ in der Form (4) anzusetzen, d. h. als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten zu schreiben.

Wir können andrerseits $T$ auch als Funktion der Impulskomponenten auffassen. Aus den Gleichungen (4) und (6) ergiebt sich nämlich

$$(4') \qquad T = \frac{1}{2m}([X]^2 + [Y]^2 + [Z]^2).$$

Infolgedessen können wir den Gleichungen (7) auch noch die folgende Form geben:

$$(7') \qquad x' = \frac{\partial T}{\partial [X]}, \quad y' = \frac{\partial T}{\partial [Y]}, \quad z' = \frac{\partial T}{\partial [Z]}.$$

Bei der Bildung dieser Gleichungen ist $T$ natürlich durch die Gleichung (4′) erklärt, d. h. als Funktion der Impulskomponenten aufgefaſst. Ob wir die eine oder die andere Auffassung der lebendigen Kraft zu Grunde legen, werden wir durch die Bezeichnung nicht besonders hervorkehren, wofern, wie hier, durch den Zusammenhang ein Miſsverständnis ausgeschlossen ist.

Neben die Gleichungen (7) und (7′) stellen wir als analytischen Ausdruck für die Kraftkomponenten $X$, $Y$, $Z$ die folgenden Gleichungen

$$(8) \qquad X = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial A}{\partial z},$$

welche sich aus unserer ursprünglichen Einführung des Kraftbegriffes beziehungsweise aus der Gleichung (3) ergeben*).

Dafs die lebendige Kraft bei der kräftefreien Bewegung des Punktes konstant bleibt ($dT = 0$) und dafs ihre Änderung bei der durch äufsere Kräfte beeinflufsten Bewegung gleich der von diesen Kräften geleisteten Arbeit wird ($dT = dA$), ist eine unmittelbare Folge aus unseren obigen Impulssätzen I) und II).

Die Gleichungen (7) oder die äquivalenten Gleichungen (7′) geben uns Beziehungen zwischen dem Vektor der Geschwindigkeit, dem Vektor des Impulses und dem Ausdrucke der lebendigen Kraft, welche wir folgendermafsen gemeinsam in Worte fassen:

*Die Impuls-(Geschwindigkeits-)Komponenten sind die nach den Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten genommenen partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft, wobei wir die letztere als Funktion der Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten gegeben denken.*

Den Gleichungen (7) bez. (7′) stellt sich ein zweites Gleichungstripel an die Seite, welches angiebt, wie der Impuls durch die äufseren Einwirkungen abgeändert wird. Dieses Gleichungstripel ist nur der analytische Ausdruck des in dem Satze II ausgesprochenen Gesetzes. Wirkt auf unseren Punkt die kontinuierliche Kraft ($X$, $Y$, $Z$), so haben wir offenbar nach II bei Benutzung rechtwinkliger Koordinaten:

$$\frac{d[X]}{dt} = X, \quad \frac{d[Y]}{dt} = Y, \quad \frac{d[Z]}{dt} = Z. \tag{9}$$

*Die Formeln* (7), (8) *und* (9) *sind die sehr bekannten fundamentalen Gleichungen der Punktmechanik in rechtwinkligen Koordinaten.* —

Wir wollen uns nun fragen, wie sich diese Gleichungen ändern, wenn wir statt der *rechtwinkligen Koordinaten* irgend welche *allgemeine Koordinaten* einführen. Allerdings liegt beim frei beweglichen Massenpunkte kein zwingender Grund vor, von den rechtwinkligen Koordinaten abzugehen. Die folgenden Betrachtungen sollen uns aber als Vorbereitung für schwierigere Fälle dienen, in denen wir mit den rechtwinkligen Koordinaten nicht auskommen.

Wir wollen die Lage eines Punktes im Raume statt durch drei zu einander senkrechte Ebenen vielmehr durch drei beliebige Flächen gegeben denken, als Koordinaten also nicht die Gröfsen $x, y, z$ sondern irgend drei Funktionen $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$, $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ betrachten. Statt der gewöhnlichen Geschwindigkeitskoordinaten $x', y', z'$

*) Man bemerke, dafs die Bedeutung der Differentialzeichen in (8) von der üblichen Bedeutung abweicht, insofern als dieselben zwar „Differentialquotienten“ sind, aber nicht „Ableitungen“ einer Funktion der Koordinaten zu sein brauchen, weil der Ausdruck (3) im allgemeinen kein vollständiges Differential vorstellt.

werden wir dementsprechend die „allgemeinen Geschwindigkeitskoordinaten“ $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ einführen, d. h. die Differentialquotienten unserer Größen $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ nach der Zeit.

Unmittelbar erkennt man, wenn man die Definitionsgleichungen der $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ nach $t$ differentiiert, daſs *die neuen Geschwindigkeitskoordinaten lineare Funktionen der alten sind und umgekehrt.* Insbesondere wollen wir die Koeffizienten der $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ in den linearen Ausdrücken für $x'$, $y'$, $z'$ mit $a_{ik}$ bezeichnen, so daſs

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}\varphi' + a_{12}\psi' + a_{13}\vartheta', \\ y' = a_{21}\varphi' + a_{22}\psi' + a_{23}\vartheta', \\ z' = a_{31}\varphi' + a_{32}\psi' + a_{33}\vartheta'; \end{cases}$$

die Bedeutung der $a_{ik}$ ist ersichtlich die folgende:

$$(11)\qquad a_{11} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad a_{12} = \frac{\partial x}{\partial \psi}, \ldots a_{21} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \ldots.$$

Es wird nun aber ferner nötig, auch *entsprechend verallgemeinerte Koordinaten der Kraft und des Impulses* zu betrachten. Um diese zu definieren, gehen wir auf unsere ursprüngliche Kraftdefinition zurück. Wir fragen nach der Arbeit, welche wir bei einer unendlich kleinen Änderung der Koordinate $\varphi$ und bei festgehaltenen Werten von $\psi$ und $\vartheta$ zu leisten haben. Das Verhältnis dieser Arbeit zu der Änderung von $\varphi$ definiere uns die $\varphi$-Koordinate der Kraft. Bezeichnen wir sie mit $\Phi$, so haben wir hiernach

$$\Phi = \frac{\partial A}{\partial \varphi};$$

(wobei der Sinn dieses Differentiationszeichens durch die Bedingungen $\psi = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ definiert wird); entsprechende Bedeutung mögen die Kraftkoordinaten $\Psi$ und $\Theta$ haben. Der Ausdruck für die Arbeit bei einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung ($d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$) unseres Massenpunktes wird daher

$$(12)\qquad dA = \Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\vartheta = (\Phi\varphi' + \Psi\psi' + \Theta\vartheta')\, dt.$$

*Unsere Definition der verallgemeinerten Kraftkoordinaten bringt es also mit sich, daſs der Ausdruck für die Arbeit bei Einführung allgemeiner Koordinaten genau die frühere Form (3) beibehält.*

Wir können daraufhin leicht die $\Phi\,\Psi\,\Theta$ durch die $X\,Y\,Z$ ausdrücken. Ersetzen wir nämlich in (3) die $x'$, $y'$, $z'$ vermöge der Gleichungen (10) durch ihre Werte in den $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ und ordnen nach den letzteren Gröſsen, so werden die $\Phi$, $\Psi$, $\Theta$ bez. gleich den Koeffizienten dieser Gröſsen. Wir erhalten also

$$(13)\qquad \begin{cases} \Phi = a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z, \\ \Psi = a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z, \\ \Theta = a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z. \end{cases}$$

Die neuen Kraftkoordinaten drücken sich also durch die alten ganz ähnlich aus wie die alten Geschwindigkeitskoordinaten durch die neuen, nämlich so, daſs die Koeffizienten jener Substitution aus den Koeffizienten dieser durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalreihen hervorgehen. Wir sprechen dieses kurz so aus, daſs wir sagen:

*Die Kraftkoordinaten verhalten sich zu den Geschwindigkeitskoordinaten kontragredient.*

Ebenso wie die Koordinaten einer kontinuierlichen Kraft verhalten sich die Koordinaten des Impulses, welchen wir ja als Grenzfall einer kontinuierlichen Kraft auffassen können; ebenso ferner wie der Ausdruck für die unendlich kleine Arbeit transformiert sich der Ausdruck für die lebendige Kraft, welche wir als ein gewisses endliches Arbeitsquantum definiert haben.

Wir bekommen daher

$$(14)\qquad \begin{cases} [\Phi] = a_{11}[X] + a_{21}[Y] + a_{31}[Z], \\ [\Psi] = a_{12}[X] + a_{22}[Y] + a_{32}[Z], \\ [\Theta] = a_{13}[X] + a_{23}[Y] + a_{33}[Z] \end{cases}$$

und

$$(15)\qquad T = \frac{1}{2}([\Phi]\varphi' + [\Psi]\psi' + [\Theta]\vartheta').$$

Auf Grund der Gleichungen (14) werden wir ohne Schwierigkeit die folgenden Beziehungen verifizieren, in welche wir uns $T$ als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten ausgedrückt denken:

$$(16)\qquad [\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}.$$

In der That folgt aus $T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ z. B.:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mx'\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} + my'\frac{\partial y'}{\partial \varphi'} + mz'\frac{\partial z'}{\partial \varphi'} = [X]a_{11} + [Y]a_{21} + [Z]a_{31} = [\Phi].$$

Die Gleichungen (16) sind unseren früheren Relationen (7) genau analog. *Die letzteren ändern ihre Form bei Einführung allgemeiner Koordinaten überhaupt nicht.*

Dasselbe gilt auch von den Gleichungen (7'); wir überzeugen uns davon in Kürze folgendermaſsen.

Die Gleichungen (10) geben, nach den $\varphi', \ldots$ aufgelöst:

$$(10') \qquad \begin{cases} \varphi' = A_{11} x' + A_{21} y' + A_{31} z', \\ \psi' = A_{12} x' + A_{22} y' + A_{32} z', \\ \vartheta' = A_{13} x' + A_{23} y' + A_{33} z', \end{cases}$$

wo die $A_{ik}$ allgemein die durch die Determinante der $a_{ik}$ dividierten Unterdeterminanten dieser Determinante bedeuten. Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (14):

$$(14') \qquad \begin{cases} [X] = A_{11}[\Phi] + A_{12}[\Psi] + A_{13}[\Theta], \\ [Y] = A_{21}[\Phi] + A_{22}[\Psi] + A_{23}[\Theta], \\ [Z] = A_{31}[\Phi] + A_{32}[\Psi] + A_{33}[\Theta]. \end{cases}$$

Denken wir uns nun $T$ durch die $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ ausgedrückt, indem wir von der Gleichung (4′) ausgehend für $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ die Werte aus (14′) eintragen und bilden wir, indem wir $[\Psi]$ und $[\Theta]$, sowie $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ festhalten, $\frac{\partial T}{\partial [\Phi]}$. Dann haben wir mit Rücksicht auf (7′) und (14′)

$$\frac{\partial T}{\partial [\Phi]} = \frac{\partial T}{\partial [X]} \cdot \frac{\partial [X]}{\partial [\Phi]} + \frac{\partial T}{\partial [Y]} \cdot \frac{\partial [Y]}{\partial [\Phi]} + \frac{\partial T}{\partial [Z]} \cdot \frac{\partial [Z]}{\partial [\Phi]} = A_{11} x' + A_{21} y' + A_{31} z'.$$

Hieraus folgt aber nach (10′), wenn wir sogleich die analogen Gleichungen hinzufügen:

$$(16') \qquad \varphi' = \frac{\partial T}{\partial [\Phi]}, \quad \psi' = \frac{\partial T}{\partial [\Psi]}, \quad \vartheta' = \frac{\partial T}{\partial [\Theta]}$$

Wollen wir die Gleichungen (16) und (16′) als Satz formulieren, so können wir uns wörtlich der Ausdrucksweise von pag. 77 bedienen.

Sodann haben wir nach (12) als Analogon zu den Gleichungen (8):

$$(17) \qquad \Phi = \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \Psi = \frac{\partial A}{\partial \psi}, \quad \Theta = \frac{\partial A}{\partial \vartheta}.$$

Wegen der Bedeutung dieser Differentialzeichen vgl. die Anmerkung auf pag. 77.

Es wird gut sein, auch die Gleichungen (9) in allgemeine Koordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ umzuschreiben. Wir multiplizieren zu dem Zwecke diese Gleichungen der Reihe nach zunächst mit $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{31}$ und addieren sie. Dann entsteht auf der rechten Seite nach (13) die Komponente $\Phi$ der äufseren Kraft. Die linke Seite schreiben wir so:

$$\frac{d}{dt}(a_{11}[X] + a_{21}[Y] + a_{31}[Z]) - \left([X]\frac{d a_{11}}{dt} + [Y]\frac{d a_{21}}{dt} + [Z]\frac{d a_{31}}{dt}\right).$$

Hier ist der erste Term einfach der Differentialquotient der Impulskomponente $[\Phi]$ nach der Zeit; der zweite Term wird mit Rücksicht auf (6) und (11) gleich

$$m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial \varphi} + y'\frac{\partial y'}{\partial \varphi} + z'\frac{\partial z'}{\partial \varphi}\right);$$

dies ist aber nichts anderes als der nach $\varphi$ genommene partielle Differentialquotient der lebendigen Kraft, falls wir letztere durch die Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ ausgedrückt denken. Hiernach kommen wir zu folgendem Gesetz für die Änderung der $\varphi$-Komponente des Impulses:

$$\frac{d[\Phi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi. \tag{18}$$

Genau ebenso ergiebt sich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d[\Psi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \Psi, \\ \frac{d[\Theta]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= \Theta. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Die Gleichungen (18) sagen ihrer Ableitung nach nichts anderes aus, wie die Gleichungen (9); die Einfachheit des allgemeinen Gesetzes II ist hier nur durch die Einführung der Koordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ etwas verschleiert.

Die Gleichungen (7), (8) und (9) bez. die Gleichungen (16), (17) und (18) stellen zusammengenommen die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes dar. Man hat in der von uns gewählten Schreibweise den einfachsten Fall der sogenannten *Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art* vor sich. Wir kommen auf diese Gleichungen mehrfach zurück und bemerken schon hier, dafs es uns mit Hülfe eines dem obigen analogen Impulsbegriffes gelingen wird, dieselben allemal in der gleichen Form zu schreiben, wie die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes.

Die Bezeichnung „Impuls“ haben wir dem Werke von Thomson und Tait entnommen, in welchem unser Begriff eine wichtige Rolle spielt. Dieselbe Bezeichnung wendet Maxwell an bei dem Versuche, die allgemeinen Gleichungen der Mechanik energetisch zu begründen. Gewöhnlich wird in den englischen Büchern statt Impuls das etwas farblose Wort *momentum* benutzt; die Komponenten des Impulses heifsen dann „the moments of momentum“(!). Hertz andrerseits braucht das Wort *Moment* als synonym mit unserem Impuls. Die sonst wohl übliche Bezeichnung „Bewegungsgröfse“ (quantité de mouvement) bringt nur die Länge, aber nicht die Richtung des Impulsvektors zum Ausdrucke.

## § 2. Die elementare Statik des starren Körpers.

Bevor wir die Kinetik des Kreisels in Angriff nehmen können, müssen wir uns über die Zusammensetzung und Zerlegung eines an unserem Körper angreifenden Kraftsystems orientieren. Bekanntlich

faſst man alle diejenigen Untersuchungen, welche ohne Rücksicht auf die resultierenden Bewegungen lediglich von den Kräften handeln, unter dem ziemlich ungeeigneten Namen der *Statik* zusammen, indem man die Frage nach der Zusammensetzung eines gegebenen Kraftsystems zurückgeführt denkt auf die Aufsuchung solcher Kräfte, welche, dem Kraftsystem hinzugefügt, Gleichgewicht hervorrufen würden. Passender wäre das Wort *Dynamik*, welches man indessen gewöhnlich auf denjenigen Teil der Mechanik anwendet, den wir als Kinetik bezeichnen.

Die Behandlung der Statik für den hier vorliegenden Fall des starren Körpers kann nach zwei wesentlich verschiedenen Methoden geschehen, welche bez. durch die Namen von Poinsot und Lagrange charakterisiert werden. Wir wollen über beide Methoden in Kürze referieren.

Die Statik des starren Körpers in der geometrischen Behandlung Poinsots gründet sich auf eine Reihe von *Axiomen*, welche wir zum Teil schon vom einzelnen Massenpunkte her kennen. Wir sagten, daſs die Kraft beim einzelnen Massenpunkte den Charakter eines Vektors hat und daſs mehrere in demselben Punkte angreifende Kräfte sich wie Vektoren addieren. Hierzu kommt beim starren Körper noch das folgende Axiom hinzu: *Der Angriffspunkt der Kraft kann in Richtung der Kraft beliebig verschoben werden.* Dieses Axiom ist von den vorhergenannten offenbar unabhängig, da seine Gültigkeit wesentlich an die Beschaffenheit des starren Körpers gebunden ist; es kann geradezu als Definition des letzteren angesehen werden. Bei den wirklichen Körpern, welche stets in gewissem Grade elastisch sind, ist es natürlich nur angenähert erfüllt. Man interpretiert übrigens Newtons lex tertia, welche die Gleichheit von actio und reactio aussagt, so, daſs sie unser Axiom mit umfaſst, was allerdings einigermaſsen künstlich scheint.

Mit Hülfe dieser Axiome untersucht man nun die Zusammensetzung von Kräften, welche, irgendwie gegeben, im Körper verteilt sind. Zunächst sieht man ohne Weiteres, daſs zwei Kräfte, welche in parallelen Geraden wirken, stets durch eine Einzelkraft ersetzt werden können, deren Richtung den Richtungen der ursprünglichen Kräfte parallel ist. Die Bestimmung von Angriffspunkt und Gröſse dieser Einzelkraft bildet den Inhalt des sog. „Hebelgesetzes". Hierbei ergiebt sich, wenn die Kräfte entgegengesetzt gleich sind, eine bemerkenswerte Besonderheit. Es rückt nämlich der Angriffspunkt der Resultierenden ins Unendliche, während gleichzeitig ihre Gröſse unendlich klein wird. *Ein Kräftepaar* (d. h. ein Paar entgegengesetzt

gleicher und paralleler Kräfte) *ist also äquivalent einer unendlich kleinen Kraft, welche an einem unendlich langen Hebelarm wirkt.*

Nun geht man aber, um die Darstellung elementarer zu halten, der Betrachtung unendlich kleiner Kräfte und unendlich grofser Arme gemeinhin aus dem Wege. Infolgedessen ist man gezwungen, das Kräftepaar als ein nicht weiter reduzierbares Element der Statik des starren Körpers anzusehen. Ferner wird es nötig, die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare in ähnlicher Weise zu diskutieren, wie die der Kräfte. Neuer Axiome bedarf man zu diesem Zwecke nicht, weil ja vermöge der Definition der Kräftepaare die Frage nach dem Gleichgewicht der Paare zurückgeführt werden kann auf die Frage nach dem Gleichgewicht der Kräfte.

Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir folgendermafsen zusammen: Wir repräsentieren das Paar durch einen *Vektor*, welchen wir senkrecht auf der durch die Kräfte des Paares gelegten Ebene nach derjenigen Seite hin abtragen, von der aus gesehen die Kräfte im Sinne des Uhrzeigers zu wirken scheinen. Die Länge des Vektors machen wir (in dem ein für allemal gewählten Centimetermafsstabe) gleich dem „Moment des Paares“ d. h. gleich dem Produkt aus der Gröfse der Kräfte in ihren kürzesten Abstand. Der Anfangspunkt unseres Vektors kann dabei beliebig in der Ebene des Paares oder auch beliebig im Raume angenommen werden. Alsdann gilt der Satz: *Zwei Kräftepaare setzen sich so zusammen, dafs sich die zugehörigen Vektoren geometrisch addieren. Durch Zusammensetzung mehrerer Paare entsteht immer wieder ein Paar.*

Kräftepaare haben also, ebenso wie Kräfte, Vektorcharakter. Dabei müssen wir indessen folgenden Unterschied betonen. Der Vektor einer am starren Körper angreifenden Kraft darf nur in seiner Richtung verschoben, der Vektor eines Paares dagegen beliebig parallel zu sich selbst im Raume transportiert werden. *Der Vektor einer Kraft ist* (in der Ausdrucksweise von Budde a. a. O.) *ein linienflüchtiger, der eines Paares ein freier Vektor, d. h. ein Vektor mit ganz willkürlichem Angriffspunkte.*

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, dafs ein bestimmtes Kräftepaar hinsichtlich seiner statischen Wirkung in sehr mannigfaltiger Weise durch andere Kräftepaare ersetzt werden kann. In der That sind zwei Kräftepaare, welche bei der angegebenen Konstruktion denselben Vektor ergeben, völlig äquivalent. Es ist daher geboten, die spezielle Vorstellung des Kräftepaares zurücktreten zu lassen und sich nur an den repräsentierenden Vektor zu halten. Wir wollen diesem Umstande auch in der Bezeichnung Rechnung tragen und wollen statt

von einem Kräftepaar lieber von einer *Drehkraft* (oder einem *Drehmoment*) reden. Die Richtung des der Drehkraft ihrer Definition nach zugehörenden Vektors bezeichnen wir auch als „Axe der Drehkraft“; den Sinn des Vektors markieren wir durch einen Pfeil, der die Axe in solchem Sinne umgiebt, als die Kräfte des Paares von der Axe aus gesehen zu wirken scheinen. Die Dimension der Drehkraft ist Kraft mal Hebelarm $\left(D = m \frac{l^2}{t^2}\right)$. Als Gegensatz zu dem Ausdrucke Drehkraft (Kräftepaar) gebrauchen wir vorübergehend das Wort *Schiebekraft* (Einzelkraft).

Wir müssen uns nur hüten, mit dem Ausdrucke Drehkraft die Vorstellung zu verbinden, als ob die Drehkraft bestrebt wäre, um eine bestimmte gerade Linie zu drehen. Die Einführung der Drehkraft geschah ja hier auf rein statischem Wege. Von ihrer kinetischen Wirkung kann erst später die Rede sein, wenn wir über die Massenverteilung des Körpers bestimmte Voraussetzungen gemacht haben werden, wo wir dann überhaupt von der kinetischen Wirkung der Kräfte handeln. Ebensowenig soll natürlich durch die Bezeichnung Schiebekraft die Vorstellung erweckt werden, als ob die kinetische Wirkung der Schiebekraft notwendig in einer Parallelverschiebung bestände.

Wir gehen nun auf das allgemeine Problem der Statik ein, setzen also voraus, dafs die Kräfte in beliebiger Weise räumlich durch den starren Körper verteilt sind. Wir verfahren dabei wie üblich folgendermafsen: Wir nehmen einen beliebigen Punkt $O$ als *Bezugspunkt* an und legen durch diesen zu jedem der gegebenen Kraftvektoren einen gleichsinnigen und einen entgegensinnigen Vektor hindurch. Die gegebenen Kräfte fassen wir mit den entgegengerichteten Kräften durch $O$ je zu einem Kräftepaar zusammen und ersetzen letzteres nach der obigen Regel durch den Vektor einer Drehkraft, wobei wir als Anfangspunkt des Vektors passend den Bezugspunkt $O$ wählen werden. Wir erhalten so ebensoviele Drehkräfte, als die Anzahl der ursprünglichen Kräfte betrug. Alle diese Drehkräfte setzen wir zu einer resultierenden Drehkraft $D$ zusammen, deren Axe durch $O$ gehen möge. Es bleiben dann noch die den gegebenen gleichgerichteten Kräfte (Schiebekräfte) durch $O$ übrig. Auch diese setzen sich zu einer Resultierenden $S$ zusammen. Daher der Satz:

*Ein beliebiges an unserem starren Körper angreifendes Kraftsystem läfst sich ersetzen durch die Kombination einer von einem beliebigen Punkte $O$ auslaufenden Schiebekraft $S$ und einer Drehkraft $D$.*

Wir erwähnen noch die allgemeine Regel zur Berechnung von $S$ und $D$. Es sei $P_i$ eine der an unserem Körper angreifenden Kräfte

und $P_i^x$, $P_i^y$, $P_i^z$ die Projektionen des Vektors $P_i$ auf die Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt mit dem Bezugspunkte zusammenfällt. Ferner mögen $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ die Koordinaten des Angriffspunktes von $P_i$ und $S^x$, $S^y$, $S^z$ bez. $D^x$, $D^y$, $D^z$ die Komponenten von $S$ und $D$ sein. Dann haben wir

$$(1)\quad \begin{cases} S^x = \Sigma P_i^x, & S^y = \Sigma P_i^y, & S^z = \Sigma P_i^z, \\ D^x = \Sigma(P_i^z Y_i - P_i^y Z_i), & D^y = \Sigma(P_i^x Z_i - P_i^z X_i), & D^z = \Sigma(P_i^y X_i - P_i^x Y_i). \end{cases}$$

Diese sehr bekannten Formeln sind der unmittelbare analytische Ausdruck für die oben geschilderte geometrische Konstruktion von $S$ und $D$. Man nennt $S^x$, $S^y$, $S^z$, $D^x$, $D^y$, $D^z$ *kurzweg die Koordinaten des* (am starren Körper angreifenden) *Kraftsystems.*

Im allgemeinen wird die Richtung von $S$ mit der Axe von $D$ einen Winkel bilden, welcher aufser von der Beschaffenheit des gegebenen Kraftsystems auch von der Auswahl des Bezugspunktes abhängt. Wir können nun aber den Punkt $O$ stets so annehmen, dafs die Vektoren $S$ und $D$ ihrer Richtung nach gerade zusammenfallen, wobei $O$ noch auf einer bestimmten Geraden nach Belieben gewählt werden kann Das solcherweise entstehende einfachste Äquivalent eines allgemeinen Kraftsystems — eine Schiebekraft verbunden mit einer Drehkraft, welche die Richtung der Schiebekraft zur Axe hat — werden wir eine *Schraube* (oder genauer eine *Kraftschraube*) nennen. Wir können dann die Gröfsen $S^x, \ldots,$ $D^x, \ldots$ auch als *Koordinaten der Kraftschraube* bezeichnen und können den obigen Satz folgendermafsen präzisieren:

*Ein beliebiges an unserem starren Körper angreifendes Kraftsystem läfst sich stets als eine Schraube auffassen, deren Koordinaten durch* (1) *bestimmt sind.*

Legt man den Bezugspunkt speziell auf die Axe der Schraube, so werden die Komponenten von $S$ denen von $D$ proportional. Vielfach wird man indessen auf die zuletzt besprochene Vereinfachung in den Formeln verzichten und wird es vorziehen, diesem Punkt eine durch die Natur des Problems ausgezeichnete Lage zu geben, was uns natürlich nicht hindert, das Kraftsystem auch dann noch als eine (allerdings nicht durch $O$ hindurchgehende) Schraube vorzustellen. So wählt man bei dem frei beweglichen starren Körper gerne den Schwerpunkt zum Bezugspunkt; dieselbe Wahl werden wir später treffen, wenn wir den auf einer Ebene beweglichen Kreisel behandeln werden. Andrerseits ist es geboten im Falle des (allgemeinen oder symmetrischen) Kreisels den Bezugspunkt durchgehends in den festen Unterstützungspunkt zu legen. Konstruieren wir uns alsdann im Punkte $O$ die Dreh-

kraft und die Schiebekraft, so werden wir von diesen weiterhin nur die erstere zu berücksichtigen haben.

In der That, welches auch im Einzelnen die Umstände sein mögen, die die feste Lage des Unterstützungspunktes bewirken, jedenfalls müssen sie der im Punkte $O$ angreifenden Schiebekraft eine gleich grofse Widerstandskraft entgegensetzen. Diese Widerstandskraft ist ein Teil der *Reaktionskraft des Unterstützungspunktes*, welche sich im Übrigen aus der augenblicklichen Bewegung des Schwerpunkts berechnet, so dafs diese Bewegung durch die gemeinsame Wirkung von äufserer Schiebekraft und Reaktionskraft zustande kommt. Für die Bewegung des Kreisels aber ist die Kenntnis der Reaktionskraft, sowie der äufseren Schubkraft nicht erforderlich. Wir werden also wirklich von dem Auftreten der Schiebekraft zunächst vollkommen absehen können und werden auf diese nur gelegentlich später zurückzukommen brauchen, wenn wir den Druck berechnen werden, welchen die Unterlage des Kreisels bei dessen Bewegung auszuhalten hat.

Gleichzeitig vereinfachen sich unsere obigen allgemeinen Sätze im vorliegenden Falle. Wir können sagen:

*Das allgemeinste an unserem Kreisel angreifende Kraftsystem kann mit Rücksicht auf die feste Lage des Unterstützungspunktes ersetzt werden durch ein einzelnes Moment.* —

Man beachte die schöne Analogie, welche zwischen unseren statischen Sätzen und den zu Beginn der Vorlesung entwickelten kinematischen Sätzen besteht. Die Analogie liegt so, dafs für den freien Körper Drehkräfte und (unendlich kleine) Parallelverschiebungen, andererseits Schiebekräfte und (unendlich kleine) Drehungen verglichen werden müssen. Dasselbe geometrische Gebilde, die Schraube, erscheint das eine Mal als Bewegungsschraube, das andere Mal als Kraftschraube. Beim Kreisel dagegen treten Drehkräfte und (unendlich kleine) Drehungen um $O$ in Parallele. Beide werden durch Vektoren repräsentiert.

Aufserdem bemerke man, dafs der Kreisel in statischer Hinsicht dem einzelnen Massenpunkte an Einfachheit nicht nachsteht. Die Möglichkeit der späteren elementargeometrischen Entwickelungen zur Kreiseltheorie beruht wesentlich auf diesem Umstande.

Als Beispiel besprechen wir den besonders einfachen Fall, in dem das ursprüngliche Kraftsystem durch die Schwerewirkung geliefert wird. Auf jedes Teilchen $dm$ des Kreisels wirkt infolge der Gravitation die Kraft $g\,dm$ vertikal nach unten.

Wir nehmen ein $X$, $Y$, $Z$, Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in $O$ und der $Z$-Axe vertikal nach oben. Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich dann unmittelbar, unter $m$ die Gesammtmasse des Kreisels, unter $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Koordinaten des Schwerpunktes verstanden:

$$S^x = 0, \quad S^y = 0, \quad S^z = -g\int dm = -mg,$$

$$D^x = -g\int Y dm = -mg\eta, \quad D^y = g\int X dm = mg\xi, \quad D^z = 0.$$

Wir kommen also zu der sehr bekannten Thatsache, dafs *die Schwerewirkung dieselbe ist, wie wenn eine Einzelkraft vom Betrage $mg$ senkrecht nach unten im Schwerpunkte angriffe.*

Bei dem symmetrischen Kreisel liegt der Schwerpunkt offenbar entweder auf der Figurenaxe oder auf ihrer Verlängerung über $O$

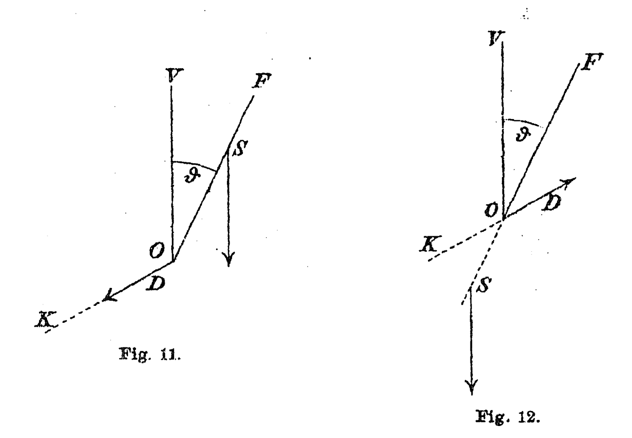



Fig. 11.

Fig. 12.

hinaus. Sei $E$ die Entfernung des Schwerpunktes $S$ von $O$, und $\vartheta$ wie früher der Winkel zwischen der Figurenaxe und der Vertikalen Dann hat der Vektor $D$ die Länge

$$mgE\sin\vartheta;$$

der Richtung nach steht er sowohl auf der Vertikalen wie auf der Figurenaxe senkrecht. Erinnern wir uns ferner der Definition der Knotenlinie von pag. 17, so können wir sagen: Der Vektor $D$ fällt in die Knotenlinie oder in ihre Verlängerung über $O$ hinaus, je nachdem $S$ auf der Figurenaxe oder auf ihrer Verlängerung liegt. Statt dessen können wir uns auch so ausdrücken, dafs wir sagen: Der Vektor $D$ fällt immer in die Knotenlinie und zwar beträgt seine Gröfse:

$$D = P\sin\vartheta, \quad P = \pm mgE,$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb des Unterstützungspunktes (sc. bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe) gelegen ist. Die letztere Ausdrucksweise, welche wir später acceptieren werden, hat den Vorteil, dafs wir die beiden unterschiedenen Fälle zuvörderst gleichmäfsig behandeln und

durch die einfachen Bedingungen $P > 0$ und $P < 0$ nachträglich von einander trennen können.

Ebenso, wie es in dem letzten Beispiele der Fall war, setzt man gewöhnlich stillschweigend voraus, daſs die Kräfte, um die es sich in der Statik handelt, kontinuierlich wirkende Kräfte sind. Man übersieht aber sofort, daſs alle unsere Ausführungen auch für Stoſskräfte gültig bleiben, sofern die sämmtlichen Stöſse nur gleichzeitig erfolgen. In der That überträgt sich jede Aussage über kontinuierliche Kräfte sofort auf Stoſskräfte, (vgl. die Definition der letzteren von pag. 70). Als Analogon zu dem Begriffe der Drehkraft werden wir dabei den Begriff des *Drehstoſses* einführen, d. h. den Inbegriff eines Paares gleich groſser entgegengesetzt gerichteter paralleler *Schiebestöſse*. Gröſse, Axe und Sinn des Drehstoſses bestimmen sich ebenso wie bei der Drehkraft aus dem Moment und der Lage der das Paar konstituierenden Einzelkräfte. Die Dimension des Drehstoſses ist $[D] = m\,\frac{l^2}{t}\cdot$ Wir sprechen daher die allgemeinen Sätze aus:

*Das allgemeinste an einem frei beweglichen starren Körper angreifende System von Stoſskräften läſst sich stets ersetzen durch eine einzelne Schraube (genauer gesagt: eine Stoſsschraube).*

und:

*Das allgemeinste System von Stoſskräften, welches irgendwie in den Punkten unseres Kreisels angreift, läſst sich stets auffassen als ein einzelner Drehstoſs und läſst sich also darstellen durch einen einzelnen von O auslaufenden Vektor.*

In der bisher auseinandergesetzten Form ist die Statik, wie erwähnt, von Poinsot begründet worden, (bei dem allerdings das Wort „Schraube“ noch nicht vorkommt). Sein grundlegendes Werk *éléments de statique*, erschien zuerst im Jahre 1803; seitdem folgte eine auſserordentlich groſse Zahl von Auflagen. Man wolle dort die Beweise der vorstehend mitgeteilten Sätze nachlesen. Mit der projektiven Geometrie wurde die Statik von Moebius, speziell mit der Liniengeometrie von Plücker in Verbindung gesetzt. Von neueren Darstellungen nennen wir neben der schon früher zitierten Schraubentheorie von Ball insbesondere das zweibändige Lehrbuch von Routh*), *Analytical Statics*, welches sich durch Präzision und Reichhaltigkeit besonders empfehlen dürfte. —

Wir gehen nun noch auf die eingangs erwähnte andere Methode zur Begründung der Statik ein, welche im Wesentlichen von Lagrange herrührt. Sie besitzt gegenüber der bisher besprochenen Poinsotschen

*) Cambridge, 2te Auflage 1896.

Darstellung den Vorzug gröfserer Verallgemeinerungsfähigkeit, wofür sie auf der anderen Seite weniger elementar erscheinen dürfte als jene. Nach dieser Methode leiten wir die *Zusammensetzung der Kräfte* aus der *Zusammensetzung der Arbeitsgröfsen* ab, welche die Kräfte bei einer unendlich kleinen Verrückung des starren Körpers leisten.

Wir stellen uns wieder vor, dafs auf unseren Körper ein beliebiges System von Kräften $P_i$ mit beliebigen Angriffspunkten wirkt. Die Gesamtarbeit $dA$ unseres Kraftsystems setzen wir zusammen aus den sämtlichen Teilarbeiten $dA_i$ der Einzelkräfte $P_i$. Dabei benutzen wir den allgemeinen Grundsatz: *Die Arbeit ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig; sie ist eine skalare Gröfse; mehrere Arbeitsquanta setzen sich zusammen, wie skalare Gröfsen, sie addieren sich im algebraischen Sinne.*

Nach pag. 75 beträgt die Arbeit, welche die Kraft $P_i$ bei einer unendlich kleinen Verrückung ihres Angriffspunktes leistet:

$$dA_i = (P_i^x x_i' + P_i^y y_i' + P_i^z z_i')\,dt,$$

unter $P_i^x$, $P_i^y$, $P_i^z$ die Komponenten von $P_i$, unter $x_i$, $y_i$, $z_i$ die Koordinaten ihres Angriffspunktes bezüglich eines im Raume festen Koordinatensystems $(x, y, z)$ verstanden. Mithin ergiebt sich die Gesamtarbeit zu

$$dA = \Sigma dA_i = \Sigma(P_i^x x_i' + P_i^y y_i' + P_i^z z_i')\,dt.$$

Wir erinnern uns nun der Ergebnisse des ersten Kapitels, nach welchem jede unendlich kleine Verrückung eines starren Körpers aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung besteht und durch die sechs Geschwindigkeitskoordinaten $x'$, $y'$, $z'$, $p$, $q$, $r$ analytisch dargestellt werden kann (vgl. pag. 47). Durch diese Koordinaten drücken wir zunächst die Geschwindigkeit $(x_i', y_i', z_i')$ des Angriffspunktes von $P_i$ aus. Infolge der Parallelverschiebung erhält der Angriffspunkt von $P_i$ (ebenso wie jeder Punkt des Körpers) die Geschwindigkeit $(x', y', z')$; infolge der Drehung gewinnt er (s. Gl. (3') von pag. 41) die Geschwindigkeit

$$(-Y_i r + Z_i q,\; -Z_i p + X_i r,\; -X_i q + Y_i p).$$

Mithin beträgt die resultierende Geschwindigkeit des Angriffspunktes von $P_i$:

$$\begin{aligned} x_i' &= x' - Y_i r + Z_i q, \\ y_i' &= y' - Z_i p + X_i r, \\ z_i' &= z' - X_i q + Y_i p. \end{aligned}$$

Diese Werte tragen wir in unseren obigen Ausdruck für die Gesamtarbeit ein. Derselbe schreibt sich dann folgendermafsen:

$$dA = (S^x x' + S^y y' + S^z z' + D^x p + D^y q + D^z r)\,dt, \tag{2}$$

wo

$$\begin{cases} S^x = \Sigma P_i^x, \quad S^y = \Sigma P_i^y, \quad S^z = \Sigma P_i^z, \\ D^x = \Sigma(P_i^z Y_i - P_i^y Z_i), \quad D^y = \Sigma(P_i^x Z_i - P_i^z X_i), \\ D^z = \Sigma(P_i^y X_i - P_i^x Y_i). \end{cases} \tag{3}$$

Es sind dieses genau dieselben Gröfsen, welche oben in den Gleichungen (1) auftraten.

Wir wollen uns ihre Bedeutung unabhängig von dem früher gesagten klar machen, wobei wir zu einer neuen einfachen Definition dieser Gröfsen gelangen. Nach Gleichung (2) ist $S^x$ das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer Verschiebung des Körpers in der Richtung der $x$-Axe leistet, zu der Gröfse dieser Verschiebung. Ebenso ist $D^x$ gleich dem Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer reinen Drehung des Körpers um die Axe X oder, was auf dasselbe herauskommt, um die Axe $x$ leistet, zu der Gröfse des Drehungswinkels. Die Gröfsen $S^x, \ldots, D^x, \ldots$ haben also eine ganz analoge Bedeutung, wie die Komponenten $P^x, \ldots$ der an einem einzelnen Massenpunkte angreifenden Kraft $P$, welche ja ihrerseits ursprünglich als das Verhältnis eines gewissen Arbeitsquantums zu einer gewissen unendlich kleinen Bewegung definiert waren (vgl. pag. 70). Infolgedessen liegt es nahe, den Begriff der Kraft von dem einzelnen Massenpunkte auf unsern starren Körper zu erweitern. Wir werden kurz von einer *an dem starren Körper angreifenden Gesamtkraft* sprechen können, *welche dem gegebenen System der Einzelkräfte äquivalent ist. Dieselbe zerlegt sich in eine Schiebekraft S und eine Drehkraft D, welche letztere je in drei Komponenten nach den Koordinatenaxen aufgelöst werden können.* Die Gröfsen $S^x, S^y, S^z, D^x, D^y, D^z$ werden wir wieder als die Koordinaten unserer Gesamtkraft bezeichnen, ähnlich wie wir die Gröfsen $x', y', z', p, q, r$ die Koordinaten der instantanen Geschwindigkeit genannt haben. Dann können wir kurz sagen:

*Die Koordinaten der Kraft sind ihrer Definition nach nichts anderes als die Faktoren, welche in dem Ausdrucke für die Arbeit die Koordinaten der Geschwindigkeit multiplizieren.*

Handelt es sich speziell um einen Körper mit festem Unterstützungspunkte, in welchem Falle wir wie oben diesen Punkt zum Bezugspunkte nehmen werden, so haben wir für die Schiebegeschwindigkeit $x' = y' = z' = 0$ und können von der Schiebekraft $S^x, S^y, S^z$ abstrahieren. Die Drehkraft dagegen wird wieder genau durch die Glei-

chungen (3) definiert. Die Gesamtarbeit, welche diese Drehkraft bei der unendlich kleinen Verrückung $(p, q, r)\,dt$ leistet, ist alsdann

$$(2') \qquad dA = (D^x p + D^y q + D^z r)\,dt.$$

Die jetzige Definition der Dreh- und Schiebekraft ist in vieler Hinsicht der früheren vorzuziehen, da sie unmittelbar an den Begriff der Kraft beim einzelnen Massenpunkte anknüpft; insbesondere überhebt sie uns der Einführung des Begriffes der Kräftepaare, welchen wir früher vorübergehend nötig hatten. Dafs die neue und die alte Definition auf dasselbe hinauskommen, lehrt die Vergleichung der Ausdrücke (1) und (3).

Wir könnten jetzt von Neuem die sämtlichen Lehren der elementaren Statik entwickeln; insbesondere würde dabei die Thatsache, dafs Schiebekräfte und Drehkräfte sich wie linienflüchtige bez. freie Vektoren zusammensetzen, als unmittelbare Folge der entsprechenden Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und unseres obigen Grundsatzes erscheinen, nach welchem Arbeitsquanten sich wie skalare Gröfsen addieren.

In solcher Weise ist die Statik, wie erwähnt, von Lagrange in seiner berühmten *mécanique analytique* begründet worden. Wenn wir oben die Zusammensetzung der Kräfte an den Ausdruck für die Arbeit anknüpften, so ist dieses im Wesentlichen dasselbe, wie wenn wir nach dem Vorgange von Lagrange das Gleichgewicht eines Systems auf Grund des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* beurteilen. In der That sagt dieses Prinzip bekanntlich aus, dafs an einem beliebigen System gegebene Kräfte sich dann im Gleichgewicht befinden, wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Verrückung die von ihnen geleistete Arbeit verschwindet, oder etwas allgemeiner ausgedrückt, dafs zwei verschiedene Kraftsysteme einander dann äquivalent sind, wenn bei jeder möglichen Verrückung die von beiden geleistete Arbeit die gleiche ist. In Übereinstimmung mit diesem Prinzipe haben wir oben das gegebene Kraftsystem der $P_i$ durch die Kombination einer Schiebekraft $S$ und einer Drehkraft $D$ ersetzt. Nur die Ausdrucksweise war etwas anders, wie bei Lagrange, zu dessen Zeit der Begriff und die Bezeichnung der Arbeit noch nicht geläufig waren. —

Wir wollen schliefslich den Ausdruck für die Arbeit benutzen, um, ebenso wie beim einzelnen Massenpunkte geschehen, eine Verabredung darüber zu treffen, was wir unter den „*verallgemeinerten Koordinaten eines Kraftsystems*" verstehen. Dabei gehen wir ganz analog vor, wie pag. 78 bei dem einzelnen Massenpunkt.

Offenbar können wir den instantanen Bewegungszustand des starren Körpers statt durch die Gröfsen $x', y', z', p, q, r$ noch in äufserst

mannigfacher Weise durch sechs andere Parameter festlegen. Die nächstliegende Abänderung wäre die, daſs wir den Bezugspunkt anders wählen und auſserdem die Lage des $xyz$-Systems im Raume und die des $XYZ$-Systems im Körper variieren. Zerlegen wir nun nach der obigen Regel ein bestimmtes Kraftsystem in Schiebekraft und Drehkraft, so werden wir für die Komponenten dieser Kräfte andere Werte finden wie früher. Ebenso werden sich die Koordinaten einer bestimmten unendlich kleinen Verrückung ändern. Dagegen ist es klar, daſs die Arbeit, welche ein bestimmtes Kraftsystem bei einer bestimmten unendlich kleinen Verrückung leistet, genau den früheren Wert beibehalten muss. Die Arbeit hat bei fester Wahl der Einheiten von Länge, Zeit und Masse einen festen numerischen Wert, welcher von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist; sie ist (gegenüber Veränderung der Koordinatensysteme) eine *absolute Invariante*, wie wir sagen können.

Wir werden aber darüber hinaus noch weit durchgreifendere Änderungen in der Koordinatenbestimmung des momentanen Bewegungszustandes vornehmen. Beispielsweise werden wir die instantane Drehung statt durch die Gröſsen $p, q, r$ durch die Änderungen der Eulerschen Winkel $\varphi', \psi', \vartheta'$ festlegen, ferner könnten wir (etwa wie im vorigen Paragraphen geschehen) die Lage und Geschwindigkeit des Bezugspunktes durch die Gröſse und die Gröſsenänderung dreier krummliniger Koordinaten $\xi, \eta, \zeta$ bestimmen. Die allgemeinste Annahme wird die sein, daſs wir die $x', y', z', p, q, r$ gleich beliebigen linearen Funktionen von beliebigen sechs Geschwindigkeitsparametern $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ setzen mit Koeffizienten, die noch von der augenblicklichen Lage des Körpers abhängen. Es fragt sich, wie die Koordinaten des Kraftsystems dabei geändert werden oder richtiger, was wir jetzt unter dem Worte „Koordinaten des Kraftsystems“ verstehen wollen. Wir treffen diesbezüglich folgende Festsetzung:

Wir führen in den Ausdruck (2) für die Arbeit die Werte der $x', \ldots r$ in den $\xi', \ldots \vartheta'$ ein und ordnen den Ausdruck nach den letzteren Gröſsen. *Dann definieren wir als die zu den Geschwindigkeitskoordinaten $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ gehörigen Koordinaten des Kraftsystems diejenigen Gröſsen, welche bez. als Faktoren von $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ auftreten.* Diese Definition der Kraftkomponenten befindet sich in der That in genauer Analogie zu unserer Definition des Wortes beim einzelnen Massenpunkte. Beispielsweise bedeutet nämlich die zu $\xi$ gehörige Kraftkoordinate das Verhältnis derjenigen Arbeit, welche unser Kraftsystem bei einer Verrückung $d\xi$ leistet, zu dieser Verrückung.

Offenbar werden die neuen Kraftkoordinaten lineare Funktionen der alten u. zw. sehen die Substitutionsgleichungen, welche von letzteren

zu ersteren führen, ganz ähnlich aus, wie die Substitutionsgleichungen welche die alten Geschwindigkeitskoordinaten durch die neuen ausdrücken; es sind nur die Koeffizienten der horizontalen und der vertikalen Reihen gegen einander vertauscht. Diese Thatsache drücken wir kurz so aus, dafs wir sagen:

*Auf Grund unserer Definition der verallgemeinerten Kraftkoordinaten verhalten sich diese allemal zu den Geschwindigkeitskoordinaten kontragredient.*

Den entsprechenden Satz oder richtiger die entsprechende Festsetzung haben wir schon pag. 79 für die Kraftkoordinaten am einzelnen Massenpunkte ausgesprochen.

## § 3. Der Impulsbegriff beim allgemeinen Kreisel. Zusammenhang zwischen Impuls- und Drehungsvektor. Beziehung zum Ausdrucke der lebendigen Kraft.

Wir machen nun den Übergang von der Statik zur Kinetik, fragen also nach dem Zusammenhange zwischen der Bewegung und den die Bewegung verursachenden Kräften. Hierbei wird die Massenverteilung des Körpers von entscheidender Wichtigkeit, so dafs wir weiterhin den allgemeinen und den symmetrischen Kreisel gesondert behandeln werden.

An die Spitze der Kinetik stellen wir wie beim einzelnen Massenpunkte den *Begriff des Impulses*. Wir erläutern diesen Begriff zunächst im Falle des frei beweglichen starren Körpers, um von hier aus sogleich zu dem in einem seiner Punkte befestigten Körper überzugehen.

Die Definition des Impulses ist folgende:

Wir lösen den starren Körper in das Aggregat seiner Einzelmassen auf und bringen daran dasjenige System von Stofskräften an, welches im Stande ist, jeden Massenpunkt momentan aus der Ruhe in die Bewegung zu versetzen, die er im Verbande des starren Körpers besitzt. *Dieses oder irgend ein ihm äquivalentes System von Stofskräften heifst der Impuls des Körpers.*

Mit Rücksicht auf die Untersuchungen des vorigen Paragraphen können wir sofort folgende Sätze aussprechen:

*Der Impuls des frei beweglichen starren Körpers besteht aus der Kombination eines Schiebestofses und eines Drehstofses; er kann kurzweg als eine Schraube aufgefafst werden.*

Und:

*Der Impuls eines starren Körpers mit festem Unterstützungspunkte O ist ein einzelner Drehstofs; wir können ihn unter dem einfachen Bilde eines von O auslaufenden Vektors sehen.*

Indem wir bei dem letzteren Falle bleiben, ziehen wir neben dem statischen Vektor des Impulses den kinematischen der Drehgeschwindigkeit in Betracht.

*Es wird eine erste Aufgabe der Kinetik des Kreisels sein, die gegenseitige Abhängigkeit dieser beiden Vektoren festzustellen.*

Zu dem Zwecke operieren wir so, dafs wir einerseits die Geschwindigkeiten andererseits die Impulse aller einzelnen Massenteilchen betrachten, aus denen sich der Kreisel aufbaut.

Wir nehmen vorab die Axe der Drehgeschwindigkeit zur ersten Koordinatenaxe eines rechtwinkligen Koordinatensystems $XYZ$, welches eine unveränderliche Lage gegen den Körper hat, und dessen Anfangspunkt mit dem Unterstützungspunkte zusammenfällt. Die Komponenten des Impulsvektors nach den Koordinatenaxen bezeichnen wir mit $L$, $M$, $N$, die des Drehungsvektors wie früher mit $p$, $q$, $r$. Nach Voraussetzung hat von letzteren nur $p$ einen von Null verschiedenen Wert.

Betrachten wir jetzt irgend ein Teilchen $P$ des Körpers von der Masse $dm$. Vermöge der Drehung um die $X$-Axe besitzt unser Teilchen eine Lineargeschwindigkeit

$$v = p\sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

Die Stosskraft, welche erforderlich ist, um diese Geschwindigkeit momentan zu erzeugen, hat die Gröfse $v\,dm$; ihre Komponenten nach den drei Koordinatenaxen betragen, wie man leicht erkennt, bez.

$$0, \quad -pZ\,dm, \quad pY\,dm.$$

Solcher Stofskräfte mögen nun auf unsern Körper so viele wirken, als wir Teilchen $P$ unterscheiden mögen. Die Drehkraft, welche zu dem System dieser Stofskräfte gehört, ist dann unser Impuls. Seine Komponenten berechnen sich nach der analytischen Regel von pag. 85 zu

$$(1)\quad L = p\int (Y^2 + Z^2)\,dm, \quad M = -p\int YX\,dm, \quad N = -p\int ZX\,dm,$$

wo die Integrale über die Gesamtmasse des Körpers zu erstrecken sind. Die vorstehenden Ausdrücke zeigen sofort, dafs der Vektor des Impulses im Allgemeinen von dem Vektor der Drehgeschwindigkeit der Richtung nach abweicht: während nach Annahme der Vektor der Drehgeschwindigkeit in die $X$-Axe fällt, besitzt der Vektor des Impulses auch Komponenten in Richtung der $Y$- und $Z$-Axe.

In ganz entsprechender Weise erhalten wir offenbar, wenn wir annehmen, dafs die instantane Drehung um die $Y$- oder $Z$-Axe erfolgt, durch cyklische Vertauschung die folgenden Werte für die Komponenten des zugehörigen Impulses:

$$(1') \quad L = -q\int XY\,dm, \quad M = q\int (Z^2 + X^2)\,dm, \quad N = -q\int ZY\,dm$$

bez.

$$(1'') \quad L = -r\int XZ\,dm, \quad M = -r\int YZ\,dm, \quad N = r\int (X^2 + Y^2)\,dm.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich aber auch sofort der Impuls bei allgemeiner Lage des Drehungsvektors. Wie wir wissen, setzen sich sowohl Drehgeschwindigkeiten als Drehkräfte (Impulse) wie Vektoren zusammen, d. h. so dafs sich ihre Komponenten einfach addieren. Demnach entspricht einer Drehung $(p, q, r)$ um die Axe $p : q : r$ ein Impuls, dessen Komponenten bez. gleich der Summe der in den Gleichungen (1), (1′) und (1″) berechneten Impulskomponenten sind. Der zugehörige Impuls lautet daher:

$$(2) \quad \begin{cases} L = \phantom{-}p\int (Y^2 + Z^2)\,dm - q\int XY\,dm \qquad - r\int XZ\,dm, \\ M = -p\int YX\,dm \qquad + q\int (Z^2 + X^2)\,dm - r\int YZ\,dm, \\ N = -p\int ZX\,dm \qquad - q\int ZY\,dm \qquad + r\int (X^2 + Y^2)\,dm. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen nehmen sofort eine sehr übersichtliche Form an, wenn wir die folgende quadratische Form der Geschwindigkeitskoordinaten

$$(3) \quad T = \frac{1}{2}\Big\{p^2\int (Y^2 + Z^2)\,dm + q^2\int (Z^2 + X^2)\,dm + r^2\int (X^2 + Y^2)\,dm$$
$$- 2qr\int YZ\,dm - 2rp\int ZX\,dm - 2pq\int XY\,dm\Big\}$$

einführen. *Dann ergiebt sich nämlich einfach*

$$(4) \qquad L = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Wir fragen nach der mechanischen Bedeutung unserer quadratischen Form $T$. Es zeigt sich, dafs $T$ die *lebendige Kraft des Kreisels,* d. h. *diejenige Arbeit ist, welche der Impuls bei der Erzeugung des instantanen Bewegungszustandes leistet.*

In der That, berechnen wir diese Arbeit, indem wir sie zunächst aus den Einzelarbeiten zusammensetzen, welche die an den Massenteilchen des Körpers angreifenden Einzelimpulse liefern. Nach pag. 75 beträgt die Arbeit, welche an dem Massenteilchen $dm$ bei der Erzeugung der Geschwindigkeit $(x', y', z')$ geleistet wird,

$$dA = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm.$$

Die Gesamtarbeit berechnet sich hieraus durch Integration über die ganze Masse des Körpers; sie wird

$$\frac{1}{2}\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm.$$

Diesen Ausdruck formen wir um, indem wir die Drehgeschwindigkeit $p, q, r$ einführen. Die hierzu erforderlichen Ausdrücke der $x', y', z'$ haben wir pag. 41 hergestellt. Wir erhalten daraufhin:

$$\frac{1}{2}\int \{(-Zq + Yr)^2 + (-Xr + Zp)^2 + (-Yp + Xq)^2\}\,dm.$$

Die Ausrechnung dieses Ausdrucks liefert aber gerade die rechte Seite der Gleichung (3). Wir werden also sagen:

*Die lebendige Kraft des Kreisels ist eine homogene quadratische Funktion der Komponenten des Drehungsvektors mit konstanten, d. h. nur von der Massenverteilung des Körpers abhängigen Koeffizienten.*

Nachdem wir die Bedeutung von $T$ erkannt haben, können wir die Gleichungen (4) als das genaue Analogon zu den pag. 76 für den einzelnen Massenpunkt angegebenen Gleichungen (7) aussprechen.

Wir werden den Ausdruck der lebendigen Kraft noch in eine Reihe anderer interessanter Formen schreiben. Zunächst bemerken wir, daſs nach einem bekannten Satz über homogene Funktionen

$$T = \frac{1}{2}\left(p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) können wir statt dessen schreiben

$$T = \frac{1}{2}(pL + qM + rN). \tag{5}$$

Diese Formel drücken wir in Worten folgendermaſsen aus:

*Die lebendige Kraft ist gleich dem halben Produkt aus der Gröſse des Impulsvektors in die Projektion des Drehungsvektors auf jenen (oder auch gleich dem halben Produkt aus der Gröſse des Drehungsvektors in die Projektion des Impulsvektors auf diesen).*

In der Sprache der Vektoranalysis (vgl. pag. 62) können wir hierfür auch kurz sagen:

*Die lebendige Kraft ist gleich dem halben skalaren Produkt aus dem Vektor des Impulses und dem der Drehung.*

Ohne auf den Aufbau des starren Körpers aus seinen einzelnen Massenteilchen, wie hier geschehen, einzugehen, hätten wir die letzte Formel auch direkt aus der Betrachtung des Gesamtsystems erschlieſsen können, indem wir eine pag. 75 gegebene Betrachtung vom einzelnen Massenpunkte direkt auf unsern Fall übertragen.

Wir knüpfen an die Arbeit an, welche eine beliebige kontinuierliche Drehkraft ($D^x$, $D^y$, $D^z$) an unserem Kreisel bei der Verrückung $pdt$, $qdt$, $rdt$ leistet. Diese beträgt nach Gleichung (2′) von pag. 91:

$$dA = (D^x p + D^y q + D^z r) dt. \tag{6}$$

Hieraus leiten wir den Ausdruck für die endliche Arbeit, welche unser Drehstoſs $L$, $M$, $N$ bei der *Erzeugung* der Drehung $p$, $q$, $r$ leistet, d. h. eben den Ausdruck für die lebendige Kraft, durch Integration nach der Zeit folgendermaſsen ab.

Wir können unsern Drehstoſs $L$, $M$, $N$ auffassen als eine kontinuierliche Drehkraft von konstantem sehr groſsen Betrage und sehr kleiner Wirkungsdauer $\Delta t$. Wir können also setzen:

$$L = \int_0^{\Delta t} D^x dt = D^x \Delta t, \quad M = \int_0^{\Delta t} D^y dt = D^y \Delta t, \quad N = \int_0^{\Delta t} D^z dt = D^z \Delta t. \tag{7}$$

Zu Beginn des Intervalles $\Delta t$ ist die Drehgeschwindigkeit des Körpers gleich Null, am Ende von $\Delta t$ gleich ($p$, $q$, $r$). Wir müssen nun annehmen, daſs in der Zwischenzeit die Geschwindigkeit *gleichmäſsig* anwächst, so daſs

$$\int_0^{\Delta t} p dt = \frac{1}{2} p \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} q dt = \frac{1}{2} q \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} r \Delta t = \frac{1}{2} r \Delta t. \tag{8}$$

Integrieren wir darauf den Ausdruck (6) für die Arbeit zwischen $t = 0$ und $t = \Delta t$, so erhalten wir mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\left\{\begin{aligned} T &= \int_0^{\Delta t} dA = D^x \int_0^{\Delta t} p dt + D^y \int_0^{\Delta t} q dt + D^z \int_0^{\Delta t} r dt \\ &= \frac{1}{2} (D^x p + D^y q + D^z r) \Delta t \\ &= \frac{1}{2} (Lp + Mq + Nr). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Wir kommen also gerade zur Gleichung (5) zurück.

In den Gleichungen (4) haben wir $T$ als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten $p$, $q$, $r$ vorausgesetzt. Wir können aber $T$ auch als Funktion der Impulskoordinaten berechnen. Es genügt zu dem Zwecke die Gleichungen (2) nach $p$, $q$, $r$ aufzulösen und die so gefundenen Werte der letzteren Gröſsen in (5) einzutragen. Aus (2) ergiebt sich zunächst

$$\left\{\begin{aligned} p &= A_{11} L + A_{21} M + A_{31} N, \\ q &= A_{12} L + A_{22} M + A_{32} N, \\ r &= A_{13} L + A_{23} M + A_{33} N, \end{aligned}\right. \tag{2′}$$

wo die $A_{ik}$ die durch den Wert der Determinante dividierten Unterdeterminanten des Koeffizientenschemas in (2) bedeuten und wo $A_{ik} = A_{ki}$ ist. Mit Rücksicht auf (5) bekommen wir nun für $T$ folgenden Ausdruck:

$$(3') \qquad T = \frac{1}{2}(A_{11}L^2 + 2A_{12}LM + \cdots + A_{33}N^2).$$

*Als Funktion der Impulskoordinaten aufgefasst wird $T$ wiederum eine homogene quadratische Form mit konstanten Koeffizienten.*

Wir wollen noch die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion nach $L$, $M$, $N$ bilden. Offenbar werden diese gleich den rechten Seiten der Gleichungen (2'), so dafs wir die Relationen finden:

$$(4') \qquad p = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N}.$$

*Diese Gleichungen* (4') *stellen die Auflösung der Gleichungen* (4) *in einer eigentümlich symmetrischen Form geschrieben vor.* Wohlgemerkt ist dabei $T$ oben als Funktion der $p$, $q$, $r$, jetzt als Funktion der $L$, $M$, $N$ vorausgesetzt.

Die Gleichungen (4) oder die ihnen äquivalenten Gleichungen (4') liefern die gesuchte Beziehung zwischen Impuls- und Drehungsvektor in der allgemeinsten Form. Sie stellen die ersten und wichtigsten Gleichungen der Kinetik des Kreisels vor. Übrigens haben sie genau dieselbe Form wie die analogen Gleichungen beim einzelnen Massenpunkte (vgl. pag. 76). Wir können, beide Gleichungstripel zusammenfassend, die Aussage von pag. 77 wiederholen:

*Die Impuls-(Geschwindigkeits-)Komponenten sind die nach den Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten genommenen partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft, wobei wir uns die letztere als Funktion der Geschwindigkeits-(Impuls-)Komponenten ausgedrückt zu denken haben.*

Sodann bringen wir den Ausdruck der lebendigen Kraft mit dem *Begriff der Trägheitsmomente* in Zusammenhang. Bekanntlich bezeichnet man die Koeffizienten von $\frac{1}{2}p^2$, $\frac{1}{2}q^2$, $\frac{1}{2}r^2$ in dem Ausdrucke (3) als die Trägheitsmomente des Körpers bez. um die Axen $X$, $Y$, $Z$. Andrerseits nennt man die Koeffizienten von $-pq$, $-qr$, $-rp$ in demselben Ausdrucke gelegentlich „Trägheitsprodukte“ (oder auch „Centrifugalmomente“). Ferner wird das Trägheitsmoment $M$ des Körpers um eine beliebige Axe durch die Gleichung definiert

$$M = \int R^2 dm,$$

wo $R$ den Abstand des Teilchens $dm$ von der betr. Axe bedeutet, und wo das Integral über die ganze Masse des Körpers zu erstrecken ist. Zu demselben Integrale kommen wir aber auch von dem Ausdrucke

der lebendigen Kraft aus. Bemerken wir, dafs die Lineargeschwindigkeit eines Teilchens $dm$ unseres Körpers gleich dem Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die instantane Drehungsaxe in den Abstand des Teilchens von dieser Axe ist; bezeichnen wir erstere mit $\Omega$, letzteren mit $R$, so gilt demnach

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Omega^2 R^2.$$

Mithin wird

$$(10) \qquad T = \frac{1}{2}\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)dm = \frac{\Omega^2}{2}\int R^2 dm = \frac{M}{2}\Omega^2.$$

Den Ausdruck $T = \frac{M}{2}\Omega^2$ für die lebendige Kraft des starren Körpers vergleichen wir mit der Formel $T = \frac{m}{2}v^2$ für die lebendige Kraft des einzelnen Massenpunktes. Wir werden dann sagen können:

*Die lebendige Kraft des Kreisels berechnet sich genau ebenso aus der Winkelgeschwindigkeit und dem zur instantanen Drehaxe gehörigen Trägheitsmoment, wie die lebendige Kraft des einzelnen Punktes aus Geschwindigkeit und Masse.*

Wir mögen die Gleichung (10) ferner dazu benutzen, um den allgemeinen Ausdruck für $M$ aufzustellen. Bezeichnen wir die Richtungscosinus der instantanen Drehungsaxe $p:q:r$ gegen das Koordinatenkreuz $XYZ$ mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, wobei

$$\alpha = \frac{p}{\Omega}, \quad \beta = \frac{q}{\Omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\Omega},$$

so ergiebt sich aus (10) und (3):

$$(11) \begin{cases} M = \alpha^2\int (Y^2 + Z^2)dm + \beta^2\int (Z^2 + X^2)dm + \gamma^2\int (X^2 + Y^2)dm \\ \qquad - 2\beta\gamma\int YZdm - 2\gamma\alpha\int ZXdm - 2\alpha\beta\int XYdm. \end{cases}$$

*Das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) ist also eine homogene quadratische Funktion der Richtungscosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und zwar hängt es von diesen Gröfsen in ganz derselben Weise ab, wie $2T$ von den Geschwindigkeitskomponenten $p$, $q$, $r$.*

Wir führen sodann den seit Poinsot allgemein üblichen Begriff des *Trägheitsellipsoides* ein, indem wir zunächst auf der Axe $(\alpha, \beta, \gamma)$ die Strecke $\varrho = \sqrt{\frac{1}{M}}$ als Radiusvektor abtragen. Der Endpunkt dieser Strecke besitzt die Koordinaten

$$\xi = \alpha\varrho, \quad \eta = \beta\varrho, \quad \zeta = \gamma\varrho.$$

Machen wir die gleiche Konstruktion für alle möglichen Axen $(\alpha, \beta, \gamma)$,

so entsteht eine Fläche zweiten Grades u. zw. ein Ellipsoid, welches die Gleichung hat

$$1 = \xi^2 \int (Y^2 + Z^2)\, dm + \eta^2 \int (Z^2 + X^2)\, dm + \zeta^2 \int (X^2 + Y^2)\, dm$$
$$- 2\eta\zeta \int YZ\, dm - 2\zeta\xi \int ZX\, dm - 2\xi\eta \int XY\, dm.$$

Die drei Hauptaxen dieses Ellipsoides sind die sog. *Hauptträgheitsaxen.* Denken wir uns die Koordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$ in die Hauptträgheitsaxen verlegt, so müssen in der Gleichung des Trägheitsellipsoides die Produkte $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ verschwinden. *Die Hauptträgheitsaxen sind also dadurch ausgezeichnet, daſs in Bezug auf sie als Koordinatenaxen die Trägheitsprodukte gleich Null werden.* Die Gleichung des Trägheitsellipsoides nimmt in diesen Koordinaten die Form an

$$(12) \qquad 1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2,$$

wo die Gröſsen

$$A = \int (Y^2 + Z^2)\, dm, \quad B = \int (Z^2 + X^2)\, dm, \quad C = \int (X^2 + Y^2)\, dm$$

die *Hauptträgheitsmomente* in Bezug auf den Unterstützungspunkt $O$ heiſsen.

Übrigens kann nicht jedes Ellipsoid als Trägheitsellipsoid figurieren. Man erkennt nämlich aus den angegebenen Ausdrücken der $A$, $B$, $C$ leicht, daſs diese Gröſsen gewissen Ungleichungen genügen:

$$A < B + C, \quad B < C + A, \quad C < A + B,$$

Ungleichungen, welche wir am einfachsten in die Aussage zusammenfassen: Die $A$, $B$, $C$ sind Seiten eines möglichen geradlinigen Dreiecks. *Danach gehören also nur solche Ellipsoide zu wirklichen Körpern als Trägheitsellipsoide hinzu, aus deren reziproken Hauptaxenquadraten ein Dreieck konstruiert werden kann.*

Der Ausdruck (11) für das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe geht bei unserer jetzigen Wahl der Coordinatenaxen über in

$$M = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Ebenso wie dieser Ausdruck transformiert sich aber auch die lebendige Kraft des Körpers. Nach (10) erhalten wir für letztere

$$(13) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Endlich vereinfachen sich auch die Gleichungen (2) erheblich, wenn wir das Koordinatenkreuz mit dem „Hauptträgheitskreuz" zusammenfallen lassen. *Es wird nämlich der Impulsvector* ($L$, $M$, $N$),

*welcher zu einem beliebigen Drehungsvector* $(p, q, r)$ *gehört, nunmehr durch die folgenden fundamentalen Gleichungen bestimmt:*

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr. \tag{14}$$

In Folge dessen ergiebt sich aus (13) noch folgender Ausdruck der lebendigen Kraft in den Impulskoordinaten:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right). \tag{13'}$$

Wir werden aus den Gleichungen (14) ebenso wie aus den früheren Gleichungen (1) schliefsen können, dafs Drehungsvektor und Impulsvektor im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Winkel mit einander bilden. In der That ist, sofern die Hauptträgheitsmomente $A$, $B$, $C$ sämtlich von einander verschieden sind, die Proportion

$$L : M : N = p : q : r$$

nur dann erfüllt, wenn zwei Komponenten des Drehungsvektors (Impulsvektors) verschwinden. *Drehungsvektor und Impulsvektor fallen also nur dann zusammen, wenn einer der beiden Vektoren (und also zugleich der andere) in einer der drei Hauptträgheitsaxen liegt.*

Der Zusammenhang zwischen unseren beiden Vektoren läfst sich endlich in geometrischer Form durch eine einfache Konstruktion beschreiben, welche im Wesentlichen schon von Poinsot angegeben ist.

Wir gehen von dem Trägheitsellipsoide

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

aus und legen durch den Endpunkt des Drehungsvektors $p$, $q$, $r$ das mit dem Trägheitsellipsoide ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoid hindurch. Dieses wird die Gleichung haben

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

Im Endpunkte des Drehungsvektors legen wir sodann die Tangentialebene an das letztgenannte Ellipsoid:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = 2T.$$

Das Lot von $O$ auf diese bekommt die Richtung

$$Ap : Bq : Cr = L : M : N,$$

d. h. die Richtung des Impulsvektors. Die Länge des Lotes beträgt

$$\frac{2T}{G},$$

wo

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

die Länge des Impulsvektors bedeutet. Ist uns also der Drehungs-

vektor und mithin auch die Gröfse $T$ der lebendigen Kraft gegeben, so bestimmt sich aus unserer Konstruktion die Richtung und auch die Gröfse des Impulses. Insbesondere können wir den Satz aussprechen:

*Der Richtung nach liegt der Impulsvektor senkrecht zu derjenigen Ebene, welche dem Drehungsvektor bezüglich des Trägheitsellipsoides konjugiert ist.*

Eine ganz analoge Konstruktion führt dazu, wenn der Impulsvektor gegeben ist, Gröfse und Richtung des Drehungsvektors zu bestimmen. Wir legen durch den Endpunkt des Impulsvektors die zu ihm normale Ebene. Ihre Gleichung wird:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = G^2.$$

Unter den mit dem Trägheitsellipsoide ähnlichen und ähnlich gelegenen Flächen giebt es eine, welche unsere Ebene berührt. Es ist dieses das Ellipsoid:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = \frac{G^4}{2T}.$$

Die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit $O$ liefert dann die Richtung des Drehungsvektors. Die Gröfse desselben erfahren wir, wenn wir irgend eine Lineardimension des letztgenannten Ellipsoides mit der entsprechenden Lineardimension des Trägheitsellipsoides vergleichen. Zwei solche Längen stehen in dem Verhältnisse $G^2 : \sqrt{2T}$. Da nun $G$ gegeben, so ist hiernach die Gröfse von $T$ und mithin auch die Länge des Drehungsvektors bekannt. —

Es wäre nicht schwer gewesen, die entsprechenden Entwickelungen gleich allgemeiner für den Fall des frei beweglichen starren Körpers zu geben. Wir können uns darauf beschränken, die Resultate für diesen Fall direkt hinzuschreiben, weil ihre Ableitung von den obigen Entwickelungen nur wenig verschieden ist.

Wir bezeichnen die Koordinaten der Impulsschraube mit $X$, $Y$, $Z$ $L$, $M$, $N$, die der Bewegungsschraube, wie früher, mit $x'$, $y'$, $z'$, $p$, $q$, $r$ Am einfachsten bestimmen sich die ersteren Gröfsen durch die letzteren vermittelst der Gleichungen:

$$(16)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{\partial T}{\partial x'}, & Y = \dfrac{\partial T}{\partial y'}, \quad Z = \dfrac{\partial T}{\partial z'}, \\ L = \dfrac{\partial T}{\partial p}, & M = \dfrac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \dfrac{\partial T}{\partial r}. \end{cases}$$

$T$ ist hierin der Ausdruck der lebendigen Kraft, als Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten geschrieben. Um diesen Ausdruck möglichst bequem zu gestalten, legt man den Bezugspunkt in den Schwerpunkt und lässt das im Körper feste Koordinatensystem mit den durch den

Schwerpunkt gehenden Hauptaxen zusammenfallen. Dann wird nämlich einfach

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

In den Impulskoordinaten geschrieben nimmt $T$ die Form an:

$$T = \frac{1}{2m}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right).$$

Hieraus erkennt man, daſs die Umkehrung der Gleichungen (16) lautet

$$(16') \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial T}{\partial X}, & y' = \frac{\partial T}{\partial Y}, & z' = \frac{\partial T}{\partial Z}, \\ p = \frac{\partial T}{\partial L}, & q = \frac{\partial T}{\partial M}, & r = \frac{\partial T}{\partial N}, \end{cases}$$

wo bei den Differentiationen der zuletzt angegebene Ausdruck von $T$ zu benutzen ist. Diese Gleichungen sind hier allerdings der Einfachheit wegen nur für eine spezielle Lage des Bezugspunktes und bei spezieller Wahl der Koordinatenaxen $XYZ$ abgeleitet. Sie sind indessen hiervon unabhängig und gelten ebenso allgemein wie die Gleichungen (16).

Die Gleichungen (16) und (16′) sind in ihrem ersten auf die Bewegung des Schwerpunkts bezüglichen Teile mit den Gleichungen (7) und (7′) des ersten Paragraphen, in ihrem zweiten auf die Bewegung um den Schwerpunkt bezüglichen Teile mit den Gleichungen (4) und (4′) dieses Paragraphen genau identisch. Sie stellen die ersten und wichtigsten Bestimmungsgleichungen der Kinetik des freien starren Körpers dar.

Aus den oben angegebenen Ausdrücken für die lebendige Kraft ergiebt sich unmittelbar die folgende Gleichung

$$T = \frac{1}{2}(x'X + y'Y + z'Z + pL + qM + rN),$$

welche natürlich wieder direkt aus dem Ausdrucke (2) von pag. 90 für die bei einer unendlich kleinen Verrückung geleistete Arbeit abgeleitet werden kann. Die Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung hat natürlich eine einfache geometrische Bedeutung, welche nur von der Beschaffenheit der beiden Schrauben und ihrer gegenseitigen Lage, nicht von ihrer absoluten Stellung im Raume abhängt, und wird das *Moment der beiden Schrauben auf einander* genannt. Das Moment drückt sich in folgender Weise durch die Ganghöhen $h$ und $h'$ der beiden Schrauben, den kürzesten Abstand $\Delta$, den Neigungswinkel $\varphi$ der beiden Schraubenaxen und die Gröſse der Drehgeschwindigkeit $\Omega$ sowie die Gröſse des Schiebeimpulses $S$ aus*):

$$\Omega S\{2\pi\Delta \sin\varphi + (h + h')\cos\varphi\}.$$

---

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. II, pg. 368. Ball bezeichnet l. c. den fraglichen Ausdruck als den „virtuellen Koeffizienten" der Schrauben.

Der Begriff des Impulses beim allgemeinen Kreisel ist von Poinsot in den mehrfach zitierten Arbeiten vollständig entwickelt worden. Die Bezeichnung Poinsot's lautet *couple d'impulsion* (Impulsmoment) (in der deutschen Bearbeitung von Schellbach als „das die Bewegung anregende Kräftepaar“ übersetzt).

## § 4. Übertragung der vorhergehenden Resultate auf den Spezialfall des symmetrischen Kreisels.

Wir gehen jetzt speziell auf den symmetrischen Kreisel ein, nehmen also an, daſs unser Körper Rotationssymmetrie um die Figurenaxe besitzt. Es wird die Frage sein, welche Vereinfachungen sich in den vorangehenden kinetischen Betrachtungen aus dieser Annahme ergeben. Ebenso wie die Massenverteilung des Körpers besitzt natürlich auch das Trägheitsellipsoid Rotationssymmetrie um die Figurenaxe. Das Trägheitsellipsoid wird also eine Rotationsfläche. Auſser der Figurenaxe werden alle Axen der Äquatorebene des Kreisels Hauptaxen des Ellipsoids und Hauptträgheitsaxen des Körpers. Alle diese Hauptaxen und alle zugehörigen Hauptträgheitsmomente sind überdies einander gleich.

Wollen wir den Kreisel auf ein Hauptträgheitskreuz als Koordinatenkreuz beziehen, so brauchen wir nur etwa die $Z$-Axe in die Figurenaxe zu legen; dann fallen die Axen $X$ und $Y$ in die Äquatorebene und werden von selbst Hauptträgheitsaxen von gleichem Hauptträgheitsmoment. Bezeichnen wir die Hauptträgheitsmomente um die $X$-, $Y$- und $Z$-Axe wie früher mit $A$, $B$ und $C$, so haben wir hiernach *die für den symmetrischen Kreisel charakteristische Beziehung*

$$A = B.$$

Die Gleichung des Trägheitsellipsoids lautet daher bei der jetzigen Wahl des Koordinatensystems

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1;$$

der Ausdruck der lebendigen Kraft wird

$$T = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right),$$

und die Relationen zwischen den Komponenten des Impulses und des Drehungsvektors schreiben sich in ihrer einfachsten Form:

$$L = Ap, \quad M = Aq, \quad N = Cr.$$

Wir wollen hier zunächst eine schon in der Einleitung in Aussicht gestellte Verallgemeinerung der Begriffsbestimmung des symmetrischen Kreisels anknüpfen. *Wir wollen einen starren Körper mit*

*festem Unterstützungspunkte O immer dann einen symmetrischen Kreisel (oder Kreisel schlechtweg) nennen, wenn von den drei Hauptträgheitsmomenten durch O zwei einander gleich werden und überdies der Schwerpunkt auf der Axe des dritten Hauptträgheitsmomentes gelegen ist.* Ein solcher Körper wird sich hinsichtlich aller Fragen, die die Rotation um den Punkt $O$ unter dem Einflusse der Schwere betreffen, genau so verhalten, wie ein Körper, der die früher vorausgesetzte *geometrische* Rotationssymmetrie um die Figurenaxe besitzt. Desgleichen werden wir die Bezeichnung „Figurenaxe und Äquatorebene des Kreisels“ auf die Figurenaxe und die Äquatorebene des Trägheitsellipsoides unseres allgemeineren Körpers übertragen. Die Äquatorebene ist alsdann dadurch ausgezeichnet, dafs ihre sämmtlichen Axen Hauptträgheitsaxen von dem gleichen Hauptträgheitsmomente $A$ sind. Wir können von einem solchen Körper sagen, dafs er zwar keine *geometrische*, aber eine *mechanische Rotationssymmetrie um die Figurenaxe* besitzt.

Im Übrigen werden wir drei Unterarten von symmetrischen Kreiseln unterscheiden, je nachdem das Trägheitsellipsoid ein verlängertes, ein abgeplattetes Rotationsellipsoid oder im Speziellen eine Kugel ist. Wir sprechen demnach von einem *verlängerten*, einem *abgeplatteten Kreisel* oder einem *Kugelkreisel*. Der Kugelkreisel ist speziell dadurch ausgezeichnet, dafs jede durch $O$ verlaufende Axe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers darstellt. Da die Hauptaxen des Trägheitsellipsoides die reziproken Werte von $\sqrt{A}$ und $\sqrt{C}$ sind, so wird das Trägheitsellipsoid ein verlängertes, wenn $A > C$, ein abgeplattetes, wenn $A < C$. Im Grenzfalle $A = C$ geht das Trägheitsellipsoid in eine Kugel über. Demnach lautet die Bedingung für

*einen verlängerten Kreisel*: $A > C$,
„ *abgeplatteten* „ : $A < C$,
„ *Kugelkreisel* „ : $A = C$.

Als Beispiel der drei Arten von Kreiseln mit *geometrischer* Rotationssymmetrie können wir allemal ein mit homogener Masse erfülltes Rotationsellipsoid nehmen, welches je nachdem verlängert, abgeplattet oder eine Kugel ist. Es ist aber auch leicht Beispiele von Kreiseln mit nur *mechanischer* Rotationssymmetrie zu konstruieren. In der That stellen vier Massenpunkte von gleicher Masse, welche die Ecken eines Quadrates bilden und mit einander durch starre massenlose Stäbe verbunden gedacht werden, einen *symmetrischen Kreisel mit abgeplattetem Trägheitsellipsoid* dar, welcher nur *mechanische* Rotationssymmetrie besitzt. Befestigen wir auf der Figurenaxe dieses Kreisels, d. h. auf der im Mittelpunkte $O$ des Quadrates errichteten Normalen einen fünften

Massenpunkt, so erhalten wir je nach dem Abstande dieses Punktes von $O$ und je nach seiner Masse einen verlängerten, einen abgeplatteten Kreisel oder einen Kugelkreisel von gleichfalls nur *mechanischer* Rotationssymmetrie. Insbesondere betonen wir des Späteren wegen, dafs wir auf die angegebene Weise immer einen *Kugelkreisel* herstellen können, *welcher ein beliebig vorgegebenes (positives oder negatives) Drehmoment der Schwere P besitzt, dessen Schwerpunkt also nicht mit O zusammenfällt.* Wir können zu dem Zwecke die Massen der zuerst genannten vier Punkte etwa gleich 1 gr und die Seiten des Quadrates, in deren Ecken sie befestigt sind, gleich 1 cm wählen. Über den fünften Punkt haben wir dann so zu verfügen, dafs (unter $g$ die Beschleunigung der Schwere verstanden) seine Masse $m$ und sein Abstand $E$ von $O$ bez. werden

$$m = \left(\frac{P}{g}\right)^2, \quad E = \frac{g}{P}.$$

Wir führen nun die *Poinsotsche Konstruktion*, durch welche wir uns den Zusammenhang zwischen Impuls- und Drehungsaxe veranschaulichten, für den symmetrischen Kreisel durch. Die Vereinfachung, welche sich gegen früher ergiebt, besteht darin, dafs wir die Konstruktion in der Ebene ausführen können, nämlich in der durch die instantane Drehungsaxe gehenden Meridianebene. Dabei macht sich ein charakteristischer Unterschied zwischen unseren drei Kreiselarten bemerklich.

Wir denken uns etwa den Drehungsvektor gegeben. Durch die Axe $OR$ desselben legen wir die Meridianebene $FOR$, welche wir im Folgenden als Zeichenebene benutzen werden. Die Figurenaxe zeichnen wir vertikal nach oben. Die Tangentialebene in dem Punkte $R'$, dem Schnittpunkte der Drehungsaxe mit dem Trägheitsellipsoid oder einem der pag. 101 benutzten ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide, steht senkrecht auf der Zeichenebene, mithin fällt das Lot von $O$ auf diese Ebene in die Zeichenebene hinein. Statt der Tangentialebene genügt es daher die in unserer Meridianebene gelegene Tangente an das Trägheitsellipsoid zu betrachten. Im Einzelnen stellt sich die Sache so:

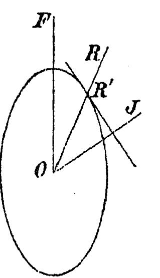


Fig. 13.

1. *Der verlängerte Kreisel*, $A > C$. Das Lot von $O$ auf die Tangente in $R'$ fällt auf die entgegengesetzte Seite der Rotationsaxe wie die Figurenaxe (vgl. Figur 13). *Bei dem verlängerten Kreisel liegt also die Rotationsaxe zwischen der Impuls- und der Figurenaxe.*

2. *Der abgeplattete Kreisel*, $A < C$. Das Lot von $O$ auf die Tangente in $R'$ findet sich in dem spitzen Winkel zwischen Figurenaxe

und Rotationsaxe (vgl. Fig. 14.) vor. *Beim abgeplatteten Kreisel liegt also die Impulsaxe zwischen der Rotations- und der Figurenaxe.*

3. *Der Kugelkreisel*, $A = C$. Da der Meridianschnitt des Trägheitsellipsoides in einen Kreis ausartet, geht das Lot von $O$ auf die Tangente

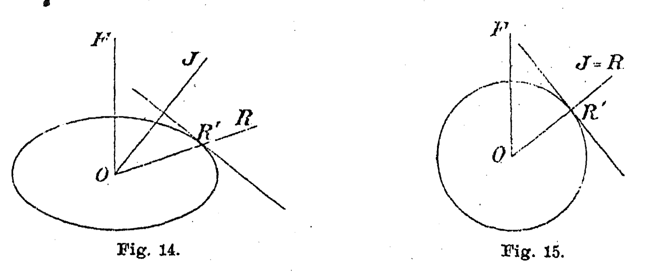



Fig. 14. Fig. 15.

durch den Berührungspunkt $R'$ derselben hindurch (vgl. Fig. 15). *Beim Kugelkreisel fallen somit Impuls- und Rotationsaxe notwendig zusammen.*

Es verhält sich also nur der Kugelkreisel sozusagen „*isotrop*", d. h. in der Weise, daſs die Axe der Drehbewegung mit der Axe der die Bewegung erzeugenden Drehkraft zusammenfällt. Der abgeplattete und der verlängerte Kreisel zeigen das entsprechende Verhalten nur dann, wenn die Drehung um die Figurenaxe oder um eine Axe der Äquatorebene erfolgt, wie unmittelbar aus unserer Konstruktion ersichtlich ist. Alle diese Fälle sind übrigens in unserer obigen allgemeinen Regel enthalten, wonach der Drehungsvektor und der Impulsvektor dann und nur dann ihrer Richtung nach zusammenfallen, wenn einer der beiden Vektoren in einer Hauptträgheitsaxe des Körpers liegt. —

Während wir bisher den Bewegungszustand durch die Komponenten $p$, $q$, $r$ ausgedrückt und entsprechend den Impuls durch die Komponenten $L$, $M$, $N$ dargestellt haben, wollen wir uns nun die instantane Drehung des symmetrischen Kreisels durch die Änderung der Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ gegeben denken und nach den „zugehörigen Komponenten des Impulses" fragen. Übrigens gelten die folgenden Überlegungen auch für den allgemeinen Kreisel. Wir geben diese Entwickelungen erst hier beim symmetrischen Kreisel nur deshalb, weil die Formeln für jenen etwas lang werden.

Wie wir allgemein die zu einer Geschwindigkeitskoordinate hinzugehörige Kraftkoordinate definieren wollen, haben wir für den starren Körper pag. 92 bereits festgesetzt. (Wir verweisen auch auf die ganz ähnliche Betrachtung von pag. 78 beim einzelnen Massenpunkte). Was von den Kraftkoordinaten gesagt ist, gilt natürlich ebenso für die Impulskoordinaten; was über den frei beweglichen starren Körper entwickelt wurde, überträgt sich in unmittelbar verständlicher Weise auf den Kreisel.

Nach den angezogenen Regeln haben wir von den Gleichungen auszugehen, welche die alten Geschwindigkeitskoordinaten $p$, $q$, $r$ durch die neuen $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ ausdrücken. Es sind dieses die „kinematischen" Gleichungen von pag. 45:

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \psi' \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\vartheta \cos\varphi - \vartheta' \sin\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

In Folge dessen hängen die neuen Impulskomponenten, die wir mit $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ bezeichnen, mit den alten folgendermaſsen zusammen:

$$\begin{aligned} [\Phi] &= N, \\ [\Psi] &= L \sin\vartheta \sin\varphi + M \sin\vartheta \cos\varphi + N \cos\vartheta, \\ [\Theta] &= L \cos\varphi - M \sin\varphi. \end{aligned}$$

Hier ersetzen wir noch $L, M, N$ durch ihre Ausdrücke in den $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$, die sich aus den Gleichungen (1) ergeben, indem wir diese bez. mit $A$, $A$ und $C$ multiplizieren. Dann bekommen wir:

$$(2)\qquad \begin{cases} [\Phi] = C(\varphi' + \psi' \cos\vartheta), \\ [\Psi] = C \cos\vartheta \varphi' + (C \cos^2\vartheta + A \sin^2\vartheta) \psi', \\ [\Theta] = A\vartheta'. \end{cases}$$

Wir weisen abermals auf den Zusammenhang hin, welcher zwischen den Impuls- und Geschwindigkeitskoordinaten und den partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft besteht. Daſs dieser Zusammenhang, welchen wir von den Geschwindigkeitskoordinaten $p$, $q$, $r$ her kennen, bestehen bleibt, wenn wir die neuen Koordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ einführen, welche mit den alten linear zusammenhängen, ist bei unserer Definition der Impulskoordinaten an sich selbstverständlich. Wir mögen uns davon aber immerhin wie folgt überzeugen. Der Ausdruck der lebendigen Kraft

$$T = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right)$$

lautet den Gleichungen (1) zufolge in den Koordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ geschrieben:

$$(3)\qquad T = \frac{1}{2}\left(A(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta . \psi'^2) + C(\varphi' + \cos\vartheta . \psi')^2\right).$$

Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar als Analogon zu den Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen

$$(4)\qquad [\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}.$$

Ebenso verifiziert man leicht, daſs die zu den Gleichungen (4') analogen Beziehungen statthaben.

Schliefslich fragen wir nach der *geometrischen Bedeutung unserer Impulskoordinaten* $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$; wir folgern diese aus der geometrischen Bedeutung, welche der Ausdruck (2′) von pag. 91 für die Arbeit einer unendlich kleinen Verrückung unseres Kreisels besitzt.

Ebenso, wie wir pag. 96 den Ausdruck der lebendigen Kraft auffassen konnten als das halbe Produkt aus der Länge des Drehungsvektors in die Projektion des Impulsvektors auf diesen, so werden wir jetzt sagen: *Der Ausdruck*

$$dA = (D^x p + D^y q + D^z r)\, dt$$

*für die Arbeit, welche eine beliebige an unserm Kreisel angreifende Drehkraft $D$ bei der unendlich kleinen Verrückung $(p, q, r)\, dt$ leisten würde, ist bis auf den Faktor $dt$ gleich dem Produkt aus der Gröfse der Drehgeschwindigkeit in die Projektion der Drehkraft auf die Axe der letzteren.* Führen wir nun unsere Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ statt der $p$, $q$, $r$ ein, so behält der Arbeitsausdruck, wie wir wissen, seine frühere Form. Die vorstehende Gleichung geht daher, wenn wir die den $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ zugehörigen Koordinaten von $D$ bez. mit $\Phi$, $\Psi$, $\Theta$ bezeichnen, in die folgende über:

$$dA = (\Phi \varphi' + \Psi \psi' + \Theta \vartheta')\, dt.$$

Wir betrachten nun speziell eine unendlich kleine Drehung, für welche $\psi' = \vartheta' = 0$ ist, so dafs die entsprechende Arbeit gleich $\Phi \varphi' dt$ wird. In diesem Falle liegt, da $\varphi'$ eine Drehung um die Figurenaxe bedeutet, der Drehungsvektor in der Figurenaxe. Aus der geometrischen Bedeutung von $dA$ folgt dann sofort, *dafs $\Phi$ die senkrechte Projektion des Vektors $D$ auf die Figurenaxe bedeutet.* Ferner fallen die Drehungsvektoren $\psi'$ und $\vartheta'$ bez. in die Richtung der Vertikalen und der Knotenlinie. Hieraus folgt in gleicher Weise, *dafs $\Psi$ und $\Theta$ die senkrechten Projektionen des Vektors $D$ auf die Vertikale und die Knotenlinie darstellen.* Genau dieselbe geometrische Bedeutung kommt natürlich im Speziellen unseren Impulskoordinaten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ zu. *Diese Gröfsen sind bez. gleich den senkrechten Projektionen des Impulsvektors auf die Figurenaxe, die Vertikale und die Knotenlinie.*

Wir können ohne weiteres das Resultat der letzten Betrachtung dahin verallgemeinern, dafs wir sagen: *Wenn wir unter Zugrundelegung von irgend drei schiefwinkligen Axen den Drehungsvektor in Komponenten parallel diesen Axen zerlegen, erhalten wir die zugehörige Zerlegung des Kraft- oder Impulsvektors, indem wir diesen senkrecht auf jene Axe projizieren.*

## § 5. Die beiden fundamentalen Sätze über das Verhalten des Impulsvektors beim Ablauf der Bewegung.

Während wir uns bisher über den Impuls orientierten, welcher einem instantanen Bewegungszustande des Körpers entspricht oder, was dasselbe ist, über den instantanen Bewegungszustand, welcher aus einem gegebenen Impulse resultiert, wird es unsere nächste Aufgabe sein, den Ablauf der Bewegung in der Zeit zu untersuchen. Die bisher erörterte Beziehung zwischen den Vektoren des Impulses und der instantanen Drehung war ganz unabhängig von den äufseren Umständen, unter denen die Bewegung vor sich geht, d. h. von den kontinuierlichen Kräften, die auf den starren Körper wirken. Die weiteren Betrachtungen aber werden wesentlich hierdurch bestimmt. Wir machen in dieser Hinsicht einerseits die Annahme, dafs unser Körper überhaupt keinen äufseren Kräften, insbesondere auch nicht der Schwerewirkung ausgesetzt ist. Andrerseits werden wir beliebige kontinuierliche Kräfte zulassen. Wir argumentieren zunächst auf den frei beweglichen starren Körper. Dabei stellen wir der *Betrachtung des Bewegungszustandes* die *Untersuchung des Impulses* voran. Wir fragen also in erster Linie: *wie ändert sich der Impuls unseres Körpers bei der kräftefreien Bewegung?* Die Änderung des Bewegungszustandes leiten wir erst später aus dem Verhalten des Impulses her. Die Antwort auf unsere Frage lautet einfach folgendermafsen:

*Der Impuls ändert sich überhaupt nicht; er bleibt während der Bewegung im Raume konstant.*

Wir begründen diesen fundamentalen Satz von der Kinetik des einzelnen Massenpunktes aus möglichst elementar in folgender Weise.

Wir gehen von einem einzelnen Massenteilchen $P$ aus, welches frei beweglich und keinen Kräften unterworfen ist. Der Impuls eines solchen Teilchens bleibt, wie wir wissen, nach Richtung und Gröfse im Raume konstant. (Galileisches Trägheitsgesetz.)

Betrachten wir nun zwei Massenteilchen $P$ und $P'$, welche starr verbunden und übrigens keinen äufseren Kräften ausgesetzt sind. Die Wirkung der starren Verbindung ersetzen wir dynamisch durch Kräfte u. zw. haben wir im Punkte $P$ eine nach $P'$ und in $P'$ eine gleich grofse nach $P$ gerichtete Kraft. (Newtons lex tertia.) Die gemeinsame Gröfse dieser beiden Kräfte hängt von der Inanspruchnahme der starren Verbindung ab und bemifst sich nach Gröfse und Richtung der gerade geltenden Einzelimpulse von $P$ und $P'$. Fügen wir diese Kräfte — wir können sie Reaktionskräfte nennen — hinzu, so dürfen wir unsere beiden Massenpunkte weiterhin wie frei bewegliche Punkte

behandeln. Nun ändern sich in Folge des Hinzutretens der Reaktionskräfte die Einzelimpulse von $P$ und $P'$ kontinuierlich, indem sie sich mit den zu den Reaktionskräften gehörigen unendlich kleinen Stöfsen geometrisch addieren (Newtons lex secunda). Anders ist es mit dem **Gesamtimpulse des von den beiden Massen gebildeten Systems. Wir konstruieren diese Impulsschraube, indem wir die Einzelimpulse der beiden** Punkte nach den Regeln der elementaren Statik zusammensetzen. Bei dieser Konstruktion heben sich aber offenbar die beiden entgegengesetzt gleichen Reaktionskräfte in jedem Momente gegenseitig auf. Die resultierende Stofsschraube verhält sich also geradeso, als ob unsere Reaktionskräfte nicht vorhanden und unsere Massenpunkte frei wären. *Sie bleibt mithin für die ganze Dauer der Bewegung konstant.*

Nicht anders verhält sich ein System von drei starr mit einander verbundenen Massenpunkten, welche keinen äufseren Kräften unterworfen sind. Hier haben wir nicht ein, sondern drei Paare entgegengesetzt gleicher Reaktionskräfte zu betrachten, welche in den Seiten des von unsern Punkten gebildeten Dreiecks wirken. Wiederum werden durch diese die zu den Systempunkten gehörigen Einzelimpulse successive abgeändert. Für die Konstruktion der zum Gesamtsystem gehörigen Stofsschraube aber kommen die Reaktionskräfte nicht in Betracht; diese Schraube verhält sich genau so, wie wenn unsere drei Massenpunkte sich nach dem Galileischen Trägheitsgesetz frei im Raume bewegten.

Dieselbe Überlegung überträgt sich unmittelbar auf den Fall beliebig vieler irgendwie verbundener Massenpunkte und weiterhin auf ein den Raum kontinuierlich erfüllendes Massensystem, welches von keinen äufseren Kräften angegriffen wird. Sie gilt sogar für den allgemeineren Fall eines nicht starren Systems, zwischen dessen Punkten lediglich innere Kräfte wirken, die dem Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung genügen, also z. B. für einen elastischen Körper, für das Planetensystem oder für ein Flüssigkeitsquantum.

Im Falle des frei beweglichen starren Körpers sprechen wir das Resultat hier ausdrücklich als den ersten der den Ablauf der Bewegung regelnden Sätze aus:

Satz I: *Die Impulsschraube des starren Körpers bleibt bei der kräftefreien Bewegung im Raume konstant.*

Es wird nützlich sein, diesen Satz in die Sprache der gewöhnlichen analytischen Mechanik zu übertragen. Wir berechnen zu dem Zwecke die Komponenten der genannten Schraube nach der Regel von pag. 85; für $P_i^x$, $P_i^y$, $P_i^z$ haben wir dort die Komponenten der Einzelimpulse aller Massenpunkte zu nehmen, welche den Körper konstituieren, haben also zu setzen:

$$P_i^x = x_i' \Delta m_i, \quad P_i^y = y_i' \Delta m_i, \quad P_i^z = z_i' \Delta m_i$$

und haben schliefslich von der Summation zur Integration überzugehen. So erhalten wir zunächst:

$$S^x = \int x' \, dm = c',$$

$$S^y = \int y' \, dm = c'',$$

$$S^z = \int z' \, dm = c'''.$$

Die hier auftretenden Integrale sind nichts anderes wie die (mit $m$ multiplizierten) Schwerpunktsgeschwindigkeiten. *Unser Satz besagt insoweit, dafs die Geschwindigkeit des Schwerpunktes eine Konstante ist; er ist identisch mit dem einfachsten Falle des sog. Schwerpunktsatzes.*

Wir berechnen in gleicher Weise die Drehmomente $D^x$, $D^y$, $D^z$ unserer Schraube um $O$. Nach denselben Regeln wie oben ergiebt sich:

$$D^x = \int (z' y - y' z) \, dm = c^{IV},$$

$$D^y = \int (x' z - z' x) \, dm = c^{V},$$

$$D^z = \int (y' x - x' y) \, dm = c^{VI}.$$

Auch diese Gleichungen sind uns aus der gewöhnlichen Mechanik wohlbekannt; es sind dieses einfach die sog. Flächensätze. *Unser Satz ist also in seinem zweiten auf die Drehkomponenten bezüglichen Teile identisch mit den Flächensätzen,* welche, wie bekannt, bei der freien Bewegung des starren Körpers in Kraft treten.

Man bemerke noch insbesondere, dafs unsere geometrische Betrachtung gewisse einfache Integrationen impliziert, welche man bei der analytischen Ableitung auszuführen gezwungen ist. Das Äquivalent derselben bestand in der Erkenntnis, dafs die unendlich kleinen Zusatzstöfse, welche von den Reaktionskräften herrühren, sich bei der Bildung der Gesamtimpulsschraube gegenseitig zerstören, so dafs deren Gesetz sogleich in endlicher Form ausgesprochen werden kann. Dieser Weg scheint uns bei weitem instruktiver, als der umgekehrte, den Impuls des Körpers geradezu durch die Konstanten der Schwerpunkt- und der Flächensätze zu definieren. Er zwang uns nämlich bis auf die eigentliche Wurzel der Sätze, die mechanischen Prinzipien, zurückzugehen, welche sich sonst leicht hinter den Formeln verbergen, und liefs, wie wir glauben, an Durchsichtigkeit nichts zu wünschen übrig. Er entspricht übrigens durchaus den Tendenzen Poinsot's, welcher seinerseits einen

viel weniger einfachen Beweis*) mitteilt. Dagegen findet sich eine der obigen ganz ähnliche Betrachtung in einer schönen Arbeit von R. B. Hayward**), auf welche wir noch wiederholt Bezug nehmen werden.

Die Übertragung unseres Satzes auf den Körper mit festem Unterstützungspunkte ist nun unmittelbar gegeben. Wir müssen unsere Impulsschraube jetzt von dem festgehaltenen Punkte $O$ aus in einen Schiebestofs $S$ und einen Drehstofs $D$ zerlegen. Ersterer beansprucht nur die Befestigung des Körpers, trägt also zur Reaktionskraft im Stützpunkt bei. So kommt es für die Bewegung nur auf den Drehstofs an, den wir beim Kreisel den Impuls nannten. Mithin gilt wieder der dem obigen analoge

Satz Ia: *Der Impulsvektor des in einem seiner Punkte unterstützten Körpers bleibt während der kräftefreien Bewegung nach Richtung und Gröfse im Raume konstant.*

Dieser Satz deckt sich mit der Aussage, dafs die *Flächensätze* für $O$ im vorliegenden Falle in Gültigkeit bleiben, während die *Schwerpunktsätze* selbstverständlich aufser Kraft treten. Zugleich erscheint er als genaues Analogon zu dem Galilei'schen Trägheitsgesetze, wenn wir dem letzteren die Form des Satzes I von pag. 74 geben. —

Es möge jetzt zweitens vorausgesetzt werden, dafs *beliebige kontinuierlich wirkende äufsere Kräfte* in den Punkten unseres Körpers wirken, wobei dieser zunächst wiederum als frei beweglich angenommen werden möge. Sein Impuls wird dann nicht mehr konstant bleiben, und es wird die Frage sein, in welcher Weise er sich verändert.

Wir stellen dieselbe Betrachtung an wie oben. Bestände der Körper aus einem einzelnen Punkte, so würde sich sein Impuls mit dem den äufseren Kräften in jedem Momente entsprechenden unendlich kleinen Stofse successive nach der Regel vom Parallelogramm zusammensetzen (Newtons lex secunda). Besteht er aus zwei Punkten von unveränderlichem Abstande, so werden die Einzelimpulse dieser beiden Punkte sowohl durch die zwischen ihnen wirkenden Reaktionskräfte, welche uns die starre Verbindung ersetzen, als durch die äufseren Kräfte abgeändert. Achten wir aber auf den Gesamtimpuls des von den beiden Punkten gebildeten Systems, so heben sich bei der Konstruktion die Reaktionskräfte heraus. Die betreffende Stofsschraube besteht also aus einem konstanten Teile, welcher den

*) Théorie nouvelle . . ., Kap. II, § 5.

**) On a direct method of estimating velocities with respect to axes moveable in space. Cambridge Phil. Transact. Vol. X, 1858 (datiert vom 19. II. 1856).

ursprünglichen Impulsen unserer beiden Punkte entspricht, und einem veränderlichen Teile, welcher lediglich von den zu den äufseren Kräften in dem betreffenden Zeitintervalle gehörigen Zusatzstöfsen herrührt. Wir können so verfahren, dafs wir zuvörderst diese letzteren hinsichtlich eines Bezugspunktes $O$ zu einem unendlich kleinen Schiebestofs $dS$ und einem Drehstofse $dD$ in jedem Momente zusammensetzen, und dafs wir dann $dS$ und $dD$ mit den entsprechenden Komponenten $S$ und $D$ der jeweiligen Impulsschraube durch die Parallelogrammkonstruktion kombinieren. Dies Verfahren bringt den folgenden Satz in Evidenz, den wir sogleich auf ein starres System von beliebig vielen Punkten und weiterhin auf einen starren Körper von kontinuierlicher Massenverteilung verallgemeinern (von allgemeineren Systemen mit nur inneren Kräften gar nicht zu reden):

Satz II: *Die Impulsschraube eines frei beweglichen starren Körpers, auf welchen beliebige äufsere Kräfte einwirken, ändert sich während der Bewegung so, dafs sie sich in jedem Momente mit der von den äufseren Kräften herrührenden unendlich kleinen Stofsschraube nach den Regeln der Statik zusammensetzt.*

Diesem Satz entspricht, dafs die einfachen Schwerpunkt- und Flächensätze bei der von äufseren Kräften beeinflufsten Bewegung im allgemeinen zu gelten aufhören. Das System der äufseren Kräfte mufs eine besondere Bedingung erfüllen, es mufs, wie man nach dem Vorgange von Lie sagt, eine gewisse infinitesimale Transformation, u. zw. eine infinitesimale Rotation oder Translation zulassen, damit einer der einfachen Flächen- oder Schwerpunktsätze zu Recht besteht. In diesem Falle würde eine Dreh- oder Schiebekomponente der den äufseren Kräften entsprechenden Kraftschraube verschwinden; gleichzeitig würde unsere geometrische Konstruktion sofort ergeben, dafs eine Komponente der Impulsschraube während der Bewegung konstant bleibt.

Man beachte noch die eigentümlich ungeeignete und unsymmetrische Bezeichnungsweise, deren man sich in der analytischen Mechanik hinsichtlich der Schwerpunkt- und Flächensätze bedient. Man spricht von dem Bestehen eines Flächensatzes nur dann, wenn das Drehmoment der äufseren Kräfte um eine Axe gleich Null ist, d. h. nur dann, wenn der Drehbestandteil des Impulses eine in der Zeit unveränderliche Komponente besitzt. Dagegen spricht man von den Schwerpunktsätzen auch dann, wenn äufsere Kräfte wirksam sind, wenn also der Schiebebestandteil des Impulses beim Ablauf der Bewegung beliebig geändert wird. Diese Diskrepanz ist wesentlich dadurch bedingt, dafs man in den gewöhnlichen Darstellungen den Begriff des Impulses, der die Flächen- und Schwerpunktsätze organisch verbindet, nicht be-

rücksichtigt. Der naturgemäfse Sprachgebrauch wäre offenbar der, dafs man das Wort Flächensatz ebenso allgemein fafst, wie das Wort Schwerpunktsatz, dafs man also unter den Flächensätzen die Thatsache versteht, dafs der Drehstofs des Impulses sich mit dem Drehstofs der äusseren Kräfte successive geometrisch addiert. Im Fall des konstanten Dreh- und Schiebestofses wird man dann, wie oben geschehen, von den „einfachen" Flächen- und Schwerpunktsätzen sprechen.

Wir machen abermals den Übergang zu dem Körper mit festem Unterstützungspunkte, bei welchem der Bestandteil $S$ des Impulses durch die Reaktionskraft in $O$ aufgehoben wird. Unsere obige Überlegung führt dann zu dem

Satze IIa: *Der Impulsvektor des Kreisels, auf welchen beliebige äufsere Kräfte kontinuierlich einwirken, ändert sich in jedem Momente so, dafs seine Änderung nach Richtung und Gröfse dem von den äufseren Kräften verursachten unendlich kleinen Drehstofse gleichkommt.*

Dieser Satz*) stimmt der Form nach genau mit dem zweiten Newtonschen Axiom überein, sofern wir letzteres wie in Satz II pag. 74 geschehen, aussprechen.

## § 6. Der Satz von der lebendigen Kraft.

Die vorangehenden Impulssätze bestimmen zusammen mit unserer früheren Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor die Bewegung des Kreisels ebenso vollständig, wie die Newtonschen Axiome, denen sie nach Form und Inhalt genau entsprechen, die Mechanik des einzelnen Massenpunktes regeln. In der That sind die successiven Änderungen des Impulses im Raume durch unsere letzten Betrachtungen festgelegt. Aus diesen folgt aber die Lage des Drehungsvektors im Körper und also auch die jeweilige Bewegung vermöge der Ergebnisse des § 3.

Es wird daher weiterhin nicht nötig sein, auf den Aufbau des Körpers aus seinen einzelnen Massenteilchen zurückzukommen und die Bewegung der letzteren vom Standpunkte der Punktmechanik (mittelst der Newtonschen Axiome) zu verfolgen. Wenn wir dies später doch gelegentlich z. B. gleich am Ende dieses Paragraphen thun werden, so geschieht es nur sekundär aus didaktischen Gründen, weil uns die Punktmechanik durch allgemeine Gewöhnung besonders geläufig ist.

---

*) In einer Monographie über den Kreisel: *A. de Saint-Germain, Résumé de la théorie du mouvement d'un solide autour d'un point fixe*, Paris 1887, wird dieser Satz mit Unrecht Résal zugesprochen. Der erste Band des *Traité de Mécanique générale* von Résal, in welchem pag. 247 der fragliche Satz vorkommt, ist erst 1873 erschienen, während doch unser Satz (man vgl. z. B. die Jahreszahl der Haywardschen Abhandlung) viel älter ist.

In den vorangehenden Impulssätzen mufs insbesondere auch, soweit es sich um den Kreisel handelt, der Satz von der lebendigen Kraft enthalten sein. In der That bildet dieser, wie wir sogleich zeigen werden, nur ein Korollar unserer Impulssätze.

Wir setzen zunächst voraus, dafs keine äufseren Kräfte auf unsern Kreisel wirken, abgesehen natürlich von der Reaktionskraft im Unterstützungspunkte und solchen Kräften, welche durch diese aufgehoben werden.

Der Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft

$$Lp + Mq + Nr \tag{1}$$

bedeutet, wie pag. 96 erwähnt, geometrisch das skalare Produkt aus Impuls- und Drehungsvektor und hat als solches einen Wert, welcher nur von der Gröfse und gegenseitigen Lage der beiden Vektoren, nicht von ihrer Stellung im Raume abhängt.

Wir betrachten vorübergehend eine gleichförmige Drehung des Körpers um die Axe $p:q:r$, welche letztere wir uns im Körper und also auch im Raume festgehalten denken, während gleichzeitig $L, M, N$ als ein beliebiger, raumfester Vektor gedacht wird. Die Änderung des obigen skalaren Produktes bei dieser Bewegung, d. h. im körperlichen System die Gröfse

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN$$

ist gleich Null, weil die Gröfse und relative Lage unserer beiden Vektoren nicht geändert wird.

Die wirklich stattfindende kräftefreie Bewegung kann aber, was das Verhalten des Impulsvektors sowie die Bewegung des Körpers betrifft, in jedem Momente mit einer Bewegung der hier vorausgesetzten Beschaffenheit in erster Annäherung identifiziert werden. Es gilt für die wirkliche Bewegung im körperfesten System die Gleichung

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0. \tag{2}$$

Wir bemerken sodann, dafs nach den Gleichungen (4′) des § 3 für die wirklich stattfindende Bewegung wird

$$p = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M}, \quad r = \frac{\partial L}{\partial N},$$

unter $T$ den in den Impulskoordinaten geschriebenen Ausdruck der lebendigen Kraft verstanden. Daraufhin geht die linke Seite der Gleichung (2) über in das vollständige Differential der lebendigen Kraft. Wir erhalten daher die Gleichung $dT = 0$ oder integriert $T = h$, welche den Satz liefert:

*Bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels ändert sich die lebendige Kraft des Körpers nicht.*

Die *Erhaltung der lebendigen Kraft* folgt hiernach, wie wir sehen, in der That unmittelbar aus der *Erhaltung des Impulses.*

Mögen nun andrerseits beliebige äufsere Kräfte auf unsern Kreisel wirken. Wir setzen diese hinsichtlich des Unterstützungspunktes $O$ zu einer Schiebekraft und einer Drehkraft zusammen. Von der ersteren können wir absehen, die Komponenten der letzteren in demjenigen Koordinatensystem, auf welches sich auch die $L$, $M$, $N$ beziehen, bezeichnen wir mit $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$. Der Impulsvektor im Raume erfährt jetzt in dem Zeitteilchen $dt$ die Verrückungen $\mathsf{\Lambda}\,dt$, $\mathsf{M}\,dt$, $\mathsf{N}\,dt$ (Satz IIa des vorigen §). Derselbe behält also seine Gröfse und Lage im Raume nicht bei. Wir müssen in jedem Momente die durch die äufseren Kräfte hervorgerufene Verschiebung des Impuls-Endpunktes rückgängig machen, um einen im Raume festen Punkt zu erhalten. Die Verrückung dieses Punktes relativ gegen den Körper beträgt, in Komponenten aufgelöst,

$$dL - \mathsf{\Lambda}\,dt, \quad dM - \mathsf{M}\,dt, \quad dN - \mathsf{N}\,dt.$$

Seine Verbindungsstrecke mit $O$ liefert einen Vektor, welcher am Ende des Zeitteilchens $dt$ dieselbe Gröfse und relative Lage gegen den Drehungsvektor besitzt, wie der Vektor des Impulses zu Beginn des Zeitteilchens.

Von diesem Vektor wird hiernach dasselbe gelten, wie bei der kräftefreien Bewegung von dem Vektor des Impulses selbst. Die Gleichung (2) ist daher jetzt zu ersetzen durch die Gleichung

$$(3) \qquad p\,dL + q\,dM + r\,dN = (\mathsf{\Lambda}p + \mathsf{M}q + \mathsf{N}r)\,dt.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wieder das vollständige Differential der lebendigen Kraft ($dT$); die rechte Seite stellt (nach Gl. (2′) von pag. 91) die während der Zeit $dt$ von den äufseren Kräften geleistete Arbeit ($dA$) dar. Wir haben also den Satz:

*Bei der durch äufsere Kräfte beeinflufsten Bewegung des Kreisels ändert sich die lebendige Kraft in jedem Momente so, dafs ihre Änderung gleich der von den äufseren Kräften geleisteten unendlich kleinen Arbeit ist,* ($dT = dA$).

Es kann insbesondere vorkommen, dafs die endliche Arbeit, welche die äufseren Kräfte an unserem Körper leisten, während wir diesen von einer festen Anfangslage in irgend eine neue Lage bringen, nur von dieser Endlage, nicht von den durchlaufenen Zwischenlagen der Bewegung abhängt. Den negativen Wert dieser Arbeit nennt man bekanntlich die *potentielle Energie* $U$ und bezeichnet entsprechend $T$ als die kinetische Energie, $T + U$ als die Gesamtenergie des Körpers. Alsdann ist $dA$ das vollständige Differential der Funktion $-U$. Der

vorstehende Satz nimmt in Folge dessen die einfachere Form an $dT = -dU$, oder $T + U = h$ und kann folgendermaſsen ausgesprochen werden:

*Wenn die die Bewegung beeinflussenden äuſseren Kräfte ein „Potential" haben, ändert sich die Gesamtenergie des Körpers bei der Bewegung nicht.*

Auch dieser *Satz von der Änderung der kinetischen oder der Erhaltung der Gesamtenergie* ist also, wie wir sehen, eine einfache Folge unseres *Satzes von der Änderung des Impulses.*

Entsprechend beweisen wir den Satz von der lebendigen Kraft für die Bewegung des freien starren Körpers.

Wir haben dabei den Ausdruck (1) durch den folgenden Ausdruck

$$(4) \qquad Xx' + Yy' + Zz' + Lp + Mq + Nr$$

zu ersetzen, in welchem $x', y', z', p, q, r$ die Koordinaten der instantanen Bewegungsschraube, $X, Y, Z, L, M, N$ die der Impulsschraube bedeuten. Dieser Ausdruck hat, wie pag. 103 hervorgehoben, eine geometrische Bedeutung, welche von der Stellung der beiden Schrauben im Raume unabhängig ist und nur von ihren Ganghöhen sowie von ihrer relativen Lage abhängt.

Es handle sich zunächst um die kräftefreie Bewegung. Wir führen die unendlich kleine Schraubung $(x', y', z', p, q, r)\,dt$ aus und betrachten die relative Bewegung der Impulsschraube gegen den Körper. Für den betrachteten Moment ist die Bewegungsschraube im Körper und im Raume fest; die Impulsschraube, welche nach dem vorigen Paragraphen im Raume fest ist, wird dabei um die Bewegungsschraube herumgeschraubt, wobei sie ihre relative Lage gegen diese und ihre Ganghöhe nicht verändert. Bezeichnen $dX, dY, dZ, dL, dM, dN$ die relativen Koordinatenänderungen des Impulses, so gilt mithin für die hier betrachtete und also auch für die wirkliche Bewegung:

$$(5) \qquad x'dX + y'dY + z'dZ + p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0.$$

Die linke Seite ist aber den Gleichungen (16') von pag. 103 zufolge das vollständige Differential $dT$ der lebendigen Kraft; wir haben also $dT = 0$ oder $T = h$.

*Wiederum bleibt also bei der kräftefreien Bewegung des starren Körpers die lebendige Kraft ungeändert.*

Auf den Fall, daſs beliebige äuſsere Kräfte die Bewegung des starren Körpers beeinflussen, verallgemeinert sich die Betrachtung in unmittelbar ersichtlicher Weise.

Wir setzen die äuſseren Kräfte zunächst hinsichtlich des Bezugspunktes zu einer Schiebekraft $(\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z})$ und einer Drehkraft $(\Lambda, \mathsf{M}, \mathsf{N})$ zusammen. Die Änderungen der Impulskoordinaten relativ gegen

den Raum während des Zeitteilchens $dt$ sind nach dem Satze II des vorigen Paragraphen bez. gleich $\Xi dt$, $\mathsf{H} dt$, $\mathsf{Z} dt$, $\Lambda dt$, $\mathsf{M} dt$, $\mathsf{N} dt$. Die Änderungen $dX$, $dY$, $dZ$, $dL$, $dM$, $dN$ der Impulskoordinaten relativ gegen den Körper kommen daher nur zum Teil auf die unendlich kleine Schraubung $(x', y', z', p, q, r)\,dt$; zum anderen Teile werden sie durch die äufseren Kräfte bewirkt. Wir müssen die den letzteren entsprechenden Änderungen rückgängig machen, um eine Schraube zu erhalten, welche relativ zu der Bewegungsschraube am Ende des Zeitteilchens $dt$ ebenso liegt, wie die Impulsschraube zu Beginn der unendlich kleinen Bewegung. Mit anderen Worten wir müssen in Gleichung (5) die Gröfsen $dX, \ldots, dN$ bez. ersetzen durch

$$dX - \Xi dt,\quad dY - \mathsf{H} dt,\quad dZ - \mathsf{Z} dt,\quad dL - \Lambda dt,\quad dM - \mathsf{M} dt,\quad dN - \mathsf{N} dt.$$

So ergiebt sich

$$(6)\qquad \begin{aligned} &x' dX + y' dY + z' dZ + p dL + q dM + r dN \\ &= (\Xi x' + \mathsf{H} y' + \mathsf{Z} z' + \Lambda p + \mathsf{M} q + \mathsf{N} r)\,dt. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist aber das vollständige Differential der lebendigen Kraft, die rechte Seite bedeutet nach Gleichung (2) von pag. 90 die von den äufseren Kräften geleistete Arbeit. Wir haben also $dT = dA$:

*Die Änderung der lebendigen Kraft ist in jedem Momente gleich der von den äufseren Kräften geleisteten Arbeit.*

Es ist vielleicht nützlich, den Beweis dieses Satzes nachträglich noch einmal nach der Methode des vorigen Paragraphen zu führen, indem wir uns den starren Körper in seine einzelnen Massenteilchen aufgelöst denken. Dabei genügt es, ein System von zwei starr verbundenen Massenteilchen zu betrachten.

Wir bemerken vorab, dafs die Änderung der lebendigen Kraft des einzelnen Massenpunktes auf Grund der Formel

$$dT = x' d[X] + y' d[Y] + z' d[Z]$$

gleich ist dem skalaren Produkt aus dem Geschwindigkeitsvektor $(x', y', z')$ in die Änderung des Impulsvektors $([X], [Y], [Z])$.

In jedem unserer beiden starr verbundenen Punkte 1 und 2 denken wir uns den Vektor des Einzelimpulses 1 und 2 konstruiert, welcher mit dem Geschwindigkeitsvektor 1 und 2 der Richtung nach zusammenfällt, sowie die Reaktionskräfte 1 und 2, welche uns die starre Verbindung der Punkte ersetzen und in der Verbindungslinie der Punkte wirken. Aufsere Kräfte mögen nicht vorhanden sein.

Eine augenfällige Folge der starren Verbindung ist diese, dafs die Projektion des Geschwindigkeitsvektors 1 auf die Verbindungslinie gleich der des Geschwindigkeitsvektors 2 ist. Statt dessen können wir auch auf Grund der Newtonschen lex tertia sagen:

*Die Summe der skalaren Produkte aus den Geschwindigkeitsvektoren in die zugehörigen Reaktionskräfte ist gleich Null.*

In der That verwandelt sich die Gleichheit der genannten Projektionen wegen des entgegengesetzten Sinnes der beiden Reaktionskräfte in die entgegengesetzte Gleichheit der genannten skalaren Produkte. Nun sind aber die Reaktionskräfte nach Richtung und Gröfse proportional mit den Änderungen der Einzelimpulse (Newtons lex secunda). *Also wird auch die Summe der skalaren Produkte aus den Änderungen der Einzelimpulse in die einzelnen Geschwindigkeitsvektoren gleich Null.*

Nach der vorangestellten Bemerkung sind aber die beiden Terme dieser Summe bez. gleich den Änderungen der lebendigen Kräfte unserer beiden Massenpunkte. Die Summe selbst ist also gleich der Änderung der lebendigen Kraft des Systems.

*Mithin bleibt die lebendige Kraft unseres Systems ebenso wie beim einzelnen Massenpunkt, der sich nach dem Galileischen Trägheitsgesetz bewegt, konstant.*

Die Verallgemeinerung unserer Überlegung auf den Fall, dafs äufsere Kräfte wirksam sind, oder dafs beliebig viele Punkte zu einem starren System verbunden sind, sowie die Spezialisierung auf den Fall des Kreisels ist so einfach, dafs wir sie übergehen können.

Bemerken wir noch, dafs der analytische Beweis, welchen man gewöhnlich vom Satze der lebendigen Kraft giebt, den vorstehenden geometrischen Beweisen genau parallel läuft. Und zwar entspricht der letzten Betrachtung, in welcher wir auf die einzelnen Massenteilchen des starren Körpers zurückgingen, in der analytischen Mechanik, dafs man die Differentialgleichungen in der Form der sog. *Lagrange'schen Gleichungen erster Art* zu Grunde legt, während die vorherige Betrachtung des Gesamtsystemes dem Standpunkte der sog. *allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen (bzw. der Eulerschen Gleichungen)* entspricht. Wir werden auf beide Gleichungssysteme im folgenden Kapitel (vgl. § 3) näher eingehen.

## § 7. Die kräftefreie Bewegung des Kreisels in geometrischer Behandlung.

Wir wollen jetzt die vorangehenden allgemeinen Sätze dazu benutzen, um uns von der Bewegung des allgemeinen Kreisels im einfachsten Falle ein deutliches geometrisches Bild zu verschaffen. Wir nehmen an, dafs auf den Kreisel keine äufseren Kräfte wirken. Um insbesondere auch die Schwerewirkung auszuschalten, denken wir uns den Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt.

Die geometrische Theorie dieser Bewegung, welche zuerst von Poinsot gegeben ist, können wir jetzt unmittelbar hinschreiben.

Wir berücksichtigen in erster Linie, dafs bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels der Impulsvektor im Raume konstant bleibt. Diesen Vektor denken wir uns ein für allemal von $O$ aus etwa vertikal nach oben abgetragen. Gröfse und Richtung des Vektors sind natürlich durch den Anfangsstofs gegeben, durch den wir unsern Körper in Bewegung gesetzt haben.

In zweiter Linie berücksichtigen wir, dafs bei der kräftefreien Bewegung auch die lebendige Kraft des Körpers konstant bleibt. Dieser Thatsache geben wir einen doppelten geometrischen Ausdruck.

Die lebendige Kraft bedeutet einerseits das halbe Produkt aus der Gröfse des Impulsvektors in die Projektion des Drehungsvektors auf diesen. Aus der Konstanz des Impulses und der Konstanz der lebendigen Kraft folgt also zusammengenommen, dafs die Projektion des Drehungsvektors auf den Impulsvektor eine unveränderliche Länge hat. Die Gröfse dieser Projektion hängt wiederum von der Beschaffenheit des ursprünglichen Anstofses ab. *Wir haben also senkrecht zur Impulsaxe eine im Raum feste Ebene $e$, welche uns einen geometrischen Ort für den Endpunkt des Drehungsvektors hinsichtlich seiner Lage im Raume liefert.*

Eine weitere geometrische Bedeutung des Satzes von der lebendigen Kraft ergiebt sich aus dem Ausdrucke

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Der Endpunkt $(p, q, r)$ des Drehungsvektors liegt hiernach auf einem mit dem Kreisel festverbundenen Ellipsoide, welches mit dem Trägheitsellipsoid ähnlich und ähnlich gelegen ist. Die Konstanz der lebendigen Kraft bedeutet nun, dafs dieses Ellipsoid während der Bewegung seine Dimensionen dauernd beibehält. *Wir haben also ferner ein im Körper festes Ellipsoid $E$, welches uns einen geometrischen Ort für den Endpunkt des Drehungsvektors hinsichtlich seiner Lage im Körper liefert.*

Wir berücksichtigen schliefslich die Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor. Diese Beziehung konnte mittelst der Poinsotschen Konstruktion von pag. 101 dahin ausgedrückt werden, dafs die Tangentialebene an das Ellipsoid $E$ im Endpunkte des Drehungsvektors senkrecht auf der Axe des Impulses steht. Die genannte Tangentialebene ist hiernach zunächst dauernd unserer Ebene $e$ parallel; da die Ebene $e$ überdies beständig durch den Endpunkt des Drehungsvektors hindurchgeht, fällt sie direkt mit jener zusammen. Mit anderen Worten:

*Unser Ellipsoid $E$ berührt während der Bewegung dauernd unsere Ebene $e$.*

Nun verläuft auf dem Ellipsoide $E$ die Polhodie- und in der Ebene $e$ irgendwie die Herpolhodiekurve. Da beide Kurven bei der Bewegung sich auf einander abwickeln, so rollt auch unser Ellipsoid $E$ auf unserer Ebene $e$ während der Bewegung ohne zu gleiten ab. *Hiernach können wir die ganze kinetisch bestimmte Bewegung auf rein kinematischem Wege dadurch nachahmen, dafs wir ein im Körper festes Ellipsoid, welches um den Punkt O als Mittelpunkt beschrieben ist, auf einer im Raume festen Ebene ohne Gleitung abrollen lassen.*

Dieses schöne und übersichtliche Bild der Bewegung des kräftefreien Kreisels verdanken wir, wie bekannt, den Untersuchungen Poinsots. Die fragliche Bewegung wird deshalb auch kurz als *Poinsot-Bewegung* bezeichnet. Wenn wir so, dem Vorgange Poinsots folgend, die Bewegung durch das Abrollen eines Ellipsoides auf einer Ebene veranschaulichen, setzen wir uns merkwürdiger Weise in einen gewissen Widerspruch mit der allgemeinen Poinsotschen Theorie der Drehung. Nach dieser sollen wir uns in erster Linie die Gestalt der abrollenden Polkegel klarmachen und daraus eine Vorstellung von der Bewegung zu gewinnen suchen. Es zeigt sich aber schon in dem vorliegenden einfachen Falle, dafs die Gestalt dieser Kegel, wenigstens die des Herpolhodiekegels, wie wir unten weiter ausführen werden, ziemlich kompliziert ist, und dafs die oben angegebene abweichende Konstruktion viel übersichtlicher wird. Um so weniger werden wir erwarten können, in schwierigeren Fällen (beim Hinzutreten der Schwerewirkung) allein mit der Diskussion der abrollenden Kegel durchzukommen.

Handelt es sich nur um die successiven Lagen des Körpers im Raume, so ist unser obiges Bild der Bewegung völlig zureichend. Wollen wir aber auch die Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung in unserem kinematischen Bilde zum Ausdruck bringen, so müssen wir über die Art des Abrollens die weitere Bestimmung hinzufügen:

*Die Geschwindigkeit des Abrollens soll so bemessen werden, dafs die Drehung des Ellipsoides, welche natürlich um den von O nach dem jeweiligen Berührungspunkt von E und e gezogenen Radius stattfindet, ihrer Geschwindigkeit nach diesem Radius gleich ist.*

Wie auch diese Bedingung durch ein Modell zu realisieren ist, hat zuerst Sylvester*) gezeigt. Wir können hierauf indessen nicht eingehen.

Wir vervollständigen nun noch unsere Vorstellung von der

*) Vgl. Sylvester: On the motion of a rigid body etc., London R. S. Phil. Transactions 1866.

Poinsot-Bewegung, indem wir im Einzelnen das Verhalten der verschiedenen geometrischen Elemente der Bewegung studieren.

Es handle sich zunächst um den Ablauf der Bewegung im Körper. Wir werden in dieser Hinsicht vor allen Dingen die *Kurve* zu kennen wünschen, *welche der Endpunkt des Impulsvektors relativ gegen den Körper beschreibt.* Diese Kurve werden wir in Ermangelung eines besseren Ausdrucks gelegentlich die „Impulskurve" nennen.

Jedenfalls wandert der Endpunkt des Impulses im einzelnen Zeitelemente bei der in Rede stehenden Relativbewegung auf einem Kreisbogenstückchen um die jeweilige Drehungsaxe herum. Seine relative Verschiebung gegen den Körper steht also senkrecht auf der instantanen Drehungsaxe. Die Richtung der genannten Verschiebung gegen das $XYZ$-System wird aber durch die Verhältnisse der Koordinatenänderungen $dL : dM : dN$, die Richtung des Drehungsvektors durch die Verhältnisse $p : q : r$ bestimmt. Mithin gilt die Gleichung:

$$p\,dL + q\,dM + r\,dN = 0.$$

Auf Grund der allgemeinen Relation zwischen Impuls- und Drehungsvektor können wir unsere Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{L\,dL}{A} + \frac{M\,dM}{B} + \frac{N\,dN}{C} = 0.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$\tag{1} \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right) = h.$$

Die Gleichung (1) ist natürlich das Äquivalent für die Gleichung der lebendigen Kraft, wie denn auch unsere vorstehende Überlegung den im vorigen Paragraphen gegebenen Beweis des Satzes von der lebendigen Kraft nur in etwas speziellerer Fassung wiederholt.

Ferner ist klar, daſs der Endpunkt des Impulses, wegen der konstanten Länge $G$ desselben, sich dauernd auf einer Kugel vom Radius $G$ befinden muſs. Wir haben also

$$\tag{2} L^2 + M^2 + N^2 = G^2.$$

Durch die Gleichungen (1) und (2) ist die gesuchte Kurve bestimmt. Wir können sagen:

*Die Bahn, welche der Impuls-Endpunkt im Körper beschreibt, ist eine sphärische Kurve; sie ergiebt sich als Schnitt des Ellipsoides* (1) *mit der Kugel* (2).

Die Gestalt der Kurve ist in den Figuren 18, 19 und 20 (s. den folgenden Paragraphen) für einige charakteristische Fälle verzeichnet.

Gleichzeitig ist auch die Kurve, welche der Endpunkt des Drehungsvektors im Körper beschreibt, d. h. die Polhodiekurve bestimmt. Wir

erhalten sie aus der soeben gefundenen Kurve des Impulses durch eine einfache Deformation nach den Hauptaxen des Körpers. Auch sie liegt auf zwei sogleich zu nennenden Flächen zweiten Grades, von denen uns die erste als unser Ellipsoid $E$ bereits bekannt ist. Es ergiebt sich nämlich aus (1) und (2) mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen Impuls- und Drehungsvektor:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h \tag{3}$$

und

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \tag{4}$$

*Die Polhodiekurve erscheint also als Schnitt der beiden konzentrischen Ellipsoide* (3) *und* (4).

In entsprechender Weise behandeln wir die Kurven, welche der Endpunkt von Impuls- und Drehungsvektor relativ gegen den festen Raum beschreiben. Erstere Kurve reduziert sich natürlich auf einen Punkt; betrachten wir daher die letztere, d. h. unsere *Herpolhodiekurve.* Zunächst wissen wir aus dem Satz von der lebendigen Kraft, daſs diese Kurve in der festen Ebene $e$ verläuft.

*Die Herpolhodiekurve ist also eine ebene Kurve.* Der Abstand ihrer Ebene von $O$, d. h. die Projektion des Drehungsvektors auf die vertikale Impulsaxe, welche wir in Übereinstimmung mit früherem durch $\varrho$ bezeichnen, ergiebt sich aus dem Satz von der lebendigen Kraft zu

$$\varrho = \frac{2h}{G}. \tag{5}$$

Die genauere Gestalt der Herpolhodiekurve läſst sich nicht, wie bei der Polhodiekurve durch eine elementar-geometrische Konstruktion definieren, da sie im allgemeinen transcendenter Natur ist. Wohl aber gelingt es, sie aus unserem kinematischen Bilde der Bewegung zu ermitteln.

Wir beschreiben mit dem gröſsten und dem kleinsten Abstande der Polhodiekurve von $O$ je eine Kugel um $O$, welche in unserer Ebene $e$ zwei Kreise bestimmt. Der gemeinsame Mittelpunkt dieser Kreise ist der Durchstoſsungspunkt der Impulsaxe mit $e$. Zwischen diesen beiden Kreisen muſs die Herpolhodiekurve ersichtlich in regelmäſsigen Windungen hin- und herlaufen, indem sie dieselben abwechselnd berührt oder sich in besonderen Fällen auf einen derselben mit Spitzen aufsetzt. Sie besteht aus einer unendlichen Serie unter sich kongruenter Bögen, welche gegen einander je um dasselbe Stück verdreht sind. Jeder einzelne Bogen entspricht einer einmaligen Abwickelung der Polhodiekurve. Im allgemeinen wird sich die Kurve nicht schlieſsen, sondern um den Mittelpunkt der Figur, den Durchstoſsungspunkt der

Impulsaxe mit ihrer Ebene, unendlich oft herumlaufen. Hieraus folgt bereits, dafs die Gleichung der Kurve eine transcendente Gleichung sein wird. Entsprechendes gilt natürlich von dem Herpolhodiekegel, welcher diese Kurve von $O$ aus projiziert.

Die Gestalt der Herpolhodie wird durch die nebenstehende Figur*) für den speziellen Fall

$$A = \frac{1}{36}, \quad B = \frac{1}{25}, \quad C = \frac{1}{16},$$
$$h = 50, \quad G^2 = 5$$

dargestellt.

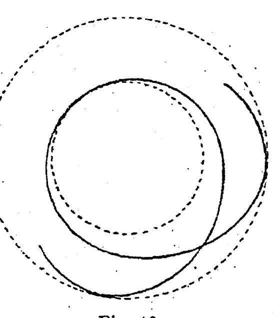


Fig. 16.

Nun wollen wir sehen, wie sich diese Dinge im Falle des *symmetrischen Kreisels* modifizieren. Hier hat das Trägheitsellipsoid sowie die sämtlichen vorher benutzten Ellipsoide (1), (3) und (4) Rotationssymmetrie um die Figurenaxe. Bringen wir aber ein Rotationsellipsoid mit einer Kugel (wie bei der Konstruktion der Impulskurve), oder bringen wir zwei Rotationsellipsoide von zusammenfallenden Figurenaxen (wie bei der Konstruktion der Polhodie) mit einander zum Schnitt, so entsteht allemal als Schnittkurve ein Paar diametral gelegener Kreise in parallelen Ebenen.

*Mithin geht sowohl die Polhodiekurve, wie die Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt, je in einen Kreis über.*

Lassen wir ferner ein Rotationsellipsoid mit festem Mittelpunkte $O$ auf einer Ebene abrollen, so entsteht in dieser Ebene als Ort der Berührungspunkte offenbar gleichfalls ein Kreis. Dies ergiebt sich z. B. daraus, dafs sämtliche Punkte der Polhodiekurve von $O$ den konstanten Abstand ($\Omega$) haben; also müssen auch sämtliche Punkte der Herpolhodiekurve von $O$ den Abstand $\Omega$ besitzen. Die letztere Kurve ist also der Schnitt einer Ebene mit einer Kugel vom Radius $\Omega$.

*Mithin geht auch die Herpolhodiekurve beim symmetrischen Kreisel in einen Kreis über.*

Der Charakter der eintretenden Bewegung läfst sich nun mit einem Worte dahin angeben:

*Die allgemeinste Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels ist die reguläre Präcession.*

---

*) Die Figur ist der Dissertation von Hrn. W. Hess: „Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene, München 1880“, entnommen. Hr. Hess zeigt, dafs die Herpolhodiekurve wegen der Ungleichungen, die zwischen den Hauptträgheitsmomenten $A, B, C$ bestehen, keine (reellen) Wendepunkte besitzen kann; die ursprüngliche von Poinsot gegebene Figur, Liouville's Journal sér. I, t. 16 war in dieser Hinsicht fehlerhaft.

In der That konnten wir in § 6 des vorigen Kapitels die reguläre Präcessionsbewegung dadurch charakterisieren, dafs die Kurven bez. die Kegel der Polhodie und Herpolhodie Kreise bez. Kreiskegel waren. Die Axe der Präcession ist die Impulsaxe. Die genauere Klassifizierung dieser Präcessionsbewegung im Sinne der Unterscheidungen von pag. 51 wollen wir uns für später aufsparen.

In dem Spezialfalle des symmetrischen Kreisels führt auch folgende Überlegung zum Ziele, welche vielleicht noch einfacher und näherliegend als die frühere ist. Wir nehmen die Impulsaxe wieder vertikal nach oben gerichtet an und zeichnen die Figurenaxe in der Anfangslage unter einem beliebigen Winkel $\vartheta$ gegen diese geneigt. Aus der Lage von Impuls- und Figurenaxe folgt die Lage der instantanen Drehungsaxe. Diese liegt nach der pag. 106 mitgeteilten Konstruktion stets in derselben Ebene mit der Impuls- und Figurenaxe und teilt den Winkel $\vartheta$, wie wir kurz sagen können, in einem festen (nur von der Massenverteilung des Kreisels, d. h. von den Werten $A$ und $C$ abhängigen) Verhältnisse u. zw. innen oder aufsen, je nachdem der Kreisel ein verlängerter oder abgeplatteter ist. Der gröfseren Deutlichkeit wegen legen wir um $O$ die Einheitskugel und markieren ihre Durchstofsungspunkte mit der Impuls-, der Rotations- und der Figurenaxe, welche wir bez. mit $J$, $R$ und $F$ bezeichnen. Der Punkt $J$ ist nach unserem fundamentalen Prinzip ein fester Punkt, der „Nordpol" der Kugel. Die Punkte $R$ und $F$ dagegen sind beweglich; *wir behaupten, dafs sie je einen Parallelkreis um den Nordpol beschreiben.*

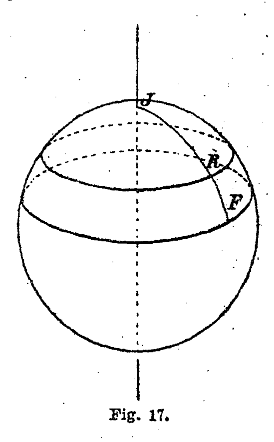


Fig. 17.

In der That (vgl. Fig. 17), die instantane Bewegung des Kreisels besteht in einer Drehung um $OR$. Der Punkt $F$ wandert dabei, weil $F$ und $R$ auf demselben Meridiane der Kugel liegen, im ersten Augenblicke in Richtung des durch $F$ gehenden Parallelkreises, so dafs der Winkel $\vartheta$ zunächst nicht geändert wird. In Folge dessen mufs jetzt eine andere Gerade des Körpers, welche in der Meridianebene $JOF$ enthalten ist, die Rolle der Drehungsaxe übernehmen. Bezeichnen wir ihren Schnittpunkt mit der Einheitskugel wieder durch $R$, so liegt $R$ auf dem Meridiane $JF$. Da nun dieser Punkt den Bogen $JF$ in einem festen Verhältnisse teilt und da der Bogen $JF$ seine anfängliche Länge behalten hat, mufs auch der Bogen $JR$ die ursprüngliche Gröfse haben. $R$ wandert also im ersten Augenblicke gleichfalls auf dem

durch $R$ hindurchgehenden Parallelkreise und zwar, wie wir sagten, soweit, daſs $J$, $R$ und $F$ Punkte eines und desselben Meridianes werden. Wir sind damit genau auf die Anfangsbedingungen der Bewegung zurückgeführt. In Folge dessen gilt unsere Überlegung auch für jede folgende Zeit.

*Die Figurenaxe und die Drehungsaxe beschreiben also bei der kräftefreien Bewegung des symmetrischen Kreisels je einen Kreiskegel um die Impulsaxe.*

Aus unserer früheren Konstruktion des Drehungsvektors folgt ferner, daſs die Länge desselben bei konstanter Länge des Impulsvektors und konstantem Neigungswinkel $\vartheta$ gleichfalls konstant ist. Nun ist aber die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Figurenaxe auf ihrem Kreiskegel der Gröſse des Drehungsvektors proportional. *Also durchläuft die Figurenaxe ihren Kreiskegel mit konstanter Geschwindigkeit.* Ferner ist die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenaxe gleich der Projektion des Drehungsvektors auf die letztere. *Also dreht sich der Kreisel relativ gegen die Figurenaxe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.*

Durch diese Bemerkungen ist aber die Bewegung wiederum als *reguläre Präcession* charakterisiert. —

Zum Schlusse bemerken wir, daſs unsere Behandlung des kräftefreien Kreisels auch auf die Bewegung eines im Raume freien starren Körpers Anwendung findet, welcher überhaupt keinen oder doch nur solchen äuſseren Kräften unterworfen ist, die sich bei Wahl des Schwerpunkts zum Bezugspunkt zu einer bloſsen Schiebekraft zusammensetzen lassen, wie es z. B. bei alleiniger Wirkung eines homogenen Schwerefeldes der Fall ist. Dann können wir nämlich nach den allgemeinen Impulssätzen des fünften Paragraphen die Translation des Schwerpunktes einerseits und die Rotation des Körpers um den Schwerpunkt andrerseits für sich behandeln, letztere nach der vorangehenden Theorie des kräftefreien allgemeinen Kreisels, erstere nach den Gesetzen der Mechanik des einzelnen Massenpunktes. Da insbesondere für den Fall der Schwerewirkung die Bahnkurve des einzelnen Massenpunktes (die Parabel) genugsam bekannt ist, so beherrschen wir jetzt mit Zuhilfenahme der vorangehenden Resultate bereits *die Bewegung des im Raume frei beweglichen schweren starren Körpers.*

## § 8. Die Rotation des Kreisels um eine permanente Drehungsaxe und die sog. Stabilität der Rotationsaxe eines schnell rotierenden Kreisels.

Wir haben bereits mehrfach die Analogie zwischen der Bewegung des einzelnen Massenpunktes und der Rotation des Kreisels betont. Nicht nur, dafs (in kinematischer Hinsicht) beides Probleme von drei Graden der Freiheit sind und dafs (in statischer Hinsicht) der Impuls in beiden Fällen als ein Vektor aufgefasst werden kann; auch in kinetischer Hinsicht besteht eine durchgreifende Analogie, wofern wir (vgl. § 5) unser Augenmerk auf das Verhalten des Impulsvektors richten. Anders stellt sich die Sache, wenn wir das Verhalten des Geschwindigkeitsvektors in beiden Fällen vergleichen. Während beim einzelnen kräftefreien Massenpunkte der Geschwindigkeitsvektor (ebenso wie der Impulsvektor) Richtung und Gröfse im Raume beibehält, ändert der Vektor der Drehgeschwindigkeit bei der kräftefreien Kreiselbewegung seine Gröfse und seine Lage sowohl im Raume wie im Körper kontinuierlich ab. Wir werden uns die Frage vorlegen, unter welchen Umständen auch beim Kreisel der Geschwindigkeitsvektor nach Richtung und Gröfse im Raume konstant bleibt oder mit anderen Worten, *unter welchen Umständen eine gleichförmige Rotation des Kreisels um eine im Raume feste Axe eintritt.*

Wir wissen, dafs bei der *Poinsot-Bewegung* der Rotationsvektor im Raume einen Kegelmantel beschreibt, der den Impulsvektor in seinem Innern hat. Soll nun die Rotationsaxe im Raume stille stehen, der Herpolhodiekegel sich also auf eine einzelne Gerade reduzieren, so mufs diese mit der Richtung des Impulses zusammenfallen. Nach pag. 101 fällt aber die Rotationsaxe mit der Impulsaxe nur dann zusammen, wenn ihre gemeinsame Richtung eine Hauptaxe des Körpers ist. Umgekehrt ergiebt sich aus der Konstruktion von pag. 102, dafs dann in der That die Rotationsaxe eine feste Lage im Raume und auch im Körper beibehält, und dafs die Rotationsgeschwindigkeit eine gleichförmige ist. Bezeichnen wir eine Axe, um welche eine fortgesetzte gleichförmige Drehung möglich ist, wie üblich, als „permanente Axe", so können wir sagen:

*Bei dem allgemeinen kräftefreien Kreisel giebt es nur drei permanente Axen, die Hauptaxen des Körpers.*

Wenn der Kreisel um eine dieser drei Hauptaxen rotiert, reduziert sich offenbar die Polhodie, die Herpolhodie, sowie die Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt, je auf einen einzelnen Punkt.

Die drei Hauptaxen bieten einen interessanten Unterschied hin-

sichtlich der *Stabilität* der betr. gleichförmigen Rotation dar, wie schon Poinsot bemerkt hat.

Der Begriff der Stabilität einer Bewegung, welcher uns hier zum ersten Male begegnet, spielt eine wichtige Rolle in der neueren Mechanik und will mit einer gewissen Vorsicht behandelt sein. Um zu entscheiden, ob wir eine Bewegungsform unseres Kreisels stabil oder labil nennen, werden wir folgendermaſsen verfahren (wobei der genaue Sinn der von uns gewählten Worte vielleicht erst im Laufe der weiteren Entwickelung völlig deutlich wird): Wir erteilen dem Kreisel, während er die fragliche Bewegung ausführt, einen kleinen Stoſs von beliebiger Beschaffenheit. Werden hierbei sämtliche Elemente der Bewegung, z. B. die successiven Lagen des Kreisels im Raume, die Lagen des Drehungsvektors und des Impulsvektors im Kreisel und im Raum um so weniger geändert, je kleiner der Anstoſs gemacht wird, so werden wir die Bewegung stabil nennen; in jedem anderen Falle wird sie labil heiſsen.

Wir untersuchen in diesem Sinne zunächst die *Rotation des Kreisels um die Axe des gröſsten oder kleinsten Hauptträgheitsmomentes* und betrachten vor allem die *Kurve, welche der Endpunkt des Impulses im Körper beschreibt.* Das Ellipsoid 1) und die Kugel 2) von pag. 123, deren gemeinsame Punkte unsere Impulskurve lieferten, müssen sich jetzt offenbar in zwei Punkten berühren, welche bez. auf der längsten oder kürzesten Hauptträgheitsaxe liegen. Im ersteren Falle wird das Ellipsoid von der Kugel, im letzteren Falle die Kugel von dem Ellipsoid ganz umschlossen. Erteilen wir nun dem Kreisel einen kleinen Stoſs, so ändern wir dadurch die Konstanten $h$ und $G$, d. h. die Gröſse unseres Ellipsoides und unserer Kugel, ein wenig ab. Der Berührungspunkt löst sich dann beidemal in eine kleine in sich zurücklaufende Kurve auf, welche dem früheren Berührungspunkt in ihrer ganzen Erstreckung um so näher liegt, je kleiner die Änderung von $h$ und $G$ war. (Allerdings kann sich der Berührungspunkt bei willkürlicher Änderung von $h$ und $G$ auch in eine imaginäre Kurve auflösen; die hierfür notwendigen Werte unserer Konstanten sind aber mit der mechanischen Bedeutung dieser Gröſsen unvereinbar, so daſs wir hiervon absehen können).

Ganz ähnlich, wie die Impulskurve, verhält sich die Kurve der *Polhodie*, welche ja aus jener durch eine einfache Deformation nach den Hauptaxen des Körpers abgeleitet werden kann. Auch diese Kurve, welche bei der gleichförmigen Rotation aus einem einzelnen Punkte besteht, verwandelt sich bei Hinzufügung eines kleinen äuſseren Anstoſses in ein kleines Oval, welches jenem Punkte dauernd sehr nahe liegt. Hieraus schlieſsen wir, daſs beim Abrollen der Polhodie in

unserer festen Ebene von pag. 121 eine *Herpolhodiekurve* entsteht, deren Dimensionen gleichfalls um so kleiner sind, je kleiner der störende Stofs gewählt wird. Aus alledem folgt:

*Die gleichförmige Rotation des Kreisels um die gröfste oder kleinste Hauptaxe des Trägheitsellipsoides ist eine stabile Bewegungsform.*

Nehmen wir zweitens an, dafs die Rotation um die *mittlere Hauptaxe des Trägheitsellipsoides* erfolgt. Wir betrachten zunächst wieder die Impulskurve. In unserem Falle reduziert sich diese auf einen der Durchstofsungspunkte der mittleren Hauptträgheitsaxe mit der Kugel vom Radius $G$. In diesem sowie in dem diametralen Punkte wird unsere Kugel 2) von dem Ellipsoide 1) berührt. Man erkennt aber aus der nebenstehenden Figur sofort, dafs es noch unendlich viele andere Punkte giebt, welche beiden Flächen gemeinsam sind. Beide Flächen müssen sich nämlich notwendiger Weise durchsetzen; die Enden der gröfsten Hauptaxe des Ellipsoids beispielsweise ragen aus der Kugel hervor; die kleinste Hauptaxe liegt ganz im Innern der Kugel. Die vollständige Schnittkurve besteht aus zwei Kreisen, nämlich denjenigen Kreisschnitten des Ellipsoids, welche sich in den Endpunkten der mittleren Hauptaxe kreuzen. Es ist leicht, die analytische Bedingung anzugeben, welche für das Eintreten des vorliegenden Falles erforderlich ist. Ist $B$ das auf die mittlere Hauptaxe bezügliche Trägheitsmoment, so haben wir die Konstanten $h$ und $G$ so zu bemessen, dafs sich für $L = N = 0$ aus den Gleichungen (1) und (2) von pag. 123 derselbe Wert von $M^2$ ergiebt; unsere Bedingung lautet also

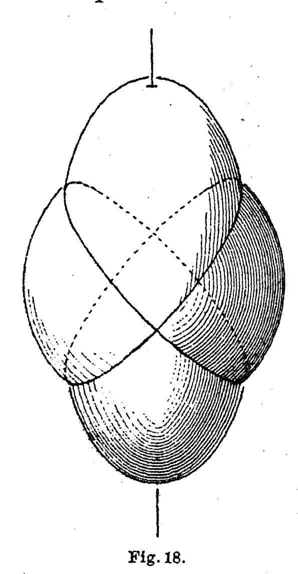


Fig. 18.

$$G^2 = 2hB.$$

Ändern wir jetzt durch Hinzufügung eines äufseren Anstofses die Dimensionen von Kugel und Ellipsoid ein wenig ab, so entsteht allemal eine Kurve, welche sich von dem ursprünglichen Berührungspunkte um ein endliches Stück entfernt. Die beiden Berührungspunkte (zusammen mit den hindurchgehenden Kreisen) lösen sich je in zwei Ovale auf, welche auf dem abgeänderten Ellipsoide die Endpunkte der gröfsten oder die der kleinsten Hauptaxe umgeben. Man vergleiche hierzu die Figuren 19 und 20. In diesen ist die äufsere Störung speziell derart vorausgesetzt, dafs das Ellipsoid seine Gröfse behält und nur die Kugel

verändert wird; u. zw. ist in Figur 19 die Kugel gegen früher vergröfsert ($G^2 > 2hB$), in Fig. 20 verkleinert ($G^2 < 2hB$).

Auf Grund des hiermit geschilderten Verhaltens der Impulskurve können wir bereits den interessanten Satz aussprechen:

*Die gleichförmige Rotation des allgemeinen Kreisels um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist eine instabile Bewegungsform.*

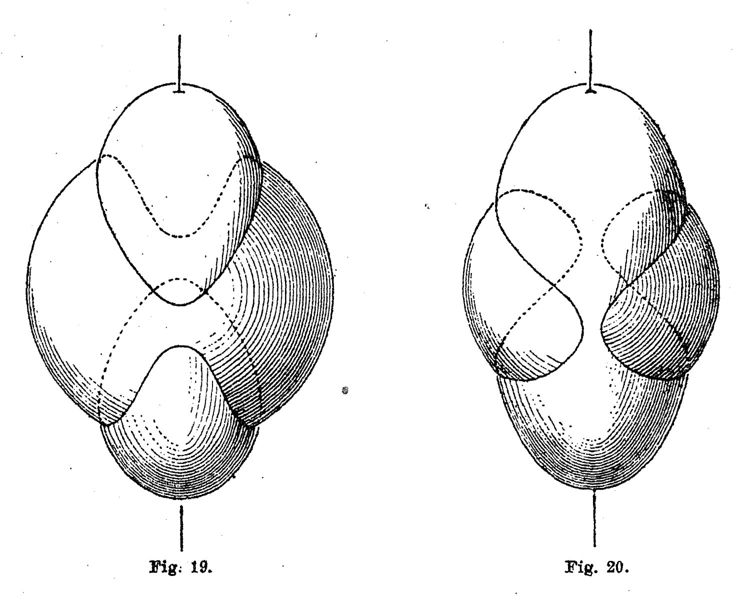


Fig. 19. Fig. 20.

Wir wollen auch noch das Verhalten der Polhodie- und der Herpolhodiekurve kurz betrachten. Die Gestalt der Polhodiekurve ist natürlich der unserer Impulskurve ganz analog. Im Falle $G^2 = 2hB$ besteht die Polhodiekurve aus einem Punkte, während der Schnitt der Ellipsoide 3) und 4) von pag. 124, auf welchen die Polhodie verläuft, zwei kongruente Ellipsen ergiebt. (Sie entstehen aus den oben genannten Kreisschnitten des Ellipsoides 1) durch die Deformation $p = L/A$, $q = M/B$, $r = N/C$). Machen wir nun durch einen äufseren Anstofs $G^2 \gtrless 2hB$, so lösen sich die beiden Ellipsen in zwei Ovale auf, welche sich von der punktförmigen Polhodie des Falles $G^2 = 2hB$ um endliche Stücke entfernen, wie klein auch der störende Anstofs war.

Aus diesem Verhalten der Polhodiekurve schliefsen wir sofort, dafs auch die Herpolhodiekurve, welche wir ja durch Abwickelung der Polhodiekurve erhalten haben, ihre Gestalt unstetig verändern wird. Während diese Kurve im Falle $G^2 = 2hB$ aus einem einzelnen Punkte besteht, erhält sie im Falle $G^2 \gtrless 2hB$ sogleich endliche Dimensionen,

welche durch Verkleinerung der Differenz $G^2 - 2hB$ nicht beliebig klein gemacht werden können. Auf die hierbei auftretenden interessanten Einzelheiten*) können wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Wir gehen nun zu dem *symmetrischen Kreisel* über. *Bei dem symmetrischen Kreisel giebt es ersichtlich unendlich viele permanente Drehungsaxen; es sind dieses aufser der Figurenaxe die sämtlichen Axen der Äquatorebene.* Wir stellen auch hier die Frage nach der *Stabilität* der betr. Bewegungsformen.

Bei der *Rotation um die Figurenaxe* erledigt sich die Frage dadurch, dafs wir den symmetrischen Kreisel als Grenzfall des allgemeinen Kreisels auffassen. Der Figurenaxe entspricht beim allgemeinen Kreisel jedenfalls die Axe des gröfsten oder kleinsten Hauptträgheitsmomentes (je nachdem der symmetrische Kreisel ein verlängerter oder abgeplatteter ist). Daher werden wir sagen können:

*Die Rotation um die Figurenaxe ist eine stabile Bewegungsform des symmetrischen Kreisels.*

Bei der *Rotation um eine Axe der Äquatorebene* dagegen läfst uns der Vergleich mit dem allgemeinen Kreisel im Stich. Eine solche Axe kann nämlich ebensowohl als Grenzfall der mittleren wie als Grenzfall einer der beiden extremen Hauptträgheitsaxen des allgemeinen Kreisels angesehen werden. Dementsprechend zeigt die folgende spezielle Untersuchung, dafs die Stabilitätsverhältnisse des symmetrischen Kreisels bei der gedachten Rotation in gewisser Weise die Mitte halten zwischen der vollständigen Stabilität oder Instabilität des um eine Axe von extremem oder mittlerem Hauptträgheitsmomente rotierenden allgemeinen Kreisels.

Betrachten wir hier zunächst die *Herpolhodiekurve*. Wir stützen uns dabei auf unseren früheren Satz, dafs die allgemeinste Bewegung des symmetrischen Kreisels eine reguläre Präcessionsbewegung um die Axe des Impulses ist. Zuvörderst falle der Impuls genau in eine Äquatoraxe. Die Herpolhodiekurve besteht dann aus einem Punkt, welcher auf derselben Axe liegt. Darauf fügen wir einen kleinen Zusatzimpuls hinzu, wodurch die Lage des Impulses im Raum und im Körper momentan ein wenig abgeändert wird. Die Lage des Drehungsvektors ergiebt sich durch die uns geläufige Konstruktion. Jedenfalls

*) Die Herpolhodiekurve nimmt unter Umständen eine Spiralenform an. Dies tritt ein, wenn der Anstofs speziell so abgepafst wird, dafs die oben genannte Schnittkurve der Ellipsoide 3) und 4) (bestehend aus unseren beiden kongruenten Ellipsen) als solche nicht geändert wird und dafs nur der Drehpol im Körper von dem Doppelpunkt der Schnittkurve aus auf der einen oder der anderen Ellipse ein wenig verschoben wird.

ist der abgeänderte Drehungsvektor nach Gröfse und Richtung von dem ursprünglichen sehr wenig verschieden. Die Gestalt der Herpolhodiekurve erhalten wir nun, indem wir den Endpunkt des so konstruierten Drehungsvektors auf einem Kreise um die abgeänderte Axe des Impulses herumführen. Dieser Kreis wird um so kleiner, je kleiner der störende Anstofs war. Also verändert die Herpolhodiekurve ihre Gestalt beliebig wenig — im Gegensatz zu der Herpolhodiekurve bei der entsprechenden Bewegung des allgemeinen Kreisels.

Trotzdem müssen wir aber die fragliche Bewegung des symmetrischen Kreisels nach unserer obigen Stabilitätsdefinition als labil bezeichnen. Betrachten wir nämlich die *Polhodiekurve.* Bei der ursprünglichen Lage des Impulses besteht die Polhodiekurve aus einem einzelnen Punkt. Diese Angabe scheint im Widerspruch zu stehen mit dem früher gefundenen Resultate, dafs die Polhodiekurve allemal ein Kreis um die Figurenaxe ist. Der Widerspruch löst sich dadurch auf, dafs wir uns vorstellen: Auch bei der gleichförmigen Rotation um eine Äquatoraxe hat der Endpunkt des Drehungsvektors die Tendenz, auf einem Kreise um die Figurenaxe fortzuwandern; hierbei kommt er aber nicht von der Stelle, weil die Herpolhodiekurve aus einem einzelnen Punkte besteht. Die durch unsern Anstofs abgeänderte Gestalt der Polhodiekurve erhalten wir jetzt, indem wir den abgeänderten Endpunkt des Drehungsvektors auf einem Kreise um die Figurenaxe herumwandern lassen. Die Polhodiekurve verändert also bei Hinzufügung unseres kleinen Anstofses ihre Gestalt in unstetiger Weise — in Übereinstimmung mit der Polhodiekurve bei der entsprechenden Bewegung des allgemeinen Kreisels. Das Gleiche gilt von der Kurve, welche der Impuls im Körper beschreibt.

Jedenfalls müssen wir nach dem Vorangehenden sagen:

*Die gleichförmige Rotation des Kreisels um eine Axe seiner Äquatorebene ist eine labile Bewegungsform.*

Schliefslich betrachten wir den *Kugelkreisel.* Bei diesem ist jede Axe Hauptaxe des Trägheitsellipsoides, woraus zu folgern ist:

*Bei dem Kugelkreisel ist jede Axe durch O eine permanente Drehungsaxe.*

*Die allgemeinste Bewegung des Kugelkreisels besteht in einer gleichförmigen Rotation um eine im Raume feste Axe.*

Man überzeugt sich überdies leicht, dafs jede solche Rotationsbewegung einen *stabilen* Charakter besitzt.

Nehmen wir den zu Anfang dieses Paragraphen angestellten Vergleich zwischen der Kinetik des Kreisels und der des einzelnen Massenpunktes noch einmal auf, so können wir sagen:

*Der Kugelkreisel bildet nicht nur in Bezug auf das Verhalten des Impulsvektors sondern auch hinsichtlich des Geschwindigkeitsvektors das genaue Analogon zu dem einzelnen Massenpunkte; es bleibt nämlich auch dieser Vektor bei der kräftefreien Bewegung des Kugelkreisels nach Richtung und Gröſse im Raume konstant.* —

Häufig gebraucht man das Wort „Stabilität" nach dem Vorgange von Foucault noch in einem anderen Sinne als oben geschehen. Man versteht darunter nämlich die scheinbare Tendenz gleichförmig rotierender Körper, gegenüber äuſseren Störungen die Richtung ihrer Rotationsaxe im Raume beizubehalten. Die Erscheinungen, um welche es sich bei diesen Versuchen handelt, sind bekannt genug. Wir denken etwa an unser in der Einleitung geschildertes Demonstrationsmodell eines Kreisels, welches wir durch Übergewichte so ausbalancieren mögen, daſs der Schwerpunkt in den Unterstützungspunkt zu liegen kommt. Indem wir den Kreisel durch Abwickelung einer Schnur in Bewegung setzen, erteilen wir ihm eine ziemlich starke Rotation, welche die Figurenaxe zur Rotationsaxe hat. Ohne groſse Anstrengung wird man es erreichen, daſs der Kreisel 20 Umdrehungen in der Sekunde macht. Wenn wir jetzt die Neigung der Figurenaxe erkennbar abändern wollen, so müssen wir eine erhebliche Kraft aufwenden. Kleinere Störungen, z. B. eine Erschütterung des Gestelles, ein leichter Schlag auf die Oberfläche des Kreisels, bringen kaum eine merkliche Änderung des Bewegungszustandes hervor. Hiermit vergleichen wir die Thatsache, daſs der nicht rotierende Kreisel auf jeden beliebigen Anstoſs offenbar mit einer deutlichen Bewegung reagiert. Wir werden dann in der That geneigt sein, an eine gewisse Widerstandsfähigkeit zu glauben, welche der Kreisel vermöge der Rotation gewinnt.

Analoge Verhältnisse beobachtet man sehr häufig bei frei beweglichen Körpern*). Wenn man ein Ziel mit einem geworfenen Körper treffen will, so erteilt man letzterem beim Abschleudern stets eine möglichst starke Rotation. Dadurch allein kann man einen regelmäſsigen und im Voraus bestimmbaren Gang des Körpers bewirken. Im anderen Falle würden allerlei Nebenumstände, die Wirkung des Luftwiderstandes, zufällige Strömungen in der Luft etc. die Bahn erheblich stören. Dies kommt z. B. für das Diskuswerfen der Alten oder für das heute übliche Reifenspiel in Betracht. Im Groſsen findet

*) Zahlreiche Beispiele dieser Art finden sich in der populär gehaltenen Schrift von Perry: Spinning tops, London 1890; wir möchten dieses anregende und durch seine amüsante Darstellung ausgezeichnete Büchlein angelegentlichst empfehlen.

etwas ähnliches statt bei der Einrichtung der modernen Artillerie- und Infanteriewaffen, nämlich bei der Benutzung *gezogener* Läufe, worauf wir später zurückkommen (Kap. IX, § 10, Nr. 9).

Das Verständnis der meisten dieser Erscheinungen ist, wenn man den Begriff des Impulses voraussetzt, nicht schwierig. Wir können dabei an den Kreisel oder eines der zuletzt genannten Beispiele denken (nur der ballistische Fall liegt etwas komplizierter). Durch den ursprünglichen Antrieb haben wir einen Impulsvektor geschaffen, welcher nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt und eine erhebliche Länge hat. Mit diesem Impuls setzt sich der Impuls der äufseren Störung nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Ist letzterer erheblich kleiner, als ersterer, so wird der ursprüngliche Impuls nach Lage und Gröfse nur wenig abgeändert. Mithin ist auch der abgeänderte Bewegungszustand von dem ursprünglichen nur wenig verschieden; die Rotationsaxe behält ihre Lage im Raume nahezu bei und auch die Figurenaxe bleibt in der Nähe ihrer früheren Lage.

Um ein numerisches Beispiel zu geben, mögen wir etwa die oben genannte Zahl von 20 Umdrehungen in der Sekunde zu Grunde legen. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt dann $2\pi \,.\, 20$ (sec$^{-1}$). Ihr entspricht nach unseren Festsetzungen ein Drehungsvektor von $2\pi \,.\, 20$ cm Länge. Um den zugehörigen Impulsvektor zu berechnen, müssen wir uns ein Urteil über die Gröfse des Trägheitsmomentes um die Figurenaxe bilden. Wir denken uns zu dem Zwecke den glockenförmigen Hauptteil unseres Modelles etwa durch eine Kreisscheibe von 1 cm Dicke und 10 cm Radius ersetzt. Die Dichte des Materiales beträgt ca 8 (gr. cm$^{-3}$), (nämlich 7,6 für Eisen, 8,5 für Kupfer). Für das Trägheitsmoment findet man daraufhin leicht den Wert $4\pi . 10^4$ (gr. cm$^2$); der Impulsvektor bekommt daher nach unseren früheren Verabredungen die Länge von $(4\pi)^2\, 10^5$ gleich ca $15 \,.\, 10^6$ cm. Der Impulsvektor ist also etwa 150 Kilometer oder 20 deutsche Meilen lang. Sodann berechnen wir die Gröfse des Zusatzimpulses in einem konkreten Beispiel. Wir wollen etwa von der Höhe eines halben Meters einen Körper von der Masse eines Grammes auf den Rand der Kreiselscheibe herabfallen lassen. Die Geschwindigkeit, mit welcher unser Körper unten ankommt, ist nach den Fallgesetzen gleich $\sqrt{2gh}$ d. h. für $h = 50$ cm, $g =$ ca. 900 (cm sec$^{-2}$) gleich 300. Der ausgeübte Stofs beträgt also 300 (gr. cm sec$^{-1}$). Das Drehmoment desselben ist, da der Radius der Kreiselscheibe zu 10 cm angenommen wurde, gleich 3000. Unser Zusatzimpuls hat hiernach die Länge von 30 m und ist, wenn die Figurenaxe vertikal steht, horizontal gerichtet. Es ist klar, dafs dieser Zusatzimpuls gegenüber der stattlichen Länge des ursprünglichen

Impulses nur eine relativ geringe Änderung bedeutet. Die zugehörige Änderung des Bewegungszustandes wird daher kaum beobachtet werden können. Zusammenfassend können wir sagen:

*Die fraglichen Erscheinungen sind an sich nicht merkwürdiger als die durchaus selbstverständliche Thatsache, dafs ein in schneller Vorwärtsbewegung begriffener Körper durch einen seitlichen Anstofs um so weniger aus seiner Richtung abgelenkt wird, je gröfser sein ursprünglicher Translationsimpuls oder, was dasselbe ist, seine Translationsgeschwindigkeit war.*—

Etwas anders stellt sich die Sache, wenn wir statt einer einmaligen oder kurzen Störung eine kontinuierliche Einwirkung haben. Offenbar kann eine ganz kleine aber anhaltende Abänderung des Impulses selbst gegenüber einem sehr grofsen Anfangsbetrage eine erhebliche Wirkung erzielen, falls wir nur die Beobachtung über ein genügend grofses Zeitintervall ausdehnen. Dieses ist auch in der That der Fall, wie das im Folgenden zu besprechende Beispiel der Schwerewirkung zeigt.

Nachdem wir die Erscheinungen selbst **qualitativ** verstanden haben, wollen wir schliefslich noch die *Ausdrucksweise von der Stabilität der Rotationsaxe* **präcisieren**, durch welche man diese Erscheinungen häufig beschreibt.

Zunächst werden wir dem Worte „Stabilität“ seinen spezifischen Sinn reservieren wollen, in dem es zu Anfang dieses Paragraphen vorkam und in dem es den Gegensatz zu dem Worte „Labilität“ bildet. Wir werden daher statt Stabilität der Rotationsaxe lieber „*Erhaltung der Rotationsaxe*“ sagen. Sodann möchten wir hier überhaupt nicht von der Rotationsaxe, sondern von der Impulsaxe sprechen. *Nicht der Drehungsvektor, sondern der Impulsvektor ist es, auf den es dynamisch in erster Linie ankommt.* Haben wir die Lage des Impulsvektors ermittelt, so folgt die Lage des Drehungsvektors unmittelbar, z. B. auf Grund der Konstruktion von pag. 101. Es ist durchaus falsch, dafs zur Verlegung des Drehungsvektors eine äufsere Ursache, eine Kraft, erfordert wird. *Die Kraft wird nicht zur Verlegung des Drehungsvektors sondern zur Verlegung des Impulsvektors gebraucht.* Denken wir z. B. an die allgemeine Bewegung des kräftefreien Kreisels. Hier ändert die Drehungsaxe fortgesetzt ihre Richtung, indem sie auf dem Herpolhodiekegel entlang wandert, ohne dafs eine äufsere Kraft wirkt, während andrerseits der Impulsvektor fest bleibt. Die Änderung der Drehungsaxe findet eben deshalb und in solcher Weise statt, dafs die Impulsaxe ungeändert bleiben kann.

Und nun gilt (wie wir wissen) das „Gesetz von der Erhaltung der Impulsaxe“ gegenüber äufseren Störungen nicht genau. Wie klein auch der hinzukommende Impuls gegen den ursprünglichen sein mag,

immer bringt er eine endliche Änderung hervor. Diese genügt, um die anfangs etwa zusammenfallenden Axen der Rotation und des Impulses zu trennen. Infolgedessen steht die Drehungsaxe fortan im Raume nicht mehr still, sondern beschreibt (bei dem symmetrischen Kreisel) einen dünnen Kreiskegel um die Impulsaxe. Das Gleiche gilt von der Bewegung der Figurenaxe.

Hiernach werden wir das vermeintliche Gesetz von der Stabilität der Rotationsaxe dahin korrigieren müssen, dafs wir sagen:

*Der Impulsvektor wird unter gewissen, in der Praxis häufig vorliegenden Verhältnissen durch äufsere Störungen relativ wenig geändert. Infolgedessen werden, wenn die Bewegung anfangs um die Figurenaxe stattfand, der Herpolhodiekegel und der von der Figurenaxe bei der abgeänderten Bewegung beschriebene Kegel auch nach der Störung eine sehr kleine Öffnung behalten.*

---

# Kapitel III.

## Die Eulerschen Gleichungen nebst weiteren Ausführungen zur Kinetik des Kreisels.

### § 1. Ableitung der Eulerschen Gleichungen.

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die geometrischen und mechanischen Grundlagen der Kreiseltheorie kennen gelernt haben, wollen wir in diesem zunächst die analytische Behandlung des Problems vorbereiten. In erster Linie gilt es, die berühmten *Eulerschen Gleichungen* abzuleiten.

Wir beginnen mit einer kinematischen Betrachtung, indem wir an unsere früheren Resultate über die unendlich kleinen Drehungen anknüpfen.*)

Es handle sich um einen beliebigen Vektor $J$, den wir einerseits auf ein festes, andrerseits auf ein um $O$ bewegliches System beziehen. Die Koordinaten seines Endpunktes mögen im ersten Fall mit $l, m, n$, im zweiten mit $L, M, N$, bezeichnet werden. Die Bezeichnungen sind mit Rücksicht darauf gewählt, dafs wir unseren Vektor sogleich mit dem Impulsvektor identifizieren werden. Richtung und Gröfse des Vektors seien beliebig variabel. Seine Veränderung in der Zeit $dt$, relativ zu dem festen System, sei mit $di$, die davon verschiedene relativ zu dem beweglichen System mit $dJ$ bezeichnet. Die Komponenten von $di$ nach den festen Koordinatenaxen sind $dl, dm, dn$, die Komponenten von $dJ$ nach den beweglichen $dL, dM, dN$. Schliefslich wollen wir mit $d\lambda, d\mu, d\nu$ die Komponenten von $di$ nach den beweglichen Koordinatenaxen bezeichnen. Das bewegliche System erfahre in jedem Momente die unendlich kleine Rotation $R$, deren Komponenten im beweglichen System wie früher mit $p, q, r$ bezeichnet werden mögen.

Wir ziehen nun das Schema (3) von pag. 41 heran. Dieses Schema können wir so auffassen, dafs es die Koordinaten eines im Raume festen Punktes $P$ in Bezug auf zwei successive Lagen des beweglichen Koordinatensystems mit einander in Verbindung setzt. Der Endpunkt des Vektors $J$ fällt zur Zeit $t$ mit Punkt $P$ zusammen. Dieser hat im beweglichen System zur Zeit $t$ die Koordinaten $L, M, N$; es

*) In den Zusätzen zu Heft IV, pag. 944 wird die folgende Betrachtung kürzer und übersichtlicher zusammengefafst.

fragt sich, welche Koordinaten demselben Raumpunkte zur Zeit $t + dt$ zukommen.

Es sind dieses nicht etwa die Koordinaten $L + dL$, $M + dM$, $N + dN$. Diese kommen vielmehr dem Endpunkte $P'$ des während der Zeit $dt$ abgeänderten Vektors $J$ zu. Wir kommen aber von dem Punkte $P'$ zu $P$ zurück, wenn wir die Anderung $di$ unseres Vektors wieder rückgängig machen. Da nun die Komponenten von $di$ im beweglichen System mit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ bezeichnet wurden, so werden die Koordinaten von $P$ im beweglichen System zur Zeit $t + dt$ die folgenden werden:

$$L + dL - d\lambda, \quad M + dM - d\mu, \quad N + dN - d\nu.$$

Unser Schema (3) liefert nun, von oben nach unten gelesen, für die Koordinaten des Punktes $P$ folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
L + dL - d\lambda &= \quad L \quad + rMdt - qNdt, \\
M + dM - d\mu &= -rLdt + \quad M \quad + pNdt, \\
N + dN - d\nu &= \quad qLdt - pMdt + \quad N \quad .
\end{aligned}$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$(1) \qquad \begin{cases}
\dfrac{dL}{dt} - \dfrac{d\lambda}{dt} = \qquad + rM - qN, \\[2mm]
\dfrac{dM}{dt} - \dfrac{d\mu}{dt} = -rL \qquad + pN, \\[2mm]
\dfrac{dN}{dt} - \dfrac{d\nu}{dt} = \quad qL - pM \qquad .
\end{cases}$$

Der Sinn dieser Gleichungen wird sehr viel deutlicher, wenn wir uns der Schreibweise der Vektoranalysis bedienen. Benutzen wir nämlich den pag. 61 erklärten Begriff des vektoriellen Produktes, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermafsen zusammenfassen:

$$(1') \qquad \frac{dJ}{dt} - \frac{di}{dt} = V[JR],$$

da $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ nichts anderes als die Komponenten von $di$ im beweglichen System waren.

*Die geometrische Differenz der Änderungsgeschwindigkeiten unseres Vektors gegen das feste und gegen das bewegliche System ist also nach Richtung und Gröfse gleich dem vektoriellen Produkt unseres Vektors J und des Drehungsvektors R.*

Verbinden wir diesen fundamentalen und sehr allgemeinen kinematischen Satz mit den kinetischen Prinzipien des vorigen Kapitels, so ergeben sich die Eulerschen Gleichungen mit einem Schlage.

Es handle sich erstens um die kräftefreie Bewegung. Der Vektor

des vorigen Satzes sei der Impuls des Kreisels; das Koordinatensystem $XYZ$ kann zunächst eine beliebige Lage gegen den Kreisel haben.

Bei der kräftefreien Bewegung ist der Impuls im Raume konstant. Wir haben also

$$\frac{di}{dt} = 0.$$

Die Gleichung (1) ergiebt nun

$$\frac{dJ}{dt} = V[J, R]. \tag{2}$$

Wir haben damit *eine erste vektorielle Form der Eulerschen Gleichungen des kräftefreien Kreisels* abgeleitet.

Zu einer zweiten Form derselben Gleichungen gelangen wir, wenn wir von der Vektorgleichung (2) zu ihren Komponentengleichungen nach den Koordinatenaxen zurückgehen. Es ist dieses derselbe Übergang im umgekehrten Sinne, der uns oben von (1) zu (1′) führte. Unsere *zweite Form der Eulerschen Gleichungen des kräftefreien Kreisels* ist daher die folgende:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \phantom{-rL} \quad rM - qN, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL \quad\quad + pN, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad qL - pM \end{cases} \tag{2'}$$

Wir kommen schliefslich zu einer dritten Form derselben Gleichungen, wenn wir einen der beiden Vektoren $J$ und $R$ vermöge der zwischen ihnen bestehenden Relation eliminieren. Die Elimination wird besonders einfach, wenn wir das $XYZ$-System speziell mit dem Hauptträgheitskreuz zusammenfallen lassen. Dann können wir nämlich die Komponenten von $J$ einfach durch die Werte ersetzen:

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr$$

und erhalten für die Komponenten von $R$ die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases} \tag{2''}$$

Dies sind die *Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung in der gewöhnlich benutzten Form.*

Die letzte Formulierung der Eulerschen Gleichungen ist ersichtlich

weniger allgemein, wie die vorangehenden, weil sie eine spezielle Lage des Koordinatensystems voraussetzt. Die Gleichungen (2′) gelten für eine ganz beliebige Lage des im Kreisel festen Systems und ändern ihre Form überhaupt nicht, wenn wir das Koordinatensystem drehen. Die Gleichung (2) ist aber offenbar der vollkommenste Ausdruck der Eulerschen Gleichungen, weil sie überhaupt keine Beziehung auf ein Koordinatensystem enthält. Diese Gleichung setzt am unmittelbarsten die folgende Tatsache in Evidenz:

*Die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung sind nichts anderes als der analytische Ausdruck dafür, daſs der Impuls im Raume konstant ist.*

Ebenso ergeben sich die Eulerschen Gleichungen beim Hinzutreten beliebiger äuſserer Kräfte. Die letzteren setzen wir zunächst hinsichtlich des Bezugspunktes $O$ zu einer einzelnen Drehkraft zusammen, welche wir mit $\Delta$ bezeichnen und welche in dem (beliebig gelegenen) $XYZ$-System die Komponenten $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ besitzen möge. Die Änderung $di$, welche der Impuls im Raume beim Hinzutreten der äuſseren Kräfte während der unendlich kleinen Zeit $dt$ erfährt, wird alsdann nach dem Fundamentalsatze IIa von pag. 115 gleich dem unendlich kleinen Stoſse $\Delta\, dt$. Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{di}{dt} = \Delta.$$

Mit Rücksicht darauf ergeben sich die Eulerschen Gleichungen beim Vorhandensein äuſserer Kräfte wieder direkt aus der kinematischen Gleichung (1′).

Als *eine erste Form dieser Gleichungen* erhalten wir

$$\frac{dJ}{dt} = V(J, R) + \Delta. \tag{3}$$

Gehen wir wie oben zu den Komponentengleichungen über, so entsteht *eine zweite Form dieser Gleichungen*, welche bei beliebiger Lage des Koordinatensystems $XYZ$ gilt, nämlich

$$(3') \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \phantom{-rL+{}} rM - qN + \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL \phantom{{}+rM} + pN + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = \phantom{-{}} qL - pM \phantom{{}+pN} + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Wollen wir einen der beiden Vektoren $J$ oder $R$ eliminieren, so ist es wieder bequem das $XYZ$-System mit dem Trägheitskreuz zusammenfallen zu lassen. Dann kommen wir auf die *gewöhnliche Form der Eulerschen Gleichungen beim Vorhandensein äuſserer Kräfte:*

$$(3'') \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + \Lambda, \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A) rp + \mathsf{M}, \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Die Formen (3) und (3′) der Eulerschen Gleichungen verdienen wieder vor (3″) den Vorzug, weil sie unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind. Die Gleichungen (3) zeigen besonders deutlich:

*Beim Vorhandensein äufserer Kräfte sind die Eulerschen Gleichungen der analytische Ausdruck für die Thatsache, dafs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raum nach Richtung und Gröfse gleich ist der den äufseren Kräften entsprechenden Drehkraft.*

Bei Euler treten die nach ihm benannten Gleichungen zum ersten Male in der Abhandlung auf: „Mouvement de rotation des corps solides autour d'un point fixe“*). Die vektorielle Schreibweise kommt bei Hrn. Tait in seiner Arbeit**): „On the rotation of a body about a fixed point“ vor. Die hier vorgetragene Auffassung der Eulerschen Gleichungen ist zuerst von Saint Guilhem***) (1851, 54) und bald darauf von Hayward†) (1856) gegeben worden. Sie operiert mit dem mechanischen Systeme als mit einem Ganzen und läfst an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Die Poinsotsche Ableitung derselben Gleichungen††), welche wir sofort näher wiedergeben werden, ist viel weniger durchsichtig.

Wir wollen die diesbezüglichen Poinsotschen Betrachtungen hier nur soweit reproduzieren, als sie uns mit einer *neuen Auffassung des in den Eulerschen Gleichungen auftretenden vektoriellen Produktes aus Impuls- und Drehungsvektor* ausstattet. Dieser bei unserer Ableitung *kinematisch* definierte Term besitzt, wie wir zeigen wollen, eine einfache *kinetische* Bedeutung.

Wir wollen uns zu dem Zwecke einmal vorstellen, dafs die Drehungsaxe im Körper fest sei, und dafs der Kreisel um diese mit konstanter Geschwindigkeit rotiere. Alsdann würde in jedem Massenpunkte des Kreisels eine Centrifugalkraft angreifen, deren Gröfse und Richtung

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1758.

**) Vgl. Transactions of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. 25, 1869, pag. 279, 280. Der Vektor $\varphi(R)$, welcher bei Tait sowie früher bei Hamilton (Elemente der Quaternionenrechnung, Band 2, pag. 350 der deutschen Ausgabe) durch eine ziemlich komplizierte Vektorgleichung mittelst des Rotationsvektors $R$ definiert wird, ist unser Impuls.

***) Journ. de math. (1) 16, p. 347 (1851) u. (1) 19, p. 346 (1854).

†) Vgl. oben pag. 113. ††) Vgl. Théorie nouvelle . . ., Nr. 53 u. ff.

sich nach den Regeln der elementaren Punktmechanik bestimmt. Wir werden darauf alle diese Centrifugalkräfte hinsichtlich des festen Punktes $O$ als Bezugspunkt zu einer resultierenden „*centrifugalen Drehkraft*“ $C$ zusammensetzen. *Diese Drehkraft*, behaupten wir, *ist gerade gleich dem in Rede stehenden vektoriellen Produkt:*

$$(4) \qquad C = [JR].$$

Beim Beweise wollen wir ähnlich verfahren, wie pag. 94 geschehen, als wir aus dem System der zu den einzelnen Massenteilchen gehörigen Einzelimpulse den Gesamtimpuls des Kreisels zusammensetzten. Wir wollen nämlich die (als fest gedachte) Drehungsaxe zur $X$-Axe nehmen, so dafs wir die (als konstant vorausgesetzte) Rotationsgeschwindigkeit mit $p$ bezeichnen können. Jedes Massenteilchen $dm$ des Kreisels wird alsdann auf einem Kreise um die $X$-Axe mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $p$ herumgeführt. Der Radius des Kreises wird, wenn die Koordinaten von $dm$ $XYZ$ sind, $\sqrt{Y^2+Z^2}$.

Bei dieser Bewegung wird das einzelne Massenteilchen von einer Centrifugalkraft angegriffen, deren Vektor wir mit $K$ bezeichnen wollen. Wir werden den Begriff der Centrifugalkraft im fünften Paragraphen vom Standpunkte der Impulstheorie aus entwickeln. Hier entnehmen wir den dortigen Ausführungen die wohlbekannte Thatsache, dafs der Vektor der Centrifugalkraft nach Richtung und Sinn radial vom Mittelpunkte des Kreises nach aufsen gerichtet ist und dafs der Gröfse nach in unserem Falle

$$|K| = dm \cdot p^2 \sqrt{Y^2+Z^2}\,^{*})$$

ist. Die Komponenten von $K$ nach den Koordinatenaxen werden daher, wie man leicht erkennt, bez.:

$$K^X = 0, \quad K^Y = p^2 Y dm, \quad K^Z = p^2 Z dm.$$

Aus dem System der Einzelkräfte $K$ berechnet sich die centrifugale Drehkraft $C$ nach den Regeln der Statik. Aus den Gleichungen (1) von pag. 85 ergeben sich die Komponenten von $C$ folgendermafsen:

$$(5) \qquad C^X = 0, \quad C^Y = -p^2 \int ZX dm, \quad C^Z = p^2 \int XY dm.$$

---

*) Die Bezeichnung $|K|$ für die Gröfse des Vektors $K$ entnehmen wir der in der Funktionentheorie üblichen Schreibweise (vermöge deren man ja den absoluten Betrag der komplexen Zahl $z = x + iy$, d. h. die Länge des zweigliedrigen Vektors $x + iy$ mit $|z|$ bezeichnet). Die Einführung dieses Zeichens wird uns im Folgenden häufig bequem sein, weil sie uns der Mühe überhebt, in jedem Falle Richtung und Sinn der betr. Vektoren in unsern Formeln zum Ausdruck zu bringen.

Erinnern wir uns andrerseits der Ausdrücke, welche pag. 94 bei gleicher Lage des Koordinatensystems für den resultierenden Impuls abgeleitet wurden. Wir fanden für die Komponenten desselben:

$$(5') \quad L = p\int(Y^2 + Z^2)\,dm, \quad M = -p\int XY\,dm, \quad N = -p\int ZX\,dm.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen können wir die Gleichungen (5) folgendermaßen schreiben:

$$C^X = 0, \quad C^Y = pN, \quad C^Z = -pM.$$

Die rechterhand stehenden Größen sind aber nach der analytischen Definition des vektoriellen Produktes von pag. 62 direkt mit den Komponenten von $[J\,R]$ identisch, da bei unserer Wahl des Koordinatensystems zwei Komponenten des Vektors $R$ verschwinden $(q = r = 0)$. Unsere obige Behauptung ist mithin erwiesen.

Auf Grund der l. c. erwähnten geometrischen Bedeutung des vektoriellen Produktes können wir sodann folgenden Satz aussprechen, welcher natürlich richtig bleibt, auch wenn wir die oben der Bequemlichkeit halber getroffene spezielle Wahl des Koordinatensystems fallen lassen:

*Das Moment der Zentrifugalkräfte wird durch einen Vektor dargestellt, welcher, gleichzeitig auf dem Drehungsvektor und dem Impulsvektor senkrecht, nach derjenigen Seite hin errichtet ist, von der aus der letztere in den ersteren durch eine positive Drehung auf kürzestem Wege übergeführt wird. Der Größe nach ist unsere Drehkraft bei durchgehender Zugrundelegung des absoluten Maßsystems gleich dem Inhalt des aus Impuls- und Drehungsvektor zu konstruierenden Parallelogrammes.*

An diese kinetische Auffassung des in den Eulerschen Gleichungen auftretenden Termes $[J\,R]$ schließt sich eine *neue Interpretation der Eulerschen Gleichungen* an. Wir betonen aber ausdrücklich, daß wir dieser neuen Interpretation gegenüber unserer ursprünglichen, nach welcher die Eulerschen Gleichungen die Konstanz des Impulses im Raume aussagten, nur ein sekundäres Interesse beimessen.

Bemerken wir zunächst, daß wir die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien bez. der von der äußeren Drehkraft $\Delta$ beeinflußten Bewegung mit Rücksicht auf (4) folgendermaßen schreiben können:

$$\frac{dJ}{dt} = C \quad \text{bez.} \quad \frac{dJ}{dt} = C + \Delta.$$

Daraufhin können wir als Ergänzung zu den Impulssätzen Ia und IIa von pag. 112 und pag. 115 zwei neue Sätze aussprechen, welche sich auf die Änderung des Impulses relativ zu dem Kreisel beziehen:

Satz Ib. *Bei der kräftefreien Bewegung ändert sich der Impuls relativ zu dem Körper in jedem Momente so, daſs er sich mit dem von den soeben betrachteten Centrifugalkräften herrührenden unendlich kleinen Drehstoſs zusammensetzt.*

Satz IIb. *Bei der unter dem Einfluſs äuſserer Kräfte stehenden Bewegung wird die Änderung des Impulses relativ zum Körper in jedem Momente gleich dem von unseren Centrifugalkräften herrührenden Drehstoſs vermehrt um den den äuſseren Kräften entsprechenden Drehstoſs.*

Diese Impulssätze zeigen, daſs man die umgekehrte Bewegung, welche durch den Impuls $J$ und seine Änderung $\frac{dJ}{dt}$ bestimmt ist, in derselben Weise behandeln kann wie die direkte Bewegung, falls man nur die bei der direkten Bewegung in Frage kommenden äuſseren Kräfte um die Centrifugalkräfte vermehrt, welche bei konstant gedachter Drehung in den einzelnen Massenteilchen angreifen würden.

Besonders plausibel wird der Inhalt unserer Impulssätze in dem speziellen Falle $\frac{dJ}{dt} = 0$, *wo der Impuls im Körper fest ist.* Die entsprechende Bewegung besteht offenbar aus einer gleichförmigen Drehung um eine (im Körper und im Raume) feste Axe. Hier ist es ganz klar, daſs wir — in Übereinstimmung mit dem Impulssatze IIb — von auſsen her eine Drehkraft $\Delta = - C$ aufwenden müssen, welche der centrifugalen Drehkraft entgegengesetzt gleich ist.

Die in Aussicht gestellte neue Interpretation der Eulerschen Gleichungen besteht nun einfach darin, daſs wir die Reihenfolge der letzten Betrachtungen umkehren und sagen: *Die Eulerschen Gleichungen sind der direkte analytische Ausdruck unserer Impulssätze Ib und IIb.*

Bei Poinsot steht die zuletzt genannte Auffassung der Eulerschen Gleichungen im Vordergrunde. Seine Behandlung der kräftefreien Kreiselbewegung beruht geradezu auf dem axiomatisch hingestellten und nicht ganz klar formulierten Impulssatze Ib. Offenbar ist aber dieser Impulssatz viel weniger leicht verständlich, wie unsere früheren Sätze, welche sich auf die Änderung des Impulses im Raume bezogen. Man bemerke vor allen Dingen, daſs die Centrifugalkräfte, von denen unsere jetzigen Impulssätze handeln, nur dann wirklich fühlbar werden, wenn man die Drehungsaxe im Körper festgehalten denkt, daſs sie also bei der wirklichen Bewegung des Kreisels, (bei welcher die Drehungsaxe fortwährend wechselt), überhaupt nicht auftreten. Es scheint uns daher nicht richtig, mit Poinsot diese neuen Impulssätze als selbstverständliche Axiome vorauszusetzen und die Ableitung der Eulerschen Gleichungen darauf zu basieren. Dement-

sprechend sehen auch die meisten Lehrbücher*) von der Poinsotschen Ableitung der Eulerschen Gleichungen ab und geben eine Betrachtung, welche dem Sinne nach mit unserer ursprünglichen Ableitung identisch ist und nur deshalb weniger einfach erscheint, weil die prinzipielle Bedeutung des Impulsbegriffes nicht immer genügend klargestellt wird.

Zum Schlusse mögen noch einige kleinere Bemerkungen Platz finden, welche mit dem Begriffe der centrifugalen Drehkraft $C$ in Zusammenhang stehen.

Es handle sich zunächst um die Rechtfertigung des Wortes „Centrifugalmoment“, mit welchem wir pag. 98 die Integrale

$$\int YZdm, \quad \int ZXdm, \quad \int XYdm$$

belegten. Die oben gegebene Berechnung von $C$ zeigt, dafs diese Gröfsen direkt oder bis auf das Vorzeichen den Komponenten der aus den einzelnen Centrifugalkräften entspringenden Drehkraft gleich sind, falls wir den Körper mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um eine der Koordinatenaxen drehen. *Die als Centrifugalmomente bezeichneten Gröfsen treten also unter gewissen Verhältnissen wirklich als Drehmomente der Centrifugalkräfte auf.*

Wenn die etwa mit der $X$-Axe zusammenfallende Drehungsaxe eine Hauptaxe des Körpers ist, so werden nach Definition der Hauptaxen die beiden Centrifugalmomente

$$\int ZXdm \quad \text{und} \quad \int XYdm$$

gleich Null; infolgedessen verschwinden nach (5) alle drei Komponenten von $C$. *Um die Hauptaxen herum sind also die Massen des Körpers so ausbalanciert, dafs die Centrifugalkräfte der einzelnen Massenteilchen sich gegenseitig kompensieren.* In diesem Falle liegt bei der kräftefreien Bewegung kein Grund vor, warum der Impuls seine Lage gegen den Körper verändern sollte. Wir kommen von hier aus zu der uns geläufigen Thatsache, dafs die Hauptaxen permanente Impuls- und also auch permanente Drehungsaxen sind.

In allen anderen Fällen besitzt die resultierende centrifugale Drehkraft eine von Null verschiedene Gröfse und ist senkrecht gegen die Impuls- und Drehungsaxe gerichtet. Sie bewirkt alsdann nach unserem Impulssatze Ib während der Zeit $dt$ im Falle der kräftefreien Bewegung relativ zum Kreisel eine Umlagerung des Impulsvektors, bei welcher der Endpunkt desselben um das Stück $Cdt$ verschoben wird. *Der*

*) Vgl. z. B. Despeyrons-Darboux, Appell etc.

*Impuls-Endpunkt schreitet also im Körper stets gleichzeitig senkrecht zum instantanen Drehungsvektor und zur instantanen Impulsaxe fort mit einer Geschwindigkeit, die dem Parallelogramm aus beiden Vektoren gleich ist.* —

Endlich eine letzte wichtige Bemerkung über die Eulerschen Gleichungen. Die Eulerschen Gleichungen bestimmen die Lage des Impulsvektors (oder die des Drehungsvektors) gegen den Kreisel. Um andrerseits die Lage des Kreisels im Raume zu bestimmen, ist ein weiteres Gleichungssystem erforderlich, welches rein kinematischer Natur ist und von der Beschaffenheit der auf den Kreisel wirkenden äufseren Kräfte nicht abhängt. Je nachdem wir die Lage des Kreisels durch die Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ oder durch die $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ beschreiben wollen, werden wir hiezu die Gleichungen (4) von pag. 43 oder die Gleichungen (9) von pag. 45 benutzen. *Die vollständigen Differentialgleichungen des Kreiselproblems werden daher durch die Eulerschen Gleichungen einerseits und durch eines der zuletzt genannten Gleichungssysteme andrerseits dargestellt.*

## § 2. Analytische Behandlung der kräftefreien Bewegung des Kreisels.

Wir wollen jetzt die bereits im vorigen Kapitel besprochene Theorie der kräftefreien Kreiselbewegung noch einmal analytisch ableiten und vervollständigen. Dabei gehen wir von den Differentialgleichungen des Problems aus, d. h. von den Eulerschen Gleichungen einerseits und von den etwa in den $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ geschriebenen kinematischen Gleichungen andrerseits. Wir haben also erstlich:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = Mr - Nq, \\ \dfrac{dM}{dt} = Np - Lr, \\ \dfrac{dN}{dt} = Lq - Mp; \end{cases}$$

ferner aber:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = r - \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{1}{\sin\vartheta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = (p\cos\varphi - q\sin\varphi). \end{cases}$$

Es handelt sich darum, dieses Gleichungssystem zu integrieren. Wir bemerken vorab, dafs sich das Integrationsgeschäft in zwei Schritte zerlegt. Wir können nämlich die Gleichungen (1) für sich behandeln und aus ihnen $p$, $q$, $r$ als Funktionen der Zeit bestimmen. Mit den

so gefundenen Ausdrücken gehen wir in die Differentialgleichungen (2) ein, welche die Werte von $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ liefern.

Die Eulerschen Gleichungen (1) integrieren heifst: drei von einander unabhängige Relationen finden, welche $t$ und die $p$, $q$, $r$, aber nicht mehr ihre Differentialquotienten nach der Zeit enthalten. Zwei solche Relationen können sofort in algebraischer Form aufgestellt werden.

Wenn wir die Gleichungen (1) bez. mit $p, q, r$ oder mit $L$, $M$, $N$ multiplizieren und addieren, so entsteht rechts beidemal Null. Wir haben also

$$(3) \qquad \begin{cases} p dL + q dM + r dN = 0, \\ L dL + M dM + N dN = 0. \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist uns wohlbekannt. Sie entsprechen der pag. 146 hervorgehobenen Thatsache, dafs die Fortschreitungsrichtung des Impuls-Endpunktes im Körper dauernd gleichzeitig auf dem Drehungsvektor und dem Impulse senkrecht steht.

Die Gleichungen (3) lassen sich nun mit Rücksicht auf die Relationen zwischen dem Impuls- und dem Drehungsvektor sofort integrieren; in den $p$, $q$, $r$ geschrieben lautet das Resultat der Integration:

$$(4) \qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit pag. 124.

Durch (4) wird die *Polhodiekurve* als eine *Raumkurve vierter Ordnung* definiert. Stellen wir aus den vorstehenden Gleichungen eine in den $p, q, r$ homogene Relation her, so liefert uns diese die Gleichung des *Polhodiekegels*. Zu dem Zwecke multiplizieren wir die erste Gleichung mit $G^2$, die zweite mit $2h$ und erhalten durch Subtraktion

$$(AG^2 - 2hA^2)p^2 + (BG^2 - 2hB^2)q^2 + (CG^2 - 2hC^2)r^2 = 0.$$

Der Polhodiekegel wird also in unserem Falle ein *Kegel zweiten Grades*.

Zur vollständigen Integration fehlt uns noch eine dritte Gleichung zwischen $p, q, r$ und $t$. Der Symmetrie halber wollen wir dieselbe in der Weise aufstellen, dafs wir die instantane Rotationsgeschwindigkeit $\Omega$ in ihrer Abhängigkeit von $t$ ausdrücken. Diese Abhängigkeit ist aber nicht algebraischer Natur, sondern führt, wie wir sogleich sehen werden, auf die elliptischen Transcendenten. Wir werden es daraufhin begreiflich finden, dafs unsere frühere elementargeometrische Behandlung hinsichtlich des zeitlichen Ablaufs der Poinsot-Bewegung unvollständig bleiben mufste, und dafs sie speziell zur Darstellung der Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblicke nicht völlig ausreichte.

Am einfachsten verfahren wir folgendermaßsen. Wir kombinieren die Gleichungen (4) mit der folgenden Identität

$$(4') \qquad \Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = u,$$

in welcher $u$ eine Hülfsvariable bedeutet. Aus (4) und (4') berechnen sich $p^2$, $q^2$ und $r^2$ als lineare Funktionen von $u$ und zwar findet man durch eine kleine Determinantenrechnung

$$(5) \qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{uBC - 2h(B+C) + G^2}{(A-B)(A-C)}, \\ q^2 = \dfrac{uCA - 2h(C+A) + G^2}{(B-C)(B-A)}, \\ r^2 = \dfrac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}. \end{cases}$$

Insbesondere wird also das Produkt $pqr$ gleich der Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten Grades in $u$.

Gehen wir nun auf die Gleichungen (1) zurück. Wir multiplizieren dieselben mit $\frac{2p}{A}, \frac{2q}{B}, \frac{2r}{C}$ und erhalten durch Addition

$$2\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt}\right) = \frac{du}{dt} = cpqr,$$

wo zur Abkürzung

$$c = 2\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)$$

gesetzt ist. Infolgedessen wird

$$(6) \qquad dt = \frac{1}{c}\frac{du}{pqr} \quad \text{oder} \quad t - t_0 = \frac{1}{c}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{pqr}.$$

Das hier auftretende Integral haben wir nach dem, was soeben über die Abhängigkeit des Produktes $pqr$ von $u$ gesagt wurde, als *elliptisches Integral* zu bezeichnen, insofern der Nenner die Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten Grades in $u$ bedeutet. Genauer auf die Theorie der elliptischen Integrale wollen wir indessen erst im folgenden Kapitel bei dem Probleme des schweren symmetrischen Kreisels eingehen. Wir bemerken hier nur, dafs durch die Gleichung (6) $t$ als Funktion von $u$ und also auch umgekehrt $u$ bez. $\Omega^2$ als Funktion von $t$ bestimmt ist. Mittels der Gleichungen (5) können wir dann auch $p, q, r$ als Funktionen von $t$ berechnen.

Betrachten wir nun die Gleichungen (2), indem wir in ihnen $p, q, r$ als bekannt ansehen. Die direkte Integration dieser Gleichungen können wir umgehen, wenn wir uns auf die Thatsache stützen, dafs der Impuls im Raume konstant ist. Die feste Axe des Impulses können wir zur

$z$-Axe wählen, wobei der Endpunkt des Impulses die Koordinaten $x = 0$, $y = 0$, $z = G$ und $X = Ap$, $Y = Bq$, $Z = Cr$ erhält. Die Richtungscosinus der $z$-Axe gegen die Axen $X$, $Y$, $Z$, welche früher mit $c$, $c'$, $c''$ bezeichnet wurden, sind daher

$$c = \frac{Ap}{G}, \quad c' = \frac{Bq}{G}, \quad c'' = \frac{Cr}{G};$$

andererseits haben wir nach den Gleichungen (6) von pag. 20

$$c = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c' = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Mithin wird

$$(7) \qquad \sin\vartheta \sin\varphi = \frac{Ap}{G}, \quad \sin\vartheta \cos\varphi = \frac{Bq}{G}, \quad \cos\vartheta = \frac{Cr}{G}.$$

Diese Gleichungen bestimmen $\varphi$ und $\vartheta$ für jeden Wert von $t$, falls, wie wir voraussetzen, die $p$, $q$, $r$ bekannte Funktionen der Zeit sind. Sie müssen natürlich mit den Gleichungen (2) verträglich sein und stellen zwei Integrale derselben dar.

Über die an und für sich willkürlichen Integrationskonstanten haben wir dadurch implicite verfügt, daſs wir die Impulsaxe speziell zur Axe $z$ nahmen.

Der Winkel $\psi$ berechnet sich alsdann durch eine bloſse Quadratur. Die mittelste der Gleichungen (2) liefert nämlich mit Rücksicht auf (7):

$$\frac{d\psi}{dt} = G\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - C^2r^2},$$

wofür wir nach Gleichung (4) auch schreiben können:

$$(8) \qquad \frac{d\psi}{dt} = G\,\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} = G\,\frac{2h - Cr^2}{G^2 - C^2r^2}.$$

Da wir $p$, $q$, $r$ als bekannte Funktionen von $t$ ansehen, kann hiernach $\psi$ durch eine Quadratur für jeden Wert von $t$ gefunden werden.

Durch die vorstehenden in den Lehrbüchern vielfach entwickelten Formeln wird es möglich, sämtliche Elemente der kräftefreien Kreiselbewegung numerisch auszurechnen. Wir könnten daher jetzt z. B. die früher aufgeworfene Frage nach der Gestalt der Herpolhodiekurve im Einzelnen beantworten, wenn wir nicht wie gesagt, das Studium der elliptischen Integrale einstweilen noch zurückschieben müſsten.

Übrigens würde man bei einer ausführlichen analytischen Behandlung mit Vorteil statt der $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zu Grunde legen. Es würde sich dabei zeigen, daſs, wie wir es später bei der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels schildern werden, die Formeln in den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ nicht nur symmetrischer, sondern auch in funktionentheoretischer Hinsicht erheblich einfacher werden, als in den gewöhnlich benutzten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$. Man bemerke, daſs schon die in

den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geschriebenen kinematischen Differentialgleichungen vor den entsprechenden Gleichungen in den $\varphi, \psi, \vartheta$ einen Vorzug haben. Während diese ein nicht reduzierbares System von drei simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen, zerfallen jene in zwei Paare von zwei simultanen linearen Differentialgleichungen, welche die Gröfsen $\alpha$ und $\beta$ einerseits und die Gröfsen $\gamma$ und $\delta$ andrerseits für sich zu bestimmen gestatten.

Von hier aus würden auch die schönen Resultate von Jacobi*), welcher direkt die neun Richtungscosinus $a, b, c, \ldots$ in ihrer Abhängigkeit von $t$ als $\vartheta$-Quotienten darstellt, sowie die anschliefsenden wichtigen Untersuchungen von Hermite**) eine neue Beleuchtung erfahren.

Wir wollen nun auch die, wie wir wissen, sehr einfache *kräftefreie Bewegung des symmetrischen Kreisels* von den Differentialgleichungen aus untersuchen. Wir legen wiederum die Gleichungen (1) und (2) zu Grunde, indem wir dort $A = B$ setzen. Alsdann ergiebt sich aus den Integralen (4) durch geeignete Kombination

$$(4') \qquad \begin{cases} p^2 + q^2 = \text{const.} = \dfrac{2hC - G^2}{A(C-A)}, \\ \quad r^2 \quad = \text{const.} = \dfrac{2hA - G^2}{C(A-C)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die Polhodiekurve jetzt in bekannter Weise aus einem um die Figurenaxe beschriebenen Kreise besteht. Gleichzeitig sehen wir, dafs die Gröfse

$$u = p^2 + q^2 + r^2$$

jetzt ihrerseits eine Konstante wird. Infolgedessen ist die obige Methode zur Auffindung eines dritten Integrales, bei welcher nach der Variabeln $u$ integriert wurde, nicht mehr anwendbar. Wir finden aber das noch erforderliche dritte Integral sehr leicht aus den Gleichungen (1) direkt. Wir multiplizieren die beiden ersten Gleichungen (1) bez. mit 1 und $\pm i$; dann ergiebt sich durch Addition:

$$(5') \qquad A\frac{d(p \pm iq)}{dt} = \pm i(C-A)\, r(p \pm iq)$$

oder

$$(6') \qquad p \pm iq = (p_0 \pm iq_0)\, e^{\pm \frac{(C-A)r_0}{A} it},$$

wo $p_0$, $q_0$ und $r_0$ die Werte von $p$, $q$ und $r$ zur Zeit $t = 0$ bedeuten.

*) Vgl. Sur la rotation d'un corps, Crelles Journal Bd. 39, 1850. Hier in Kap. VI, § 7 dargestellt.

**) Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Paris 1883. S. a. Kap. VI, § 9.

Es bleibt noch die Integration der Gleichungen (2) übrig. Aus den in (7) enthaltenen Integralen dieser Gleichungen schliefsen wir jetzt:

$$(7') \qquad \cos\vartheta = \frac{Cr}{G} = \text{const.},$$

$$\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi} = \pm i \frac{A}{G}(p \mp iq).$$

Aus der letzten Gleichung folgt sodann durch logarithmische Differentiation mit Rücksicht auf (5′) und (7′):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C-A}{A} r = \text{const.}$$

oder

$$(8') \qquad \varphi = \mu t,$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(8'') \qquad \mu = \frac{A-C}{A} r$$

setzen und annehmen, dafs dem Zeitpunkte $t = 0$ der Winkel $\varphi = 0$ entspricht.

Endlich haben wir nach (8)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A} = \text{const.},$$

also

$$(9') \qquad \psi = \nu t,$$

falls wieder zur Abkürzung

$$(9'') \qquad \nu = \frac{G}{A}$$

gesetzt und angenommen wird, dafs für $t = 0$ auch $\psi = 0$ ist. *Durch die Gleichungen* (7′), (8′) *und* (9′) *ist die allgemeine Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels als reguläre Präcession charakterisiert.*

Als Konstanten der regulären Präcession werden wir, wie früher, in erster Linie die Gröfsen $\mu$, $\nu$ und $\vartheta$ ansehen. Durch diese lassen sich die Konstanten $p_0, q_0, r_0$ nach den Gleichungen (4) von pag. 50 folgendermafsen ausdrücken:

$$(10) \qquad p_0 = 0, \quad q_0 = \nu \sin\vartheta, \quad r_0 = \mu + \nu\cos\vartheta.$$

Andrerseits sind aber die drei Gröfsen $\mu$, $\nu$ und $\vartheta$ den zwei früheren Integrationskonstanten $h$ und $G$ äquivalent; es wird daher zwischen jenen eine Relation bestehen, welche wir aufstellen wollen. Nach Gleichung (8″) haben wir

$$-\mu A = (C-A)r = (C-A)r_0,$$

also mit Rücksicht auf (10):

$$-\mu A = (C - A)(\mu + \nu \cos\vartheta)$$

oder

$$(11) \qquad C\mu + (C - A)\nu \cos\vartheta = 0.$$

*Bei dem einzelnen kräftefreien symmetrischen Kreisel kann also immer nur eine spezielle Art von regulärer Präcession stattfinden, bei welcher die Konstanten* $\mu$, $\nu$, $\vartheta$ *der Relation* (11) *genügen.*

Schliefslich wollen wir noch die reguläre Präcession des symmetrischen Kreisels nach den Werten von $\frac{\nu}{\mu}$ im Sinne von pag. 51 klassifizieren. Die Gleichung (11) liefert uns

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{C}{A - C} \frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Da wir den Winkel $\vartheta$ im allgemeinen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ voraussetzen dürfen (vgl. pag. 51), so wird die rechte Seite positiv, wenn $A > C$, negativ, wenn $A < C$ ist. Infolgedessen können wir auf Grund der Tabelle von pag. 53 sagen:

*Bei dem verlängerten Kreisel* ($A > C$) *ist die in Rede stehende Präcession eine progressive, bei dem abgeplatteten* ($A < C$) *eine retrograde.*

Im letzteren Falle läfst sich der Wert von $\frac{\nu}{\mu}$ noch genauer in Grenzen einschliefsen. Wir haben nämlich, wenn $C > A$ ist:

$$-\cos\vartheta \frac{\nu}{\mu} = \frac{C}{C - A} > 1$$

oder

$$\frac{\nu}{\mu} < -\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

*Bei dem abgeplatteten Kreisel* ($A < C$) *ist also die „freie" Präcession notwendiger Weise eine pericykloidische, bei dem verlängerten Kreisel* ($A > C$) *eine epicykloidische.*

Von den pag. 51 unterschiedenen vier Intervallen des Wertegebietes $\frac{\nu}{\mu}$ kommen also für die kräftefreie Kreiselbewegung nur die beiden äufsersten in Betracht. Demgegenüber werden wir bei der Betrachtung des schweren Kreisels (vgl. den sechsten Paragraphen dieses Kapitels) sehen, dafs für seine Präcessionsbewegungen auch die beiden mittleren Intervalle zugänglich sind.

In dem Grenzfalle $A = C$ wird

$$\frac{\nu}{\mu} = \pm\infty;$$

der Kreisel rotiert dann nach pag. 51 gleichförmig um die Vertikale,

d. h. die Impulsaxe herum. Wir kommen also zu dem bekannten Resultate:

*Bei dem Kugelkreisel ($A = C$) geht die gleichförmige Präcession in eine gleichförmige Rotation um die Axe des Impulses über.*

## § 3. Über die Bedeutung der Eulerschen Gleichungen und ihr Verhältnis zu den Gleichungen von Lagrange.

Die Eulerschen Gleichungen nehmen in dem System der Mechanik eine ganz singuläre Stellung ein und ordnen sich dem allgemeinen Typus der mechanischen Differentialgleichungen, wie er von Lagrange aufgestellt ist, nicht unter. Auch ist es nicht möglich, bei beliebigen mechanischen Systemen Gleichungen aufzustellen, welche ähnliche Vorteile darbieten, wie die Eulerschen Gleichungen bei dem starren Körper.*) Es wird daher interessant sein, in diesem Paragraphen den Grund für die Besonderheiten der Eulerschen Gleichungen zu besprechen und ihre Vorzüge gegenüber den allgemeinen Gleichungen von Lagrange klarzustellen.

Wir setzen zunächst die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen für den Fall des Kreisels her. Die Lage des Kreisels denken wir uns etwa durch die drei Lagenkoordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$, den Geschwindigkeitszustand durch die zugehörigen Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ dargestellt. Unter $T$ verstehen wir den Ausdruck der lebendigen Kraft in den genannten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten geschrieben, unter $dA$ die Arbeit, welche das am Kreisel angreifende System der äußeren Kräfte bei der unendlich kleinen Verrückung ($d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$) leistet.

*Die Gleichungen nehmen nun genau dieselbe Form an, welche wir aus dem vorigen Kapitel vom einzelnen Massenpunkte her kennen* (vgl. pag. 79 und ff.); wir haben nämlich einerseits:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d[\Phi]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi, \\[2ex] \dfrac{d[\Psi]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi} = \Psi, \\[2ex] \dfrac{d[\Theta]}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta} = \Theta, \end{cases}$$

und andrerseits:

$$(2)\qquad \begin{cases} [\Phi] = \dfrac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad [\Psi] = \dfrac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad [\Theta] = \dfrac{\partial T}{\partial \vartheta'}, \\[2ex] \Phi = \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \Psi = \dfrac{\partial A}{\partial \psi}, \quad \Theta = \dfrac{\partial A}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

*) Vgl. indessen Hamel: Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, Ztschr. f. Math. u. Phys. 50 (1904).

In der That hat man nach Lagrange bei jedem System von drei Freiheitsgraden immer dasselbe Gleichungssystem, wie man auch die drei Parameter $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ einführen mag, und schliefslich auch bei einem System von $n$ Freiheitsgraden das entsprechende Gleichungssystem, wobei nur statt unserer drei Parameter deren $n$ zu benutzen sind.

Unsere Schreibweise der Lagrangeschen Gleichungen weicht nur insofern von der gewöhnlichen Schreibweise ab, als wir den Begriff des Impulses explicite darin zum Ausdruck bringen. Dies empfiehlt sich durchaus, weil hierdurch die Bedeutung der Gleichungen viel klarer wird. Durch die Gleichungen (2) werden ersichtlich die Komponenten des Impulses bestimmt, welche zu einer gegebenen Lage des Kreisels und zu einem gegebenen Geschwindigkeitszustand gehören, sowie die Komponenten der äufseren Kraft, welche einer gegebenen Lage entsprechen. (Die Differentialzeichen $\frac{\partial A}{\partial \varphi} \cdots$ sind dabei in demselben uneigentlichen Sinne zu verstehen, wie oben pag. 77 erläutert wurde.) Die Gleichungen (1) geben darauf an, wie sich die Komponenten des Impulses während des Zeitelementes $dt$ abändern. Die Gleichungen (1) sind daher im Falle des Kreisels mit den Eulerschen Gleichungen äquivalent und müssen wie diese der Thatsache Ausdruck geben, dafs die Änderung des Impulses jederzeit gleich dem von den äufseren Kräften herrührenden Drehstofse ist.

Wir wollen die Umrechnung der Eulerschen Gleichungen in die Lagrangesche Form hier wirklich durchführen und damit eine Ableitung der letzteren für den besonderen hier vorliegenden Fall aus dem Impulsprinzipe geben. Da aber die Rechnungen sonst etwas umständlich werden, wollen wir uns hierbei auf den Fall des symmetrischen Kreisels beschränken.

Wir drücken zunächst den Drehungsvektor $(p, q, r)$ durch die Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ aus und in entsprechender Weise die in den Lagrangeschen Gleichungen vorkommenden Komponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ und $\Phi$, $\Psi$, $\Theta$ des Impulses und der äufseren Kraft durch die in den Eulerschen Gleichungen vorkommenden Komponenten $L, M, N$ und $\Lambda$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$. Dies geschieht nach den Gleichungen (7) von pag. 45, sowie nach pag. 108 in folgender Weise:

$$(3) \quad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\vartheta \cdot \psi' + \cos\varphi \cdot \vartheta', \\ q = \cos\varphi \sin\vartheta \cdot \psi' - \sin\varphi \cdot \vartheta', \\ r = \varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi'; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} [\Phi] = N, \\ [\Psi] = \sin\vartheta \sin\varphi \cdot L + \sin\vartheta \cos\varphi \cdot M + \cos\vartheta \cdot N, \\ [\Theta] = \cos\varphi \cdot L - \sin\varphi \cdot M; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \Phi = & \mathsf{N}, \\ \Psi = \sin\vartheta\sin\varphi\cdot\Lambda + \sin\vartheta\cos\varphi\cdot\mathsf{M} + \cos\vartheta\cdot\mathsf{N}, \\ \Theta = \cos\varphi\cdot\Lambda - \sin\varphi\cdot\mathsf{M}. \end{cases}$$

Wir werden ferner die Ausdrücke der lebendigen Kraft und der Arbeit nötig haben, welche nach pag. 108 und 109 bez die folgende Form annehmen:

$$(6)\quad T = \tfrac{1}{2}(A(p^2+q^2)+Cr^2) = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\cdot\psi'^2+\vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi'+\cos\vartheta\cdot\psi')^2,$$

$$(6')\quad dA = (\Lambda p + \mathsf{M}q + \mathsf{N}r)\,dt = \Phi\,d\varphi + \Psi\,d\psi + \Theta\,d\vartheta.$$

Aus den Gleichungen (4) bis (6′) schliefsen wir sofort auf das Bestehen der Gleichungen (2); diese Gleichungen sind also eine unmittelbare Folge aus der vorstehenden Definition der Impulskomponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ und der Kraftkomponenten $\Phi$, $\Psi$, $\Theta$.

Wir nehmen nun die Eulerschen Gleichungen etwa in der Form (3′) von pag. 141 her, nachdem wir in ihnen $B = A$ gesetzt haben. Zunächst sehen wir, dafs die dritte der Eulerschen Gleichungen

$$\frac{dN}{dt} = \mathsf{N}$$

mit der auf die $\varphi$-Koordinate bezüglichen Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d[\Phi]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \Phi$$

direkt identisch ist. In der That haben wir nach (4), (5) und (6):

$$N = [\Phi], \quad \mathsf{N} = \Phi, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.$$

Um die auf die $\psi$-Koordinate bezügliche Lagrangesche Gleichung zu erhalten, multiplizieren wir die Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit den Koeffizienten von $L$, $M$, $N$ in dem Ausdrucke (4) für $[\Psi]$. Dabei entsteht nach (4) und (5):

$$(7)\quad \begin{cases} \sin\vartheta\sin\varphi\,\dfrac{dL}{dt} + \sin\vartheta\cos\varphi\,\dfrac{dM}{dt} + \cos\vartheta\,\dfrac{dN}{dt} \\ = \dfrac{d[\Psi]}{dt} - \dfrac{d\sin\vartheta\sin\varphi}{dt}L - \dfrac{d\sin\vartheta\cos\varphi}{dt}M - \dfrac{d\cos\vartheta}{dt}N \\ = (A-C)\sin\vartheta(\sin\varphi\cdot q - \cos\varphi\cdot p)\,r + \Psi. \end{cases}$$

Nun erkennt man aber, wenn man $L = Ap$, $M = Aq$, $N = Cr$ setzt und die Gleichungen (3) in Anwendung bringt, dafs

$$\frac{d\sin\vartheta\sin\varphi}{dt}L + \frac{d\sin\vartheta\cos\varphi}{dt}M + \frac{d\cos\vartheta}{dt}N$$
$$= (C-A)\sin\vartheta(\sin\varphi\cdot q - \cos\varphi\cdot p)\,r$$

wird. Mithin ergiebt sich aus (7) einfach

$$\frac{d[\Psi]}{dt} = \Psi.$$

Diese Gleichung ist aber mit der zweiten Lagrangeschen Gleichung des Kreiselproblems identisch, da nach (6) gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Um endlich die auf die $\vartheta$-Koordinate bezügliche Gleichung aus unseren Eulerschen Gleichungen abzuleiten, verfahren wir ähnlich. Wir multiplizieren die Eulerschen Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\varphi$, $-\sin\varphi$ und $0$, d. h. mit den Koeffizienten von $L$, $M$ und $N$ in der dritten der Gleichungen (4). Dann bekommen wir

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\varphi \dfrac{dL}{dt} - \sin\varphi \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{d[\Theta]}{dt} - \dfrac{d\cos\varphi}{dt} L + \dfrac{d\sin\varphi}{dt} M \\ \qquad = (A - C)(\cos\varphi \cdot q + \sin\varphi \cdot p)\, r + \Theta. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (3)

$$-\frac{d\cos\varphi}{dt} L + \frac{d\sin\varphi}{dt} M = A(\sin\varphi \cdot p + \cos\varphi \cdot q)\,\varphi' = A\sin\vartheta \cdot \psi'\varphi'$$

und andrerseits

$$(A - C)(\cos\varphi \cdot q + \sin\varphi \cdot p)\, r = (A - C)\sin\vartheta \cdot \psi'(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi').$$

Infolgedessen können wir statt (8) schreiben

$$\frac{d[\Theta]}{dt} - (A\cos\vartheta\sin\vartheta \cdot \psi'^2 - C\sin\vartheta \cdot \psi'(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi')) = \Theta.$$

Diese Gleichung ist aber mit Rücksicht auf den Ausdruck der lebendigen Kraft wieder nichts anderes als die dritte der Lagrangeschen Gleichungen.

Neben den schon besprochenen Lagrangeschen Gleichungen (oder den Gleichungen „zweiter Art") benutzt man in der analytischen Mechanik bekanntlich auch sog. *Lagrangesche Gleichungen erster Art.* Bei einem System von $n$ Punkten und $k$ Graden der Freiheit bestehen diese aus $3n$ Differentialgleichungen für die Koordinaten der Punkte, in welche noch $3n - k$ verfügbare Parameter, *Lagrangesche Multiplikatoren* genannt, eingehen, welche so zu bestimmen sind, daſs die durch die Differentialgleichungen definierten Koordinatenänderungen mit der dem System eigentümlichen Bewegungsfreiheit verträglich sind.

Nun können wir allerdings nicht daran denken, im Falle des Kreisels die Lagrangeschen Gleichungen erster Art direkt benutzen zu wollen. Wir müſsten sonst — entsprechend den unendlich vielen Massenpunkten, aus denen unser Kreisel besteht, — unendlich viele

Gleichungen mit unendlich vielen Lagrangeschen Multiplikatoren untereinander schreiben. Wohl aber können wir für den Kreisel Differentialgleichungen herstellen, welche sozusagen in der Mitte stehen zwischen den Lagrangeschen Gleichungen erster und zweiter Art und welche wir als *Lagrangesche Gleichungen von gemischtem Typus* bezeichnen mögen.

Das Gemeinsame, welches diese gemischten Gleichungen mit den Gleichungen erster Art verbindet, besteht in der Einführung *überzähliger Koordinaten.* Man bestimmt die Lage des Systems durch mehr Koordinaten als die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt: Benutzt man als überzählige Koordinaten die $3n$ rechtwinkligen Koordinaten der $n$ Punkte des Systems, so kommt man, wie wir sagten, zu den Lagrangeschen Gleichungen erster Art. Benutzt man dagegen $3n - 1$, $3n - 2, \ldots, k + 1$ Koordinaten, so entstehen jedesmal Gleichungen unseres gemischten Typus. Hat man nur die Mindestzahl von $k$ Koordinaten verwandt, so ergeben sich die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art.

Den überzähligen Lagenkoordinaten entsprechend wird man als überzählige Geschwindigkeitskoordinaten die Differentialquotienten der Lagenkoordinaten nach der Zeit einführen. Es wird ferner aber auch nötig, den Geschwindigkeitskoordinaten entsprechende Kraft- und Impulskoordinaten zu definieren. Dabei wird man, wie früher (vgl. pag. 92) von dem Ausdrucke für die Arbeit des Systems bez. für seine lebendige Kraft auszugehen haben. Diese Ausdrücke sind aber in ihrer Abhängigkeit von den überzähligen Koordinaten nicht völlig bestimmt, sondern können durch Hinzufügung beliebiger Multipla der zwischen jenen bestehenden Relationen formal modifiziert werden. Infolgedessen bleiben die in Rede stehenden Kraft- und Impulskoordinaten in gewisser Weise unbestimmt; sie enthalten willkürliche Parameter, deren Auftreten von unserem Standpunkte aus die Notwendigkeit der Lagrangeschen Multiplikatoren erklärt. Die Gleichungen, welche die Änderungen dieser überzähligen Impulskoordinaten bestimmen, lassen sich im übrigen nach dem Schema der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen hinschreiben.

Zu diesem gemischten Typus werden offenbar die in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bez. in den Quaternionengröfsen $A, B, C, D$ geschriebenen Differentialgleichungen des Kreiselproblems gehören. In der That benutzen wir bei Zugrundelegung der genannten Parameter zur Bestimmung der Lage und des Geschwindigkeitszustandes überzählige Koordinaten. Die so entstehenden Differentialgleichungen werden noch einen Lagrangeschen Multiplikator enthalten, welcher so zu bestimmen ist, dafs die

aus den Differentialgleichungen folgenden Änderungen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bez. der $A$, $B$, $C$, $D$ dauernd mit der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \text{bez.} \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

verträglich sind. Übrigens bekommen diese Differentialgleichungen eine aufserordentlich übersichtliche Form. Wir wollen indessen ihre Entwicklung an eine spätere Stelle verschieben (vgl. Kap. VI, § 9), weil wir dann ausführlicher auf die Definition der überzähligen Impulskoordinaten eingehen müssen.

Wir kommen nun auf die am Anfange dieses Paragraphen aufgestellte Aufgabe zurück: die Besonderheiten der Eulerschen Gleichungen gegenüber den Gleichungen von Lagrange zu studieren.

Warum sich die Eulerschen Gleichungen formal von den Lagrangeschen Gleichungen unterscheiden, ist leicht zu sehen. In den Eulerschen Gleichungen bestimmen wir den Geschwindigkeitszustand durch die Komponenten des Drehungsvektors $p, q, r$ nach den Axen $X, Y, Z$. Es sind dieses, wie pag. 46 hervorgehoben, „nichtholonome Geschwindigkeitskoordinaten", d. h. keine Differentialquotienten irgend welcher räumlicher Abmessungen nach der Zeit. Nun bleibt die Lagrangesche Form der mechanischen Differentialgleichungen, wie pag. 155 betont, allerdings bei Einführung beliebiger Lagenkoordinaten bestehen. Als Geschwindigkeitskoordinaten sind dann aber notwendig die Ableitungen der gewählten Lagenkoordinaten nach der Zeit, also jedenfalls exakte Differentialquotienten zu benutzen. Hiernach können wir sagen: *Die Eulerschen Gleichungen sind kein Spezialfall der Lagrangeschen, insofern wir bei jenen den Geschwindigkeitszustand durch nichtholonome Koordinaten bestimmen, während diese die Benutzung holonomer Geschwindigkeitskoordinaten voraussetzen.*

Wir werden aber ferner fragen, worin die besonderen Vorzüge der Eulerschen Gleichungen gegenüber den allgemeinen Differentialgleichungen der Mechanik bestehen. Diese treten hauptsächlich bei der kräftefreien Bewegung des Kreisels hervor, auf welche wir uns zunächst beziehen wollen.

Aus dem vorigen Kapitel wissen wir, und es ist auch von vorneherein selbstverständlich, dafs die Bestimmung des Impulses relativ zum Kreisel in jedem Augenblicke nur von dem instantanen Geschwindigkeitszustand des Kreisels abhängt und von der Lage des Kreisels im Raume gänzlich unabhängig ist. In der That konnten wir die Lage des Impulses im Körper analytisch durch die Differentialquotienten des nur von den Komponenten $p, q, r$ des Geschwindigkeitszustandes abhängigen Ausdrucks der lebendigen Kraft oder auch

geometrisch durch eine mit dem Trägheitsellipsoid operierende Konstruktion bestimmen, bei welcher die Stellung des Trägheitsellipsoides im Raume in keiner Weise in Frage kam. Wir bekommen also relativ zum Kreisel (bei gleicher relativer Lage und Gröfse des Drehungsvektors) immer denselben Impulsvektor, welche Stellung wir auch dem Kreisel im Raume geben mögen.

Ferner ist auch die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses relativ zum Kreisel bei der kräftefreien Bewegung allein durch die Lage von Impuls- und Drehungsvektor gegen den Kreisel, sowie durch die Gröfse dieser Vektoren bestimmt und hängt von der absoluten Stellung des Kreisels im Raume in keiner Weise ab, wie unmittelbar aus dem Satze von der Konstanz des Impulses hervorgeht.

Die Bestimmung des Impulses und der Impulsänderung oder, was dasselbe bedeutet, des Drehungsvektors und der Änderung des Drehungsvektors gegen den Kreisel bildet also bei der kräftefreien Bewegung ein Problem, für welches die Lage des Kreisels im Raume nicht in Frage kommt. Das Problem bleibt dasselbe, wie wir auch die Anfangslage des Kreisels im Raume wählen mögen.

Man wird von vornherein vermuten dürfen, dafs eine analytische Formulierung unseres Problems möglich ist, welche seine Unabhängigkeit von der absoluten Lage des Kreisels im Raume in Evidenz setzt, in welcher also die Lagenkoordinaten des Kreisels überhaupt nicht vorkommen. *Diese Formulierung wird nun gerade durch die Euler'schen Gleichungen der kräftefreien Bewegung geleistet.* In der That kommen in diesen Gleichungen nur die Gröfsen $p$, $q$, $r$ (oder $L$, $M$, $N$) und ihre Differentialquotienten nach der Zeit vor, welche eine von der Lage des Kreisels unabhängige Bedeutung haben.

In den Lagrangeschen Gleichungen dagegen zerlegen wir den Drehungsvektor bei Benutzung der Lagenkoordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ in die Komponenten $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$, welche sich zum Teil auf Axen beziehen, die nicht im Kreisel fest sind, so dafs die zugehörigen Werte der $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ bei einer Änderung der absoluten Lage des Kreisels geändert werden. Infolgedessen lassen die Lagrangeschen Gleichungen nicht ohne weiteres die Thatsache hervortreten, dafs die Bestimmung des Drehungsvektors und seiner Lage gegen den Kreisel von der Lage des Kreisels im Raume unabhängig ist.

Die Unabhängigkeit der Eulerschen Gleichungen von den Lagenkoordinaten bringt aber (bei der kräftefreien Bewegung) eine erhebliche *Vereinfachung des Integrationsverlaufes* mit sich. Wir können nämlich zunächst, wie im vorigen Paragraphen geschehen, die Differentialgleichungen in den $p$, $q$, $r$ für sich integrieren und damit alle Fragen

erledigen, welche sich auf die Lage von Impuls- und Drehungsvektor relativ gegen den Körper beziehen. Die Bestimmung der absoluten Lage im Raum erfordert dann als zweiten Schritt die Integration der „kinematischen“ Gleichungen, wobei wir noch in der Wahl der Lagenkoordinaten volle Freiheit haben.

Eine entsprechende Zerlegung der Integrationsschwierigkeiten ist bei den Lagrangeschen Gleichungen nicht möglich, es sei denn, daſs man gerade diejenigen linearen Funktionen der $\varphi'$, $\psi'$, $\vartheta'$ bei der Integration zu Grunde legt, welche bez. den $p$, $q$, $r$ gleich sind. Dies würde aber nichts anderes bedeuten, als den nachträglichen Übergang zu den Eulerschen Gleichungen.

Wenn äuſsere Kräfte die Kreiselbewegung beeinflussen, wird der Vorteil, den die Eulerschen Gleichungen vor den Lagrangeschen bieten, allerdings allgemein zu reden illusorisch. Da nämlich die äuſseren Kräfte von der Lage des Kreisels im Raume abhängen werden, fällt auch die Änderung des Impulsvektors nicht mehr unabhängig von diesem aus. *Infolgedessen bilden jetzt* (sofern nicht besondere Symmetrieverhältnisse betreffs der äuſseren Kräfte vorliegen, worauf wir an dieser Stelle nicht eingehen können) *die Eulerschen Gleichungen mit den kinematischen ein nicht reduzierbares simultanes System von Differentialgleichungen.* Wir werden also, wie es im folgenden Kapitel thatsächlich geschehen wird, bei der Integration ebenso gut von den Lagrangeschen wie von den Eulerschen Gleichungen ausgehen können.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich kürzer und präciser fassen, wenn wir uns gestatten, einige Begriffe aus *Lies Theorie der Transformationsgruppen* vorauszusetzen. Wir können dann nämlich sagen: Das Problem, Gröſse und Lage des Drehungsvektors bei der kräftefreien Kreiselbewegung zu bestimmen, gestattet eine dreifach unendliche Gruppe von Transformationen, nämlich die sämtlichen Drehungen des Koordinatensystems $x$, $y$, $z$ um den Punkt $O$*). Dabei spielen die Komponenten $p$, $q$, $r$ die Rolle von Invarianten der Gruppe. Die Zerlegung der mechanischen Differentialgleichungen in ein Gleichungssystem (die Eulerschen Gleichungen), welches sich gegenüber den Transformationen der Gruppe invariant verhält, und ein zweites Gleichungssystem (unsere kinematischen Gleichungen), welches durch diese Transformationen geändert wird und gerade die Abhängigkeit des Kreisels vom System $x$, $y$, $z$ vorstellt, läſst sich aus der Lieschen Theorie vorhersehen.

---

*) Ausführlicheres hierüber findet man bei H. Liebmann: Bemerkungen über integrable Fälle der Kreiselbewegung, Math. Ann. Bd. 50. Vgl. auch Hamel, l. c. (p. 154)

Mit Hülfe dieser Theorie läſst sich auch die allgemeine Frage beantworten, wann bei anderen mechanischen Systemen, wie dem starren Körper, Gleichungen möglich sind, welche den Eulerschen Gleichungen analog sind und denselben Vorteil der Zerlegung des Integrationsverlaufes in zwei einfachere Schritte mit sich bringen, wie jene. Solche Gleichungen wird es nur in dem besonderen Falle geben, wo das mechanische System und die dasselbe angreifenden äuſseren Kräfte eine geeignete Gruppe von kontinuierlichen Transformationen gestatten.

## § 4. Führung des Kreisels auf vorgeschriebener Bahn. Das D'Alembertsche Prinzip.

Bei unserer Ableitung der Kinetik des starren Körpers konnten wir das D'Alembertsche Prinzip durch die Hilfsvorstellung zentral wirkender Reaktionskräfte ersetzen. Für die Behandlung allgemeiner mechanischer Systeme gilt aber mit Recht das D'Alembertsche Prinzip zusammen mit dem Lagrangeschen Prinzip der virtuellen Arbeit als das eigentliche Fundament. Wenn wir dasselbe auch nicht systematisch darstellen werden, so werden wir es doch im Folgenden am Beispiel des Kreisels erläutern.

Nachdem wir im zweiten Paragraphen dieses Kapitels die „natürliche" Bewegung des kräftefreien Kreisels erledigt haben, würden wir nun nach der Bewegung zu fragen haben, die der Kreisel auf Grund gegebener Kräfte, insbesondere auf Grund der Schwerkraft ausführt. Statt dessen werden wir uns zunächst eine einfachere Aufgabe stellen und die Verhältnisse bei einer beliebigen „erzwungenen" Bewegung ins Auge fassen.

Wir wollen uns vorstellen, daſs wir den Kreisel etwa mit unserer Hand in vorgeschriebener Weise bewegen, indem wir eine Gerade des Kreisels einen Kegel mit der Spitze in $O$ beschreiben und im übrigen den Kreisel um diese Gerade in beliebig vorgegebener Weise rotieren lassen. Dabei werden wir zunächst annehmen, daſs äuſsere Kräfte, auſser den von unserer Hand ausgeübten, nicht vorhanden sind. Wir werden also insbesondere wieder den Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkte zusammenfallen lassen.

Zur Erzeugung unserer erzwungenen Bewegung wird in jedem Momente eine gewisse Kraft erforderlich sein. Wir haben die Empfindung, als ob der Kreisel gegen die Führung einen Widerstand leistet und spüren dementsprechend einen Druck auf unsere Hand. Wir können diesen Widerstand allgemein den *Trägheitswiderstand* nennen.

*Es soll sich im folgenden darum handeln, den Trägheitswiderstand nach Richtung und Gröſse anzugeben.*

Um an Bekanntes anzuknüpfen, wollen wir von der entsprechenden Frage beim einzelnen Massenpunkte ausgehen. Wir denken uns also einen sonst keinen äuſseren Kräften unterworfenen Punkt von der Masse $m$ auf einer beliebigen Kurve mit beliebiger Geschwindigkeit entlang geführt und fragen nach dem Widerstande, den der Punkt dieser Bewegung entgegensetzt.

Vor allem konstruieren wir uns für jede Stelle der Bahn den Impuls des Punktes, den wir mit $i$ bezeichnen. Wenn die Bewegung nicht gerade die „natürliche Bewegung" ist, d. h. aus einer gleichmäſsigen geradlinigen Fortschreitung besteht, so wird sich der Impuls von Ort zu Ort ändern. Nun setzt aber, nach Newtons lex secunda, jede Änderung $di$ des Impulses eine Kraft $P$ voraus, von solcher Beschaffenheit, daſs $P dt = di$ ist. Diese Kraft $P$ haben wir mit der Hand auszuüben; die entgegengesetzt gleiche Kraft bedeutet den Widerstand $W$, den wir zu überwinden haben und welchen wir den *Trägheitswiderstand* nennen. Mithin wird

$$W = -\frac{di}{dt}. \tag{1}$$

Geometrisch können wir hiernach den fraglichen Widerstand folgendermaſsen bestimmen. Wir konstruieren für zwei benachbarte Zeitpunkte $t_0$ und $t_1$ den Impuls der erzwungenen Bewegung, bringen durch Parallelverschiebung die Anfangspunkte der beiden Vektoren zum Zusammenfallen und vervollständigen sie zu einem Dreieck. Dann liefert uns die dritte Seite des Dreiecks, durch $t_0 - t_1$ dividiert, den gesuchten Widerstand.

Wollen wir die Komponenten $W_x$, $W_y$, $W_z$ unseres Widerstandes nach drei rechtwinkligen Koordinatenaxen berechnen, so ergeben sich dieselben natürlich sofort, indem wir die Gleichung (1) in Komponenten zerlegen. Wir können diese Komponenten von $W$ aber auch direkt aus unseren früheren Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes ablesen. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen (s. pag. 77) dachten wir uns die äuſsere Kraft $(X, Y, Z)$ gegeben und fragten nach der „natürlichen" Bewegung, welche sich unter ihrem Einflusse einstellt. Wir können uns aber auch die Bewegung, d. h. die successiven Änderungen des Impulses irgendwie gegeben denken und nach der zugehörigen Kraft fragen, welche wir ausüben müssen, um die betr. Bewegung zu erzwingen. Der Widerstand, um welchen es sich handelt, ist dieser Kraft entgegengesetzt gleich. Wir schlieſsen daher aus den angezogenen Gleichungen (9) von pag. 77

$$(2) \qquad W_x = -X = -\frac{d[X]}{dt}, \quad W_y = -Y = -\frac{d[Y]}{dt},$$
$$W_z = -Z = -\frac{d[Z]}{dt}.$$

Dies stimmt ersichtlich mit Gleichung (1) überein.

Wenn auf unseren Massenpunkt eine äufsere Kraft $P$ einwirkt, so wird die zur Erzeugung der erzwungenen Bewegung erforderliche Kraft offenbar um deren Betrag verringert. Dementsprechend wird der Widerstand, welchen wir dann zu überwinden haben und den wir mit $W'$ bezeichnen, statt durch (1) durch die folgende Gleichung gegeben:

$$(3) \qquad W' = -\frac{di}{dt} + P.$$

Seine Komponenten ergeben sich aus den Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes, wenn wir die gesamte zur Erzeugung der Bewegung erforderliche Kraft mit $(X + X', Y + Y', Z + Z')$ bezeichnen, wobei $(X, Y, Z)$ die von aufsen wirkende Kraft $P$, $(X', Y', Z')$ die bei der Führung des Punktes aufzuwendende Kraft bedeutet, wie folgt:

$$(4) \qquad \begin{cases} W_x' = -X' = -\frac{d[X]}{dt} + X, \\ W_y' = -Y' = -\frac{d[Y]}{dt} + Y, \\ W_z' = -Z' = -\frac{d[Z]}{dt} + Z. \end{cases}$$

Die vorstehenden, nach den Grundgesetzen der allgemeinen Mechanik durchaus selbstverständlichen Bemerkungen übertragen wir nun auf den Fall des *allgemeinen kräftefreien Kreisels.*

Wir konstruieren uns vor allem für jedes Bewegungsstadium den Impuls und bekommen so einen von $O$ auslaufenden im allgemeinen variabeln Vektor. Jede Änderung $di$ des Impulses erfordert aber, wie wir aus der pag. 115 gegebenen Übertragung des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes wissen, eine Drehkraft $D$ von solcher Beschaffenheit, dafs $Ddt = di$ ist. Die Drehkraft $D$ haben wir mit der Hand bei der Führung des Kreisels auszuüben; mit der entgegengesetzt gleichen Kraft widerstrebt der Kreisel der Bewegung. *Der gesuchte Widerstand ist also nach Richtung, Gröfse und Sinn gegeben durch die Vektorgleichung:*

$$(1') \qquad W = -\frac{di}{dt}.$$

Geometrisch finden wir den Widerstand abermals dadurch, dafs wir uns den Impuls im Raume für zwei benachbarte Zeitpunkte $t_0$ und $t_1$

konstruieren und die Endpunkte der beiden Vektoren verbinden. Dann liefert uns das Verhältnis der Verbindungslinie zu dem Zeitintervalle $t_0 - t_1$ Gröfse, Richtung und Sinn von $W$ in dem Zeitpunkte $t_0 = t_1$.

Um die Komponenten $W_X$, $W_Y$, $W_Z$ unseres Widerstandes nach den im Kreisel festen Koordinatenaxen $XYZ$ zu berechnen, ziehen wir die Eulerschen Gleichungen heran.

In der That können wir diese Gleichungen, wie oben die Bewegungsgleichungen des einzelnen Massenpunktes und ebenso wie die mechanischen Differentialgleichungen überhaupt, in doppelter Weise auffassen. Wir können uns entweder die äufseren Kräfte gegeben denken und nach derjenigen Bewegung fragen, welche das System von einem gegebenen Anfangszustande aus auf Grund dieser Kräfte ausführt. Wir können uns aber auch andrerseits die Bewegung des Systems willkürlich gegeben denken und nach denjenigen Kräften fragen, welche zur Erzeugung dieser Bewegung erforderlich sind. Während die erstere Aufgabe die *Integration* der mechanischen Differentialgleichungen nötig macht, ist die letztere durch die in den Gleichungen angedeuteten *Differentiationen* zu erledigen. In diesem Paragraphen betrachten wir die Eulerschen Gleichungen von dem zuletzt charakterisierten Standpunkte.

Der gesuchte Trägheitswiderstand ist offenbar nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung der zur Erzeugung der Bewegung erforderlichen Kraft entgegengesetzt gleich. Entnehmen wir also die Komponenten $\Lambda$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ dieser Kraft aus den Eulerschen Gleichungen von pag. 140, so erhalten wir für die Komponenten des Widerstandes, bezogen auf das im Körper feste Koordinatensystem, die folgenden Werte:

$$(2') \qquad \begin{cases} W_X = -\Lambda = -\dfrac{dL}{dt} + Mr - Nq, \\ W_Y = -\mathsf{M} = -\dfrac{dM}{dt} + Np - Lr, \\ W_Z = -\mathsf{N} = -\dfrac{dN}{dt} + Lq - Mp. \end{cases}$$

Dafs diese Bestimmung von $W$ mit dem in (1′) enthaltenen Werte zusammenfällt, ist nach unserer Ableitung der Eulerschen Gleichungen evident.

Wir wollen nun ferner annehmen, dafs auf unseren Kreisel von aufsen her ein irgendwie gegebenes Kraftsystem wirkt, welches, in gewohnter Weise zusammengesetzt, eine Drehkraft $D$ ergiebt. Ihre Komponenten nach den Koordinatenaxen seien $\Lambda$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$.

Alsdann wird ein Teil der Impulsänderung durch diese Drehkraft $D$ kompensiert. Der übrig bleibende, nicht kompensierte Teil ergiebt

negativ genommen nach Richtung, Gröfse und Sinn den Widerstand, den wir bei der erzwungenen Bewegung des Kreisels zu überwinden haben. Dieser Widerstand $W'$ unterscheidet sich also jetzt von dem Trägheitswiderstande $W$ des Kreisels um den Betrag der Drehkraft $D$ und ist dementsprechend durch die folgende Vektorgleichung zu berechnen:

$$(3') \qquad W' - W = D \quad \text{oder} \quad W' = -\frac{di}{dt} + D.$$

Seine Komponenten nach den Koordinatenaxen folgen abermals aus den Eulerschen Gleichungen. Bezeichnen wir die Komponenten der gesamten Kraft, welche zur Erzeugung der fraglichen Bewegung erforderlich ist, bez. mit $\mathsf{\Lambda} + \mathsf{\Lambda}'$, $\mathsf{M} + \mathsf{M}'$, $\mathsf{N} + \mathsf{N}'$, so erhalten wir:

$$(4') \qquad \begin{cases} W'_X = -\mathsf{\Lambda}' = -\frac{dL}{dt} + Mr - Nq + \mathsf{\Lambda}, \\ W'_Y = -\mathsf{M}' = -\frac{dM}{dt} + Np - Lr + \mathsf{M}, \\ W'_Z = -\mathsf{N}' = -\frac{dN}{dt} + Lq - Mp + \mathsf{N}. \end{cases}$$

Von hier aus gelangen wir zu einem sehr einfachen und sehr bekannten *Kriterium, durch welches wir die unter dem Einflufs gegebenen Kräfte stattfindende natürliche Bewegung des Kreisels gegenüber beliebigen erzwungenen Bewegungen charakterisieren können.* Wir wollen auch hierbei zuerst vom einzelnen Massenpunkte sprechen. Die natürliche Bewegung, welche der Punkt unter dem Einflufs der Kraft $P$ ohne äufseren Zwang ausführt, ist offenbar diejenige Bewegung, bei welcher der oben eingeführte Widerstand $W'$ verschwindet. *Die Bedingung für die natürliche Bewegung lautet also nach* (3)

$$(5) \qquad -\frac{di}{dt} + P = 0.$$

Diese Gleichung ist im Grunde vollständig trivial; sie ist nichts anderes als der fundamentale Impulssatz, welcher der Mechanik von Newton als zweites Axiom zu Grunde gelegt ist.

Wir können nun aber diesem Satze eine neue Formulierung geben, indem wir die Frage nach der natürlichen Bewegung des Punktes auf eine Gleichgewichtsfrage zurückführen. Diese Formulierung liegt nahe, sobald man, wie oben geschehen, die negativ genommene Änderungsgeschwindigkeit des Impulses als eine besondere Kraft eingeführt und mit einem besonderen Namen („Trägheitswiderstand“) belegt hat. Wir können nämlich die Gleichung (5) folgendermafsen in Worte fassen:

*Bei der natürlichen Bewegung eines Punktes hält sich der Trägheitswiderstand des Punktes mit der äufseren Kraft dauernd das Gleichgewicht.*

In dem vorliegenden einfachsten Falle ist natürlich mit dieser Formulierung nichts gewonnen. Wir erwähnen dieselbe nur deshalb, weil die entsprechende Aussage als sog. *D'Alembertsches Prinzip* die natürliche Bewegung beliebiger mechanischer Systeme regelt, worauf wir sofort zurückkommen.

Charakterisieren wir vorab die natürliche Bewegung des allgemeinen Kreisels in entsprechender Weise. Es ist dieses offenbar wieder diejenige Bewegung, gegen welche der Kreisel keinen Widerstand leistet, bei welcher also $W'$ in Gleichung (3′) verschwindet. *Unser Kriterium für die unter dem Einflufs der äufseren Drehkraft $D$ stattfindende natürliche Bewegung des Kreisels lautet also, ganz ähnlich wie beim Punkte:*

$$(5') \qquad -\frac{di}{dt} + D = 0.$$

Im Grunde fallen wir damit wieder auf unsern fundamentalen Impulssatz von pag. 115 zurück bez. auf die mit jenem äquivalenten Eulerschen Gleichungen.

Um nun die hier in Betracht kommende Formulierung dieser Gleichung zu finden, gehen wir auf die einzelnen Massenpunkte zurück, welche den Kreisel konstituieren und denken uns dementsprechend den Gesamtimpuls $i$ sowie die resultierende Drehkraft $D$ in die zu den Massenpunkten gehörigen Einzelimpulse und Einzelkräfte aufgelöst. Alsdann können wir die Gleichung (5′) als eine Gleichgewichtsbedingung im Sinne der elementaren Statik aussprechen und können folgenden Satz formulieren, welcher sich mit dem D'Alembertschen Prinzipe im Falle des Kreisels deckt:

*Bei der natürlichen Bewegung steht das System der Trägheitswiderstände aller einzelnen Massenteilchen mit dem System der in den Punkten angreifenden äufseren Kräfte vermöge der starren Verbindung der Massenpunkte beständig im Gleichgewichte.*

Diese Aussage überträgt sich nun, wie gesagt, auf beliebige mechanische Systeme mit beliebigen, nicht notwendig starren Verbindungen. Die Fragen der Bewegung erscheinen somit auf Gleichgewichtsfragen zurückgeführt. I n d e r B e g r ü n d u n g d i e s e r s t a t i s c h e n A u f f a s s u n g d e r d y n a m i s c h e n G e s e t z e l i e g t d i e e i g e n t l i c h e L e i s t u n g D'A l e m b e r t s u n d d a s C h a r a k t e r i s t i c u m s e i n e s P r i n z i p e s.

Wir können schliefslich sozusagen ein *Mittelding zwischen der natürlichen und der erzwungenen Bewegung des Kreisels* betrachten. Wir wollen etwa, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, eine

Hauptaxe $H$ des Kreisels in bestimmter Weise einen Kegel mit der Spitze in $O$ beschreiben lassen bez. im besonderen festgehalten denken, während wir die Drehung um diese Axe durch äufseren Zwang nicht beeinflussen. Der letztere Teil der Bewegung ist dann als natürliche, der erstere als erzwungene Bewegung zu bezeichnen. Alsdann wird die Komponente des Widerstandes $W'$ in Richtung von $H$ verschwinden müssen, weil diese durch die Führung von $H$ nicht kompensiert werden kann. Dagegen wird die zu $H$ senkrechte Komponente von $W'$ einen von Null verschiedenen Wert haben, welcher uns eben den bei der Führung aufzuwendenden Druck anzeigt. Dementsprechend ist nur die zu $H$ senkrechte Komponente von $W'$ nach Gleichung (3′) zu berechnen.

Die Ausdrucksweise des D'Alembertschen Prinzipes läfst sich auch für diesen Typus von Bewegungen vollkommen aufrecht halten. Gerade in dieser Vielseitigkeit, kann man sagen, beruht der wesentliche Nutzen des Prinzipes.

Achten wir nur auf denjenigen Teil der Bewegung, welchen wir soeben als natürliche Bewegung bezeichneten, so haben wir sozusagen einen *Kreisel von nur einem Grade natürlicher Bewegungsfreiheit.* An diesem halten sich dann die Trägheitswiderstände der einzelnen Massenpunkte mit den äufseren Kräften nach der für uns in Betracht kommenden Komponente von Gleichung (5′) ersichtlich das Gleichgewicht, das D'Alembertsche Prinzip ist für diesen Teil der Bewegung ohne äufseren Zwang erfüllt. Ziehen wir aber auch die erzwungene Bewegung von $H$ in Betracht, so haben wir einen *Kreisel von einem Grade natürlicher und zwei Graden erzwungener Bewegungsfreiheit.* Das Gleichgewicht zwischen den Trägheitswiderständen und den äufseren Kräften wird bei diesem hergestellt, wenn wir zu den äufseren Kräften noch die Kraft hinzurechnen, welche wir bei der Führung des Kreisels auszuüben haben. Die so entstehende Betrachtungsweise ist der vorhergenannten deshalb vorzuziehen, weil sie nicht nur den Ablauf der natürlichen Bewegung sondern auch den für die erzwungene Bewegung erforderlichen Druck zu bestimmen gestattet.

In der gewöhnlichen Sprache der analytischen Mechanik würde man die hier vorgenommene Beschränkung der natürlichen Bewegungsfreiheit so formulieren, dass man den Kreisel *gewissen Bedingungsgleichungen* unterwirft, welche im obigen Beispiel (bei beliebiger Führung der Axe $H$) noch die Zeit enthalten würden. Der Nutzen des D'Alembertschen Prinzipes besteht, analytisch gesprochen, gerade darin, dafs man mittels dieses Prinzipes von derartigen Bedingungsgleichungen so viele eliminieren kann, als man gerade will, um dann die übrigen durch geeignete Kräfte zu ersetzen.

Wir werden im letzten Paragraphen dieses Kapitels für die hier nur angedeuteten Anwendungen des D'Alembertschen Prinzipes auf Bewegungen von teilweise erzwungenem Charakter einige Beispiele bringen.

## § 5. Spezielle Ausführungen für den Kugelkreisel. Zerlegung des Gesamtwiderstandes in einen Accelerations- und einen Deviationswiderstand.

In der Punktmechanik kann man die Betrachtung des Trägheitswiderstandes, welche der einzelne Massenpunkt einer erzwungenen Bewegung entgegensetzt, noch etwas weiter führen, als es im vorigen Paragraphen geschehen ist.

Wir wollen, wie üblich, den Trägheitswiderstand, indem wir ihn auf die Tangente an die Bahnkurve projizieren, in zwei Komponenten zerlegen, eine in Richtung der Tangente fallende Komponente, welche *Tangentialkraft* genannt werden soll, und eine dazu senkrechte Komponente, welche *Centrifugalkraft* heifst und welche bereits im ersten Paragraphen dieses Kapitels vorkam. Die Gröfse der Tangentialkraft wollen wir mit $H$, die der Centrifugalkraft mit $K$ bezeichnen.

Die Centrifugalkraft können wir auch als *denjenigen Bestandteil des Widerstandes definieren, zu dessen Überwindung keine Arbeitsleistung erforderlich ist.* Da nämlich nach Definition die Centrifugalkraft auf der augenblicklichen Bewegungsrichtung senkrecht steht, so wird, wenn wir mit $K_x$, $K_y$, $K_z$ ihre Komponenten nach irgend welchen Koordinatenaxen bezeichnen

$$x' K_x + y' K_y + z' K_z = 0;$$

andrerseits erfordert die Überwindung der Centrifugalkraft in der Zeit $dt$ die Arbeit

$$dA = (x' K_x + y' K_y + z' K_z)\, dt.$$

Diese Arbeit verschwindet also, wie behauptet wurde.

Um die Berechnung von $H$ und $K$ möglichst einfach zu gestalten, verfährt man bekanntlich so, dafs man die vorgegebene Bewegung durch eine andere ersetzt, welche jene in dem betrachteten Zeitpunkte von der zweiten Ordnung approximiert, d. h. welche für diesen Zeitpunkt und einen unmittelbar folgenden dieselbe Gröfse und Richtung des Impulses und daher auch dieselbe Tangential- und Centrifugalkraft aufweist, wie die ursprüngliche Bewegung. Man konstruiert nämlich zu der vorgegebenen Bahnkurve den Krümmungskreis an der betrachteten Stelle und läfst den Massenpunkt $m$ auf diesem mit gleichförmiger Beschleunigung entlang laufen, wobei seine Geschwindigkeit

und Beschleunigung so zu bemessen sind, dafs sie an der in Rede stehenden Stelle mit der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der ursprünglichen Bewegung übereinstimmen.

Alsdann findet man leicht aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen für die *Gröfse der Tangentialkraft:*

$$H = m\frac{dv}{dt} = \frac{d|i|}{dt} \text{*)}. \tag{1}$$

*Die Richtung der Kraft* ist nach der ursprünglichen Definition derselben mit der Richtung der instantanen Geschwindigkeit identisch. *Der Sinn* ist dem Sinne der instantanen Beschleunigung entgegengesetzt.

Desgleichen ergiebt sich für die *Gröfse der Centrifugalkraft* die schon früher benutzte Formel

$$K = \frac{mv^2}{R}, \tag{2}$$

in welcher $R$ den Radius des Krümmungskreises bedeutet. Die *Richtung der Centrifugalkraft* ist dadurch bestimmt, dafs sie 1) auf der instantanen Bewegungsrichtung senkrecht steht und 2) in der Schmiegungsebene der Bahnkurve und also der Ebene des Krümmungskreises liegt. Den *Sinn der Centrifugalkraft* können wir etwa durch folgende Regel festlegen: sie sucht den Massenpunkt von dem Centrum des Krümmungskreises zu entfernen.

Nach (1) verschwindet die Tangentialkraft nur dann, wenn die Beschleunigung verschwindet. Andrerseits verschwindet nach (2) die Centrifugalkraft dann, wenn die Krümmung der Bahn gleich Null wird, wenn also die Geschwindigkeit eine unveränderliche Richtung besitzt. Infolgedessen werden wir behaupten können: *Das Auftreten der Tangentialkraft hat seinen Grund in einer Längenänderung, das der Centrifugalkraft in einer Richtungsänderung des Geschwindigkeitsvektors.*

Wollten wir nun im Falle des allgemeinen Kreisels eine ähnliche Zerlegung des Trägheitswiderstandes in zwei zu einander senkrechte Komponenten vornehmen, so würde sich alsbald zeigen, dafs diese Zerlegung ihr Mifsliches hat. Wir müssen vielmehr bis zu dem Spezialfalle des *Kugelkreisels* hinabsteigen, um die Begriffe der Tangential- und Centrifugalkraft glatt übertragen zu können. Es bestätigt sich dabei, was schon pag. 134 bemerkt wurde, dafs der Kugelkreisel (vermöge der Koincidenz von Impuls- und Geschwindigkeitsaxe) in kinetischer Hinsicht eine volle Analogie mit dem einzelnen Massen-

*) Über die Bedeutung des Zeichens $|i|$ als Ausdruck für die Länge des Vektors $i$ vgl. eine Bemerkung auf pag. 143.

punkte darbietet. Übrigens hat diese Beschränkung der Allgemeinheit für die weiterhin in Aussicht genommenen Entwickelungen nicht viel zu sagen, da wir in den nächstfolgenden Kapiteln ohnehin unser Hauptinteresse dem Kugelkreisel zuwenden werden.

Der Trägheitswiderstand $W$ des Kugelkreisels wird natürlich, ebenso wie der des allgemeinen Kreisels, durch die Gleichung (1′) des vorigen Paragraphen gegeben. Wir projizieren nun $W$ senkrecht auf die Axe der instantanen Rotation und erhalten dadurch eine Drehkraft, welche den instantanen Drehungsvektor zur Axe hat und welche wir den *Accelerationswiderstand* nennen wollen, und eine zweite, deren Axe zum Drehungsvektor senkrecht steht und welche der *Deviationswiderstand* heifsen soll. Der Grund für diese Benennungen wird sofort klar werden. Die Gröfse des Accelerationswiderstandes bezeichnen wir mit $H$, die des Deviationswiderstandes mit $K$.

Wir erwähnen zunächst eine wichtige Eigenschaft des Deviationswiderstandes, welche dieser mit der Centrifugalkraft gemein hat: *Zur Überwindung des Deviationswiderstandes ist keine Arbeitsleistung erforderlich.* In der That besagt die Definition des Deviationswiderstandes, dafs die Axe desselben fortgesetzt auf der instantanen Rotationsaxe $p, q, r$ senkrecht steht. Bezeichnen wir also mit $K_X, K_Y, K_Z$ die Komponenten unseres Widerstandes nach denselben Koordinatenaxen, auf welche sich die $p, q, r$ beziehen, so haben wir

$$pK_X + qK_Y + rK_Z = 0.$$

Infolgedessen wird die zur Überwindung des Deviationswiderstandes erforderliche Arbeit während der Zeit $dt$:

$$dA = (pK_X + qK_Y + rK_Z)\, dt = 0.$$

Bei der Berechnung von Accelerations- und Deviationswiderstand werden wir nun ähnlich verfahren, wie oben beim einzelnen Massenpunkte. Wir konstruieren uns nämlich zu der vorgegebenen eine einfachere Bewegung hinzu, welche jene an der in Rede stehenden Stelle von der zweiten Ordnung approximiert. Nach pag. 54 leistet dieses bereits eine richtig gewählte „*gleichförmig beschleunigte Präcession*“. Wir wurden auf diese Bewegung geführt, indem wir an die vorgegebenen Polhodie- und Herpolhodiekegel die Krümmungskegel legten, welche jene in der instantanen Rotationsaxe oskulieren, sowie die auf den Krümmungskegeln spiralig verlaufenden Kurven der Polhodie und Herpolhodie unserer Präcessionsbewegung markierten, welche bez. die Polhodie- und Horpolhodiekurve der ursprünglichen Bewegung im Endpunkte des instantanen Drehungsvektors berühren. Diese neue Bewegung besitzt in zwei benachbarten Zeitmomenten nach Richtung

und Gröfse denselben Rotations- und also auch denselben Impulsvektor, wie die vorgegebene Bewegung. Infolgedessen werden auch die Accelerations- und Deviationswiderstände bei beiden Bewegungen bez. gleich sein.

Wir haben nun zur Berechnung von $H$ und $K$ die Verschiebung $di$ zu betrachten, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Raume während der Zeit $dt$ bei unserer gleichförmig beschleunigten Präcession erfährt. Bezeichnen wir mit $ds$ die zugehörige Verschiebung des Drehungsvektors im Raume, d. h. das Bogenelement der Herpolhodiekurve, und mit $A$ das für alle Axen gleiche Trägheitsmoment des Kugelkreisels, so wird offenbar

$$di = A ds.$$

Sodann zerlegen wir $ds$ in zwei Komponenten parallel und senkrecht zur Richtung der instantanen Rotationsaxe, welche bez. $ds'$ und $d\sigma$ heifsen mögen. Alsdann haben wir nach der Definition des Accelerations- und des Deviationswiderstandes:

$$H = A\frac{ds'}{dt}, \qquad K = A\frac{d\sigma}{dt}.$$

Nun ist $ds'$ nichts anderes, als die Änderung der Drehgeschwindigkeit $\Omega$ während der Zeit $dt$. Mithin erhalten wir für die *Gröfse des Accelerationswiderstandes* die Formel:

$$H = A\frac{d\Omega}{dt} \tag{1'}$$

oder auch

$$H = \frac{d|i|}{dt}. \tag{1''}$$

Die *Axe* des Accelerationswiderstandes fällt mit der Axe der instantanen Drehgeschwindigkeit zusammen; dem *Sinne* nach ist er dem Sinne der instantanen Drehbeschleunigung entgegengesetzt. *Der Accelerationswiderstand tritt hiernach immer dann auf, wenn wir die Drehung des Kugelkreisels beschleunigen.* Eine Richtungsänderung des Drehvektors bei unveränderter Länge desselben hat auf den Accelerationswiderstand keinen Einflufs. Diese Bemerkung dient zur Erklärung der von uns gewählten Bezeichnung.

Wichtiger ist für uns der andere Bestandtheil von $W$, der *Deviationswiderstand* (in Heft IV kurz Kreiselwirkung genannt).

Um die Gröfse $K$ desselben zu berechnen, bemerken wir, dafs wir $d\sigma$ auffassen können als ein Bogenelement auf der Herpolhodiekurve derjenigen *gleichförmigen* Präcession, welche mit unserer *gleichförmig beschleunigten* Präcession die Richtung und Gröfse der Drehungsaxe in dem betrachteten Momente gemein hat. Bezeichnen wir die

Konstanten dieser Präcession mit $\mu, \nu, \vartheta$, so wird nach den Gleichungen (3) und (5) von pag. 50

$$d\sigma = \sqrt{(d\pi)^2 + (d\varkappa)^2 + (d\varrho)^2} = \mu \sin \vartheta \, d\psi = \mu\nu \sin \vartheta \, dt.$$

Mithin haben wir für die *Gröfse des Deviationswiderstandes* beim Kugelkreisel die einfache Formel:

$$(2') \qquad K = |A\mu\nu \sin \vartheta|.$$

Was sodann die *Axe des Deviationswiderstandes* betrifft, so folgt aus der Definition desselben zunächst, dafs diese Axe auf der instantanen Drehungsaxe senkrecht steht; andrerseits ergiebt sich aus der vorhergehenden Betrachtung, dafs dieselbe in die durch den instantanen Drehungsvektor gelegte Tangentialebene an den Herpolhodiekegel der gleichförmig beschleunigten Präcession oder, was dasselbe ist, an den Herpolhodiekegel der ursprünglichen Bewegung fällt. Eine ganz analoge Eigenschaft haben wir oben bei der Centrifugalkraft konstatiert, deren Richtung, wie erwähnt, in der Schmiegungsebene an die Bahnkurve; d. h. in der durch zwei benachbarte Geschwindigkeitsrichtungen hindurchgehenden Ebene liegt. Der Schmiegungsebene entspricht aber im vorliegenden Falle die genannte Tangentialebene, insofern sie durch zwei benachbarte Drehungsaxen hindurchgeht.

Auf die eigentümlichen experimentellen Folgerungen, welche sich aus der Axenrichtung unseres Widerstandes ergeben, werden wir im letzten Paragraphen dieses Kapitels noch näher eingehen.

Wir wollen schliefslich den *Sinn des Deviationswiderstandes* durch eine leicht zu handhabende geometrische Regel festlegen. Ursprünglich ist der Sinn natürlich der Gleichung (1') entsprechend dadurch bestimmt, dafs er dem Sinne der zur Drehungsaxe senkrechten Komponente von $di$ entgegengesetzt ist. Statt dessen können wir aber auch folgendermafsen sagen: *Der Deviationswiderstand wirkt stets in solchem Sinne, dafs er den Polhodiekegel an den Herpolhodiekegel anprefst.*

In der That: Fassen wir ein Bogenelement der Herpolhodiekurve bei unserer erzwungenen Bewegung ins Auge. Unsern Standpunkt im Raume wollen wir so wählen, dafs die Richtung, in welcher unser Bogenelement von dem Endpunkte des Drehungsvektors durchlaufen wird, auf uns hin gerichtet ist. Da der Drehungsvektor verabredetermafsen stets nach derjenigen Seite der Drehungsaxe abgetragen wird, von der aus die Drehung im Sinne des Uhrzeigers stattzufinden scheint, so liegt der Polhodiekegel bei der Wahl unseres Standpunktes notwendig rechts von dem Herpolhodiekegel. Nun ist beim Kugelkreisel die Änderung des Impulsvektors der Änderung des Drehungsvektors proportional. Unser Widerstand, welcher dem Sinne nach der Impuls-

änderung entgegengesetzt ist, wirkt daher von unserem Standpunkte gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Er sucht also den rechterhand gelegenen Polhodiekegel nach links überzudrehen und prefst mithin diesen, wie behauptet wurde, an den Herpolhodiekegel an.

Da es bei der Berechnung des Deviationswiderstandes lediglich auf die zur Drehungsaxe senkrechte Komponente der Impulsänderung ankommt, so hat eine gleichzeitige Beschleunigung der Rotationsgeschwindigkeit auf die Gröfse unseres Widerstandes überhaupt keinen Einflufs. Vielmehr tritt derselbe nur bei solchen Bewegungen auf, welche mit einer Richtungsänderung der Drehungsaxe verbunden sind. *Den Ursprung des Deviationswiderstandes haben wir also, ähnlich wie den der Centrifugalkraft, in der Umlagerung des Geschwindigkeitsvektors zu suchen.* Dieser Thatsache wollten wir durch die Wahl der Benennung Ausdruck geben.

Die Erörterungen dieses Paragraphen lassen sich auf den *allgemeinen Kreisel*, wie erwähnt, nicht gut übertragen. Allerdings können wir selbstverständlich den Trägheitswiderstand $W$ auch bei diesem in einen Bestandteil zerlegen, welcher die Richtung der instantanen Drehung zur Axe hat, und einen zweiten, welcher darauf senkrecht steht und welcher daher keine Arbeitsleistung absorbiert. Indessen würden schon die Namen Accelerations- und Deviationswiderstand für diese beiden Bestandteile nicht gerechtfertigt sein. Da nämlich die Richtung von Impuls- und Drehungsaxe jetzt im allgemeinen auseinander fallen, so würde unser erster Bestandteil nicht ausschliefslich von den Längenänderungen, der letztere nicht ausschliefslich von den Richtungsänderungen des Drehungsvektors herrühren. Auch läfst sich die Gröfse dieser beiden Bestandteile nicht durch so einfache Formeln bestimmen, wie oben beim Kugelkreisel. Wir ziehen es daher vor, bei dem allgemeinen Kreisel, wie im vorigen Paragraphen geschehen, schlechtweg von dem *Widerstande* zu sprechen und von einer weiteren Zerlegung desselben abzusehen.

## § 6. Der Deviationswiderstand bei der regulären Präcessionsbewegung des symmetrischen Kreisels.

Die Erörterungen des vierten Paragraphen enthalten im besonderen Alles, was über die erzwungenen Bewegungen des symmetrischen Kreisels zu sagen ist. Wenn wir auf letztere hier ausführlicher eingehen, so geschieht dieses nur deshalb, weil sich speziell bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels besonders einfache Resultate ergeben, welche uns eine erste Orientierung über die Bewegung des symmetrischen schweren Kreisels verschaffen.

Wir nehmen zunächst an, dafs keine äufseren Kräfte wirksam sind, und erteilen unserm Kreisel mit der Hand eine beliebige reguläre Präcession um die Vertikale. Der Impulsvektor wird dabei auf einem Kreise um die Vertikale herumgeführt; sein Endpunkt schreitet in jedem Momente senkrecht zur augenblicklichen Drehungsaxe fort; seine Länge wird nicht geändert. Der Widerstand, welcher aus dieser Impulsänderung resultiert, rührt also lediglich von den Umlagerungen des Impulses her und soll dementsprechend wieder speziell als Deviationswiderstand bezeichnet werden.

Die *Axe dieses Deviationswiderstandes* steht nach dem, was soeben über die Richtung der Impulsänderungen bemerkt wurde, sowohl auf der Drehungsaxe wie auf der Vertikalen senkrecht; sie fällt also, wie wir kurz sagen können, in die *Richtung der Knotenlinie.*

*Gröfse und Sinn des Widerstandes*, welche wir durch die Gröfse und das Vorzeichen des Buchstabens $K$ bezeichnen, ergiebt sich darauf aus den Werten von $W_X$, $W_Y$, $W_Z$ in den Gleichungen (2′) von pag. 165. Es wird nämlich, da die Knotenlinie (vgl. etwa die Figur 3 von pag. 18) mit der $X$-Axe den Winkel $\varphi$, mit der $Y$-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschliefst:

$$K = W_X \cos\varphi - W_Y \sin\varphi.$$

Hier haben wir in den Ausdrücken von $W_X$ und $W_Y$, da es sich um eine reguläre Präcession handelt, für $p$, $q$, $r$ die Werte aus den Gleichungen (4) von pag. 50 einzutragen und für $L$, $M$, $N$ die zugehörigen Werte $Ap$, $Aq$, $Cr$. Alsdann erhalten wir nach einer kleinen Rechnung:

$$K = -C\mu\nu \sin\vartheta - (C - A)\nu^2 \sin\vartheta \cos\vartheta. \tag{1}$$

Man bemerke, dafs die Bedeutung des Buchstabens $K$ gegen den vorigen Paragraphen etwas abgeändert ist, insofern wir $K$ jetzt ein bestimmtes Vorzeichen beilegen. Ein positiver Wert von $K$ besagt, dafs unser Deviationswiderstand von dem Halbstrahle der Knotenlinie aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers, ein negativer, dafs er im entgegengesetzten Sinne wirkt. Den so bestimmten Widerstand werden wir bei der Führung des kräftefreien Kreisels als Druck auf unsere Hand spüren.

In dem speziellen Falle $C = A$ reduziert sich unsere Gleichung (1) natürlich auf die pag. 173 für den Kugelkreisel abgeleitete Gleichung (2′), indem dann der zweite Term der rechten Seite in (1) verschwindet. Dieser zweite Term rührt daher von der Abweichung des Trägheitsellipsoides von der Kugelgestalt her und soll etwa als *„ellipsoidischer Bestandteil des Deviationswiderstandes“* bezeichnet werden. Der erste

Term, welcher den Wert des Widerstandes beim Kugelkreisel bezeichnet, soll dementsprechend der *„sphärische Bestandteil“* heifsen.

Es giebt noch zwei andere Fälle, in denen sich der Deviationswiderstand auf seinen sphärischen Bestandteil reduziert. Dies findet erstens offenbar statt, wenn $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, die Figurenaxe also auf der Axe der regulären Präcession senkrecht steht. Ferner aber gilt etwas Ähnliches, wenn die Teildrehung $\mu$ im Verhältnis zu allen sonst in unserer Formel vorkommenden Gröfsen aufserordentlich überwiegt. Letzteres ist in den Anwendungen sogar die Regel, weil man durch die gewöhnlich benutzten Antriebsvorrichtungen einen Impulsvektor von sehr grofsem Betrage erzeugt, welcher nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt.

Wir kommen hier noch einmal auf die *natürliche Präcession* zurück, welche der kräftefreie symmetrische Kreisel ohne äufseren Zwang ausführt. Die Bedingung für diese Bewegung lautet offenbar (man vgl. die Ausführungen auf pag. 167) $K = 0$ oder

$$0 = (C\mu + (C - A)\nu \cos\vartheta)\nu \sin\vartheta.$$

*Durch die vorstehende Gleichung wird unter allen möglichen Präcessionsbewegungen eine ganz bestimmte Klasse als natürliche kräftefreie Präcession ausgeschieden.* Auf dieselbe Bedingung wurden wir schon im zweiten Paragraphen (s. Gl. (11) von pag. 153) geführt.

Wir betrachten nun einen *schweren symmetrischen Kreisel* und erteilen diesem eine reguläre Präcession um die Vertikale von beliebigen Konstanten. Aus der Statik wissen wir (vgl. pag. 87), dafs die an den einzelnen Massenteilchen angreifenden Schwerewirkungen eine resultierende Drehkraft ergeben, deren Axe bei dem symmetrischen Kreisel die Knotenlinie ist und deren Gröfse und Sinn durch $P \sin\vartheta$ bestimmt ist. Dabei bedeutet $P > 0$, dafs der Schwerpunkt oberhalb, $P < 0$, dafs er unterhalb des Unterstützungspunktes liegt.

Der Widerstand, welchen wir bei einer erzwungenen regulären Präcession unseres schweren Kreisels zu überwinden haben, — wir können ihn abermals speziell als Deviationswiderstand bezeichnen, — fällt der Richtung nach wieder in die Knotenlinie, weil sowohl das Drehmoment der Schwere wie nach Obigem die Impulsänderung bei der regulären Präcession um die Vertikale die Knotenlinie zur Axe haben. Gröfse und Sinn unseres Widerstandes ergeben sich jetzt aus der Gleichung (3′) des vierten Paragraphen. Tragen wir hier für $D$ den soeben angegebenen Wert $P \sin\vartheta$ und für die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses die oben berechnete Gröfse $-K$ ein, so folgt:

$$W' = K + P \sin\vartheta. \tag{2}$$

Der Widerstand, den wir bei der Führung des schweren Kreisels spüren werden, ist also ein anderer wie der bei gleicher Führung des kräftefreien Kreisels.

Wir werden auch hier den Übergang zu der natürlichen Bewegung des schweren Kreisels machen, also nach solchen Präcessionsbewegungen fragen, welche der schwere Kreisel ohne äufseren Zwang auszuführen imstande ist. Die Bedingung für diese Bewegungen lautet (in Übereinstimmung mit dem D'Alembertschen Prinzipe) $W' = 0$. Mit Rücksicht auf (1) und (2) können wir hierfür schreiben, wenn wir annehmen, dafs $\vartheta$ von Null verschieden ist, dafs also die Präcession nicht speziell in eine blofse Rotation um die Vertikale ausgeartet ist:

$$P = C\mu\nu + (C - A)\nu^2 \cos\vartheta. \tag{3}$$

*Der schwere symmetrische Kreisel vermag hiernach (bei gegebener Massenverteilung, d. h. bei gegebenen Werten von $A$, $C$ und $P$) ohne äufseren Zwang wieder nur eine bestimmte Klasse von regulären Präcessionsbewegungen auszuführen, nämlich nur solche, deren Konstanten $\mu$, $\nu$, $\vartheta$ durch die Relation* (3) *verknüpft sind.*

Im ganzen hängt diese natürliche Präcession des schweren Kreisels von vier willkürlichen Parametern ab. Es sind dieses etwa die Anfangswerte der Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ und die Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$, welche letzteren aber wegen (3) nur einen willkürlichen Parameter repräsentieren. Wir drücken diese Thatsache so aus, dafs wir sagen: *Es giebt beim einzelnen symmetrischen schweren Kreisel $\infty^4$ mögliche Präcessionsbewegungen.*

Dagegen hängt die allgemeine natürliche Bewegung des schweren Kreisels von sechs willkürlichen Parametern ab. Da nämlich der Kreisel ein System von drei Graden der Freiheit ist, so können wir aufser den Anfangswerten der $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ noch ihre Anfangsgeschwindigkeiten willkürlich vorschreiben, worauf der weitere Verlauf der Bewegung durch die mechanischen Differentialgleichungen bestimmt sein wird. *Es giebt also $\infty^6$ mögliche natürliche Bewegungen des schweren Kreisels.*

Wir schliefsen hieraus, dafs die reguläre Präcession nur eine *spezielle Bewegungsform des schweren Kreisels*, eine *partikuläre Lösung seiner Differentialgleichungen* ist.

Machen wir dieselbe Abzählung beim symmetrischen schwerelosen Kreisel, so haben wir aufser den Anfangswerten der Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ und den durch die Relation $K = 0$ verbundenen Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$ zu berücksichtigen, dafs die Axe der Präcession jede beliebige Lage durch $O$ haben kann, (während dieselbe bei dem schweren Kreisel

wegen der Richtung der Schwerewirkung notwendig mit der Vertikalen zusammenfallen mufs). Dieser Umstand erhöht die Zahl der willkürlichen Konstanten bei der regulären Präcession des kräftefreien Kreisels auf 6. *Es giebt also bei diesem* $\infty^6$ *natürliche Präcessionsbewegungen.* Wir verstehen aus diesem Grunde ganz wohl, warum die reguläre Präcession die allgemeinste Bewegungsform des schwerelosen symmetrischen Kreisels sein kann.

Die reguläre Präcession wird als einfachste, wenngleich partikuläre Bewegung des schweren Kreisels für uns später wichtig werden. Wir wollen daher auf die möglichen Werte der Präcessionskonstanten noch näher eingehen, indem wir diese aus den Konstanten der Präcession beim kräftefreien Kreisel durch kontinuierlichen Übergang entstehen lassen.

Dabei werden wir $\mu$ und $\vartheta$ festgehalten denken und werden fragen, wie der Wert von $\nu$ durch Hinzutreten der Schwerewirkung abgeändert wird. Den Wert von $\mu$ werden wir überdies als positiv voraussetzen.

Nehmen wir zunächst $P = 0$, so liefert die in $\nu$ quadratische Gleichung (3) zwei Werte dieser Konstanten, nämlich

$$\text{a)}\quad \nu = 0, \qquad \text{b)}\quad \nu = \frac{C\mu}{(A - C)\cos\vartheta}.$$

Der Wert a) entspricht einer einfachen Rotation des Kreisels um die Figurenaxe, der Wert b) gehört zu einer wirklichen Präcessionsbewegung. Setzen wir darauf $P$ von Null verschieden voraus. Dann finden wir als Wurzeln von (3) die beiden folgenden Werte:

$$\nu = \frac{C\mu \mp \sqrt{C^2\mu^2 - 4P(A-C)\cos\vartheta}}{2(A - C)\cos\vartheta}. \tag{4}$$

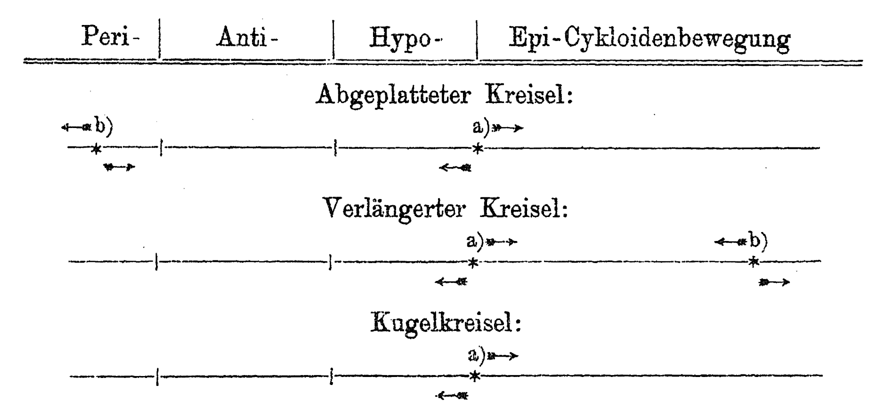
*Es giebt also (bei gegebener Massenverteilung und gegebenen Werten von $\mu$ und $\vartheta$) entweder zwei Fälle von regulärer Präcession oder keinen, je nachdem nämlich die Quadratwurzel im vorstehenden Ausdruck reell oder imaginär ist.* Die beiden reellen Fälle wollen wir nach der Gröfse von $\nu$ als „*langsame*" und „*schnelle Präcession*" unterscheiden. Bei genügend kleinen Werten von $P$ ist die langsame Präcession diejenige, welche sich durch stetigen Übergang aus der einfachen Rotation des schwerelosen Kreisels um die Figurenaxe entwickelt, deren Präcessionskonstante also der oben mit a) bezeichneten Wurzel entspricht.

Eine besondere Betrachtung macht der Fall des Kugelkreisels ($C = A$) nötig. Die Gleichung (3) wird in diesem Falle in $\nu$ linear und liefert den Wert

$$\nu = \frac{P}{A\mu}. \tag{5}$$

Der Vergleich mit dem abgeplatteten oder verlängerten Kreisel berechtigt uns aber auch in diesem Falle noch von einer zweiten Wurzel zu sprechen, welche allerdings unendlich grofs geworden ist ($\nu = \pm \infty$). Die zu der zuerst genannten Wurzel gehörige Präcessionsbewegung werden wir als langsame Präcession bezeichnen können, da sie für $P = 0$ in die einfache Rotation a) übergeht; die Wurzel $\nu = \pm \infty$ stellt jedenfalls eine schnelle Präcession dar.

Das folgende Schema, dessen Richtigkeit man leicht aus den Gleichungen (4) und (5) verifiziert, veranschaulicht die Lage der Wurzeln a) und b) für $P = 0$ sowie (durch den Sinn der beigefügten Pfeile) die Richtung, in welcher a) und b) beim Hinzutreten der Schwerewirkung im Falle des abgeplatteten, des verlängerten und des Kugelkreisels wandern. Dabei beziehen sich die Pfeile oberhalb bez. unterhalb der Geraden auf die Fälle $P > 0$ bez. $P < 0$.




Im Anschlufse hieran bemerken wir, dafs die Werte von $\frac{\nu}{\mu}$, welche beim kräftefreien Kreisel auf das Gebiet der Epi- und Pericykloidenbewegung beschränkt waren (vgl. pag. 153) im Falle des schweren Kreisels auch in die Gebiete der Anti- und Hypocykloidenbewegung eindringen können, dafs also durch den schweren Kreisel alle kinematisch möglichen Präcessionsbewegungen auch kinetisch realisiert werden können.

Es könnte zunächst vielleicht überraschen, dafs die in vertikaler Richtung wirkende Schwerkraft überhaupt eine reguläre Präcession des Kreisels um die Vertikale unterhalten kann, d. h. eine Bewegung, bei welcher die einzelnen Massenteilchen durchschnittlich in horizontaler Richtung fortschreiten. Indessen ist dieser Sachverhalt keineswegs merkwürdiger, wie die aus der Punktmechanik bekannte Thatsache, dafs ein Massenpunkt, welcher sich unter dem Einflufs einer

Centralkraft bewegt, bei geeignetem Anfangsimpulse auf einem Kreise um das Anziehungscentrum herumlaufen, also beständig genau senkrecht zur Richtung der äufseren Kraft fortschreiten kann. Ebenso wie die Möglichkeit dieser Bewegung durch die Bedingung gegeben ist, dafs die Centrifugalkraft mit der Anziehungskraft dauernd im Gleichgewichte stehen mufs, so lautete die Bedingung, durch welche wir die reguläre Präcession als eine mögliche Bewegung des schweren Kreisels erkannten, dahin, dafs der Trägheitswiderstand bei der regulären Präcession dem von der Schwerkraft herrührenden um eine horizontale Axe wirkenden Drehmomente dauernd das Gleichgewicht halten sollte. Dabei ist zu bemerken, dafs weder die Kreisbewegung des Punktes noch die reguläre Präcession des Kreisels die allgemeinste Bewegung von Punkt oder Kreisel darstellen, sondern dafs beide Bewegungen nur bei geeigneter Wahl des Anfangszustandes auftreten.

Zum Schlusse mögen wir die reguläre Präcession des schweren Kreisels unter dem Gesichtspunkte der im vorigen Kapitel besprochenen sog. Stabilität der Drehungsaxe betrachten. Nach obigem kann sich aus der einfachen Rotation ($\nu = 0$) beim Hinzutreten der Schwerewirkung eine reguläre Präcession $\left(\nu \gtrless 0\right)$ entwickeln, bei welcher die Rotationsaxe allmählich auf einem Kreiskegel um die Vertikale herumgeführt wird. Wir sehen also in Übereinstimmung mit einer Bemerkung auf pag. 136, dafs eine kontinuierlich wirkende äufsere Kraft im Laufe der Zeit eine völlige Umlagerung der Drehungsaxe bedingen kann, wie grofs auch die ursprüngliche Rotationsgeschwindigkeit $\mu$ bez. wie klein auch die äufsere Einwirkung $P$ sein möge. *Von einem Festbleiben der Drehungsaxe im Raume wird daher beim Hinzutreten einer kontinuierlichen äufseren Störung gewifs nicht die Rede sein können.*

### § 7. Eine neue Ableitung des Deviationswiderstandes bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels. Die Coriolissche Kraft.

Da der Begriff des Deviationswiderstandes bei der regulären Präcession des symmetrischen Kreisels im folgenden eine nicht unerhebliche Rolle spielen wird, so wollen wir uns seine Entstehung noch auf eine andere Weise klar machen, indem wir uns den Kreisel in seine einzelnen Massenpunkte aufgelöst denken und nach den Kräften fragen, mit welchen diese der erzwungenen Bewegung widerstreben. Wir werden uns dabei der Einfachheit halber auf den speziellen Fall $\vartheta = 90^0$ der regulären Präcession beschränken, in welchem sich nach pag. 176 der Deviationswiderstand auf seinen sphärischen Bestandteil reduziert.

Wir betrachten zunächst einen einzelnen Massenpunkt $P$ und zwingen diesen, eine aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzte Bahn zu durchlaufen. Der Punkt soll in einer vertikalen Ebene $E$ mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise vom Radius $R$ und Mittelpunkte $O$ fortschreiten; gleichzeitig soll die Ebene $E$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine durch $O$ gehende vertikale Axe $A$ gedreht werden.

Wir wollen den Widerstand berechnen, mit welchem der Punkt dieser zusammengesetzten Bewegung widerstrebt. Jedenfalls werden wir als Bestandteile dieses Widerstandes die beiden Centrifugalkräfte vorfinden müssen, welche den Teilbewegungen von $P$, nämlich dem in der Ebene $E$ vor sich gehenden Umlauf um $O$ und dem im Raum stattfindenden Umlauf um $A$, entsprechen. Es zeigt sich aber, dafs aufserdem noch eine aus dem Zusammenbestehen beider Teilbewegungen hervorgehende Kraft existiert, die man nach ihrem Entdecker *Coriolissche Kraft* oder auch *zusammengesetzte Centrifugalkraft (force centrifuge composée)* nennt.

Die Lage des Punktes $P$ in der Ebene $E$ bestimmen wir durch den Winkel $\varphi$, welchen seine Verbindungslinie mit $O$ gegen die Anfangslage dieser Linie bildet. Wir wollen annehmen, dafs zu Anfang die Verbindungslinie $OP$ senkrecht auf der Axe $A$ steht. Bezeichnen wir noch mit $\mu$ die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher $P$ in der Ebene $E$ umläuft, so haben wir

$$\varphi = \mu t.$$

Andrerseits bestimmen wir die Lage der Ebene $E$ im Raume durch den Winkel $\psi$, um welchen $E$ aus der Anfangslage $E_0$ herausgedreht ist. Bedeutet ferner $\nu$ die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich $E$ um $A$ dreht, so haben wir

$$\psi = \nu t.$$

Auf kürzestem Wege dürften wir zur Berechnung der Coriolisschen Kraft durch die nachstehende kleine Koordinatenrechnung gelangen. Eine direkte geometrische Ableitung werden wir am Schlusse des Paragraphen geben, (vgl. pag. 186 und 187).

Die Drehungsaxe $A$ nehmen wir zur $z$-Axe eines räumlichen Koordinatensystems, dessen Mittelpunkt in $O$ liegen und dessen $xz$-Ebene mit $E_0$ zusammenfallen möge. In diesem System werden die Koordinaten von $P$ ersichtlich:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi, \\ y = R\cos\varphi\sin\psi, \\ z = R\sin\varphi. \end{cases}$$

Der Impuls $i$ des Punktes bei unserer zusammengesetzten Bewegung hat alsdann, wenn wir noch die Masse des Punktes mit $m$ bezeichnen, die folgenden Komponenten:

$$[X] = mx' = -m\mu R\sin\varphi\cos\psi - m\nu R\cos\varphi\sin\psi,$$
$$[Y] = my' = -m\mu R\sin\varphi\sin\psi + m\nu R\cos\varphi\cos\psi,$$
$$[Z] = mz' = \phantom{-}m\mu R\cos\varphi.$$

Der Widerstand $W$, welchen der Punkt der erzwungenen Bewegung entgegensetzt, bestimmt sich wie früher durch die Vektorgleichung:

$$W = -\frac{di}{dt};$$

seine Komponenten werden also die folgenden:

$$(2)\quad\begin{cases} W_x = -\dfrac{d[X]}{dt} = m\mu^2 R\cos\varphi\cos\psi - 2m\mu\nu R\sin\varphi\sin\psi \\ \qquad\qquad\qquad + m\nu^2 R\cos\varphi\cos\psi, \\ W_y = -\dfrac{d[Y]}{dt} = m\mu^2 R\cos\varphi\sin\psi + 2m\mu\nu R\sin\varphi\cos\psi \\ \qquad\qquad\qquad + m\nu^2 R\cos\varphi\sin\psi, \\ W_z = -\dfrac{d[Z]}{dt} = m\mu^2 R\sin\varphi. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken entsprechen offenbar die Terme mit dem Faktor $\mu^2$ der Centrifugalkraft, welche aus dem Umlauf von $P$ in der Ebene $E$ entspringen würde, sofern wir uns die letztere im Raume still stehend denken. In der That sind diese Terme die Komponenten einer Kraft, deren Gröſse

$$(3)\qquad m\mu^2 R$$

beträgt und deren Richtung gegen die Koordinatenaxen durch die Richtungscosinus

$$(3')\qquad a = \cos\varphi\cos\psi,\quad b = \cos\varphi\sin\psi,\quad c = \sin\varphi$$

bestimmt wird. Es sind dieses nach den Gleichungen (1) gerade die Richtungscosinusse der Verbindungslinie $OP$.

Andrerseits entsprechen die Terme mit dem Faktor $\nu^2$ der Centrifugalkraft, welche sich aus dem Umlauf von $P$ um die Axe $A$ ergeben würde, sofern wir den Punkt $P$ in der Ebene $E$ als ruhend ansehen. In der That geben diese Terme eine Kraft von der Gröſse

$$(4)\qquad m\nu^2 R_1,$$

wo $R_1 = R\cos\varphi$ den Abstand des Punktes $P$ von der Axe $A$ bedeutet. Ihre Richtungscosinus gegen die Koordinatenaxen sind

$$(4')\qquad a' = \cos\psi,\quad b' = \sin\psi,\quad c' = 0,$$

d. h. die einer durch $P$ hindurchgehenden, zur Axe $A$ senkrechten Geraden.

Es bleiben noch die mittleren Terme mit dem Faktor $\mu\nu$ übrig, welche ihren Ursprung dem Umstande verdanken, daſs weder die Ebene $E$ im Raume, noch der Punkt $P$ in der Ebene $E$ fest ist. Setzen wir die bez. Komponenten zusammen, so entsteht eine Kraft von der Gröſse

$$(5) \qquad -2m\mu\nu R \sin\varphi,$$

welche die Richtungscosinus

$$(5') \qquad a'' = \sin\psi, \quad b'' = -\cos\psi, \quad c'' = 0$$

gegen die Koordinatenaxen bildet. Sie steht sowohl auf der Richtung (3') wie auf der Richtung (4') senkrecht und liegt in der Normalen von $E$. Diese Kraft ist es, die man als *Coriolissche Kraft* bezeichnet.

Schreiben wir der Ebene $E$ Starrheit und eine gewisse Dicke zu und denken wir uns den Kreis, welcher $P$ beschreiben soll, als eine Rinne in $E$ eingegraben, so wird die Kraft (3) durch die Starrheit von $E$, die Kraft (4) zum Teil durch diese, zum Teil durch die Führung aufgehoben, mittelst welchen $P$ in der Rinne gleichförmig entlang geschoben wird. Die Kraft (5) dagegen drückt senkrecht gegen die Ebene $E$ und wird fühlbar, wenn wir die Rotation dieser Ebene um die Axe $A$ mit der Hand besorgen. Diese Kraft wirkt, je nach dem Quadranten, in welchem sich $P$ gerade befindet, beschleunigend oder hemmend auf die Rotation von $E$.

Bemerken wir noch, daſs wir durch die Einführung der Coriolisschen Kraft im Grunde nichts Neues lernen. Ebenso wenig, wie das Auftreten der Centrifugalkraft etwas besagt, was wir nicht aus der Theorie des Impulses ohnehin wissen, ebenso wenig erfahren wir aus der Betrachtung der Coriolisschen Kraft etwas, was nicht in der allgemeinen Theorie der Centrifugalkräfte enthalten wäre. Die Notwendigkeit des Coriolisschen Termes folgt einfach daraus, daſs die Trägheitskraft, welche der thatsächlichen Bewegung des Punktes im Raum entspricht, nicht einfach gleich der Resultante aus den beiden Centrifugalkräften ist, die sich ergeben, wenn wir einerseits $P$ in der ruhenden Ebene $E$ und andrerseits $E$ bei fester Lage von $P$ rotieren lassen.

Die selbständige Einführung der Coriolisschen Kraft erklärt sich überhaupt nur von einem besonderen Standpunkte aus, welchen man der oben beschriebenen zusammengesetzten Bewegung gegenüber einnehmen kann und welchen wir als den *Standpunkt der Relativbewegung* bezeichnen wollen. Man möchte, um bei dem obigen Beispiel zu bleiben, die Bewegung des Punktes $P$ in der Ebene $E$ so behandeln,

dass man bei der Betrachtung aus der Ebene $E$ nicht heraustritt. Wenn diese Ebene in Ruhe wäre, würde man die erste der obigen Centrifugalkräfte zu berücksichtigen haben. Wegen der Rotation der Ebene $E$ aber mufs vor allem noch ein Korrektionsglied in Gestalt des Coriolisschen Termes hinzugefügt werden, welches seinen Ursprung dem Zusammenbestehen der beiden Bewegungen verdankt. Den dritten Term, welcher von der Ordnnng $\nu^2$ ist, wird man im Verhältnis zu den ersteren unter Umständen vernachlässigen können, nämlich immer dann, wenn die Bewegung von $E$ im Raume verhältnismäfsig langsam vor sich geht, wenn also $\nu$ im Verhältnis zu $\mu$ genügend klein ist.

Übrigens geht der Coriolissche Ansatz*) viel weiter als unsere Darstellung desselben. Während wir einen einzelnen Massenpunkt betrachteten, welcher eine vorgeschriebene Kreisbewegung in einer gleichförmig rotierenden Ebene ausführt, bezieht sich der Coriolissche Ansatz auf ein beliebiges System von Massenpunkten, welches eine beliebige Bewegung gegen ein seinerseits willkürlich bewegtes Axensystem beschreibt. —

Zur Klasse der Relativbewegungen gehört offenbar *jede Bewegung auf unserer Erdoberfläche.* Eine solche wird man immer so behandeln, als ob die Erdoberfläche in Ruhe wäre, und wird den Einflufs der Erddrehung nachträglich durch Hinzunahme der Coriolisschen Kraft und der Centrifugalkraft der Erdrotation in Rechnung setzen. Wenn insbesondere der bewegte Körper gezwungen wird, sich gleichförmig fortschreitend auf einem Meridiane zu bewegen, so haben wir genau die oben vorausgesetzten Verhältnisse.

Wir kommen nun zu den Anwendungen der vorhergehenden Betrachtung auf die Kreiseltheorie. Dabei sei es uns gestattet, eine *geographische Einkleidung* zu wählen und an der zuletzt erwähnten Vorstellung einer auf der Erdoberfläche vor sich gehenden Bewegung festzuhalten.

Wir wollen uns denken, dafs die Erde längs eines Meridianes von einer Röhre mit überall gleichem, rechteckigem Querschnitt umzogen ist, in welcher wir Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit zirkulieren lassen, während sich gleichzeitig die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihre Axe dreht. Den Erdmittelpunkt, welchen wir im Raume fest denken, bezeichnen wir mit $O$. Die Geschwindigkeit der Erdrotation sei $\nu$; die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher das Wasser von $O$ aus gesehen in unserer Röhre fortströmt, heifse $\mu$. Die

*) Man vgl. seine Abhandlung im 24. Hefte des Journal de l'Ecole Polytechnique vom Jahre 1835: *Sur les équations du mouvement rélatif des systèmes de corps.*

Erde dreht sich vom Nordpol aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, wie in der nebenstehenden Figur durch einen Pfeil angedeutet ist. Das Wasser möge auf der in der Figur vorderen Erdhälfte von Süden nach Norden strömen. Die Bezeichnungen „rechtes“ und „linkes Ufer“ sollen bei unserer Röhre, wie es in der Geographie üblich ist, vom Standpunkte eines in der Strömungsrichtung blickenden Beobachters gewählt werden. Die Ebene unseres Meridianes werde kurz mit $E$ bezeichnet.

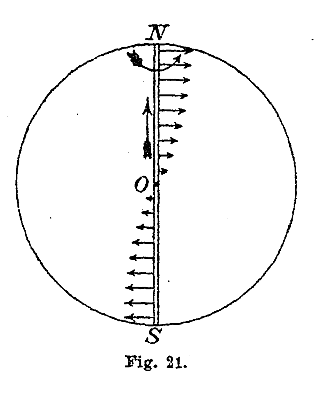


Fig. 21.

Übrigens wollen wir, um nicht auf hydrodynamische Fragen eingehen zu müssen und um das Vorangehende direkt verwenden zu können, unsere Röhre unendlich dünn voraussetzen und unseren Wasserstrom so behandeln, als ob er aus einer Reihe einzelner aufeinander folgender diskreter Massenteilchen bestände.

Da kein Grund vorliegt, weshalb ein Wasserteilchen in unserer Röhre das andere überholen sollte, so werden die Abstände der einzelnen Teilchen bei der Bewegung dauernd erhalten bleiben. Das Wasser, können wir sagen, schiebt sich in seiner Rinne genau so wie ein starrer Körper fort. Infolgedessen werden auch die Kräfte, welche auf die einzelnen Wasserteilchen wirken, dieselben sein, wie bei einem starren Körper von entsprechender Massenverteilung, welcher sich um den festen Punkt $O$ dreht, d. h. wie bei einem Kreisel. Und zwar würde die Masse unseres Kreisels, welche in diesem Sinne dem Wasser unserer Röhre entspricht, auf einem Kreise konzentriert zu denken sein, der zum Radius den Erdradius $R$ und zum Mittelpunkte den Erdmittelpunkt $O$ hat. Da wir uns überdies die Masse gleichförmig über den genannten Kreis verteilt zu denken haben, so werden wir unsern Kreisel speziell als symmetrischen Kreisel bezeichnen müssen; seine Figurenaxe ist die auf der Meridianebene $E$ senkrechte Gerade. Die Kreiselbewegung, welche der aus der Eigenzirkulation und der Erddrehung zusammengesetzten Bewegung des Wassers entspricht, stellt dabei einfach eine reguläre Präcession vor, bei welcher die Figurenaxe in senkrechter Neigung gegen die Erdaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $\nu$ um diese umgedreht wird, während gleichzeitig der Kreisel um die Figurenaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ rotiert.

Wir gehen wieder zu dem geographischen Bilde zurück und fragen nach der *Kraft, mit welcher das Wasser auf die seitlichen Röhrenwände drückt.*

Die gesamte Kraft, welche das einzelne Wasserteilchen $P$ der hier vorausgesetzten Bewegung entgegensetzt, d. h. der oben berechnete Widerstand $W$, besteht aus drei Teilen. Wir haben erstens eine Centrifugalkraft, welche von der Zirkulation des Wassers allein herrührt und in der Richtung $OP$ wirkt, zweitens eine Centrifugalkraft, welche durch die Erddrehung allein hervorgerufen wird und von der Erdaxe senkrecht fortgerichtet ist. Diese Kräfte ergeben offenbar keinen Seitendruck auf die Röhrenwände, wenigstens sofern wir uns, wie oben verabredet, den Wasserstrom als eine einfache Reihe diskreter Massenteilchen vorstellen. Sie äufsern sich lediglich in einer scheinbaren Gewichtsabnahme des Wassers, oder, was dasselbe bedeutet, in einem Druck gegen die obere Wand der Röhre. (Bei der herangezogenen Kreiselbewegung würden sie direkt durch die Starrheit des Materiales aufgehoben werden).

Aufserdem haben wir aber noch die Coriolissche Kraft zu berücksichtigen. Diese beträgt nach (5)

$$-2\mu\nu R \sin\varphi \, dm, \tag{6}$$

wo $\varphi$ die geographische Breite, $dm$ die Masse von $P$ bedeutet. Sie ist nach obigem senkrecht zu der Meridianebene $E$, also senkrecht gegen die Seitenwände der Röhre gerichtet und ändert ihren Sinn, wenn $\sin\varphi$ das Vorzeichen ändert. *Auf der nördlichen Halbkugel* drückt sie durchweg *gegen das rechte, auf der südlichen gegen das linke Ufer.* Gröfse und Sinn dieser Kraft an den verschiedenen Stellen unserer Röhre sind in der vorstehenden Figur durch Pfeile angedeutet.

Den Ursprung der Kraft (6) können wir uns in unserem geographischen Bilde durch folgende Überlegung noch weiter veranschaulichen, welche wir in 2 Schritte gliedern.

1) Ein Wasserteilchen, welches längs unseres an der Erdrotation partizipierenden Meridianes fortschreitet, besitzt an jeder Stelle eine Geschwindigkeitskomponente, welche in Richtung des Meridianes, und eine zweite, welche in Richtung des Parallelkreises fällt. Diese beiden Komponenten sind offenbar bez. gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ in den Radius des Meridianes und gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit $\nu$ in den Radius des Parallelkreises. Die entsprechenden Komponenten des Impulses werden daher bez. gegeben durch

$$R\mu \, dm \quad \text{und} \quad R\nu \cos\varphi \, dm.$$

Während das Teilchen, von dem Äquator ausgehend, nach dem Nordpole wandert, wird die in Richtung des Parallelkreises fallende Impulskomponente successive abgeändert, indem der Abstand unseres Teilchens

von der Erdaxe successive vermindert wird. Die Änderungsgeschwindigkeit dieser Impulskomponente beträgt offenbar:

$$\frac{d}{dt} Rv \cos\varphi\, dm = \mu \frac{d}{d\varphi} Rv \cos\varphi\, dm = -\mu v R \sin\varphi\, dm.$$

Das Teilchen besitzt, wie wir sagen können, infolge der Erdrotation einen Überschufs an seitlicher Geschwindigkeit, welchen es beim Fortschreiten längs der Röhre abgeben mufs. Der zugehörige Überschufs des Impulses bedeutet so viel wie einen unendlich kleinen Stofs, welchen das Teilchen gegen die Röhrenwände ausübt, die entsprechende Änderungsgeschwindigkeit des Impulses also eine kontinuierliche, senkrecht gegen die Seitenwände wirkende Kraft.

2) Die so gefundene Kraft stellt, wie wir sehen, nur erst die Hälfte der oben angegebenen Coriolisschen Kraft dar. Es ist in der That noch ein anderer Umstand zu berücksichtigen, welcher eine gleich grofse Änderung des Impulses zur Folge hat. Es wird nämlich in jedem Momente (aufser in den Punkten des Äquators) die *Richtung* unserer meridionalen Röhre infolge der Erdrotation abgeändert. Bezeichnen wir die in der Zeit $dt$ statthabende Richtungsänderung mit $d\chi$, so ergiebt sich während dieser Zeit eine wiederum in Richtung des Parallelkreises fallende Geschwindigkeitsänderung, welche der Gröfse nach gleich ist dem Produkte aus $d\chi$ in die meridionale Geschwindigkeitskomponente $R\mu$. Dabei findet man durch eine elementargeometrische Betrachtung für $d\chi$ leicht den folgenden Wert

$$d\chi = -v \sin\varphi\, dt.$$

Die zugehörige Änderungsgeschwindigkeit des Impulses, welche sich als Seitendruck äufsert, wird dementsprechend

$$R\mu \frac{d\chi}{dt}\, dm = -\mu v R \sin\varphi\, dm.$$

Die unter 1) und 2) genannten Umstände liefern in der That zusammen die in (6) angegebene Kraft. Die vorstehende Betrachtung können wir geradezu als die oben in Aussicht gestellte geometrische Neuableitung der Coriolisschen Kraft ansehen.

Wir setzen nun die so gefundenen auf die einzelnen Wasserteilchen bezüglichen Kräfte zu einer resultierenden Drehkraft zusammen, welche die Erde als Ganzes angreift. Von den gewöhnlichen Centrifugalkräften können wir dabei in unserem besonderen Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ absehen, weil zu jeder von ihnen eine entgegengesetzt gleiche Centrifugalkraft gefunden werden kann, welche jene bezüglich der Gesamtwirkung auf die Erde gerade kompensiert. Es kommt also nur auf die in (6) angegebenen „zusammengesetzten Centrifugalkräfte“ an.

Zunächst entspricht der Einzelkraft (6) hinsichtlich des fest gedachten Erdmittelpunktes eine Drehkraft von der Gröfse

$$-2\mu\nu R^2 \sin\varphi\, dm,$$

welche, wie man aus der Figur leicht abliest, um den Halbstrahl $\varphi - \frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne wirkt. Wir werden diese Drehkraft in zwei Komponenten zerlegen, indem wir sie einerseits auf die Erdaxe und andrerseits auf die „Knotenlinie", d. h. auf die zur Erdaxe senkrechte äquatoriale Gerade $\varphi = 0$ projizieren. Diese beiden Komponenten werden dann bez.

$$2\mu\nu R^2 \sin\varphi \cos\varphi\, dm$$

und

$$-2\mu\nu R^2 \sin^2\varphi\, dm.$$

Machen wir dieselbe Zerlegung für jedes Wasserteilchen $dm$ und setzen wir die so entstehenden Drehkräfte zusammen, so erhalten wir die gesuchte resultierende Drehkraft. Dieselbe hat, unter $2\pi m$ die Gesamtmasse des strömenden Wassers verstanden, in Richtung der Erdaxe die Komponente

$$+2\mu\nu R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, dm = +2\mu\nu m R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

ihre zweite Komponente in Richtung der Knotenlinie dagegen wird

$$-2\mu\nu R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\varphi\, dm = -2\mu\nu m R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = -2\pi m R^2 \mu\nu.$$

Berücksichtigen wir noch, dafs

$$2\pi m R^2 = C$$

das Trägheitsmoment unseres Wasserstromes bezüglich des auf der Meridianebene senkrechten Erddurchmessers bedeutet, so können wir sagen:

*Die resultierende Drehkraft, welche infolge der vorausgesetzten Wasserbewegung die Erde als Ganzes angreift, ist*

$$K = -C\mu\nu$$

*und hat die soeben genannte Knotenlinie zur Axe.*

Denken wir an die mit unserer Wasserbewegung parallelisierte reguläre Kreiselpräcession, so können wir diese Drehkraft $K$ direkt als den *Deviationswiderstand* unserer Wassermasse bezeichnen. Die vorstehende Formel befindet sich offenbar in voller Übereinstimmung mit

der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen, falls wir nur in letzterer den hier vorausgesetzten Verhältnissen entsprechend $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nehmen.

Vergleichen wir noch die vorstehende Ableitung des Deviationswiderstandes mit der früheren, so werden wir finden, dafs beide nicht so verschieden sind, wie es zunächst scheinen möchte. Soeben gingen wir von dem Impuls des einzelnen Massenteilchens aus, von dem aus sich die Coriolissche Kraft durch Differentiation nach der Zeit ergab. Es war dann noch eine Integration über die Gesamtmasse des Kreisels nötig, um den Gesamtwiderstand des Kreisels zu finden. Früher operierten wir mit dem Gesamtimpulse des Kreisels, aus welchem durch Differentiation nach der Zeit der Widerstand direkt folgte. Der Gesamtimpuls wurde aber seinerseits (im vorangehenden Kapitel) aus den Impulsen der einzelnen Massenteilchen durch eine Integration über die Masse des Kreisels abgeleitet. *Der Unterschied zwischen unserer jetzigen und unserer früheren Ableitung besteht also*, abgesehen von der gröfseren Allgemeinheit der letzteren, *im Grunde in einer blofsen Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration.*

Wir müssen betonen, dafs die hier betrachtete Wasserströmung auf der gleichförmig rotierenden Erdoberfläche durchaus in die Kategorie der erzwungenen Bewegungen gehört, dafs sie strenge genommen nur durch einen äufseren Zwang ermöglicht wird. Wenn nämlich die Drehungsaxe der Erde dauernd die feste Nord-Südrichtung behalten soll, so mufs in jedem Momente von aufsen her der Deviationswiderstand der Wasserströmung überwunden werden. Da ein solcher Zwang in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, würde sich aus der Zirkulation des Wassers sofort eine *Ablenkung der Nord-Südrichtung* und eine *Änderung in der geographischen Breite der Örter* ergeben. Wir kommen auf die hier sich anschliefsenden Fragen später bei den astronomischen Anwendungen der Kreiseltheorie zurück.

Der Druck, welchen nach obigem meridional strömendes Wasser gegen die seitlichen Röhrenwände ausüben mufs, ist in der Geographie wohlbekannt und hat zur Aufstellung des sog. *Beer'schen Gesetzes* Anlafs gegeben. Man hat aus diesem — ob mit Recht oder Unrecht, brauchen wir hier nicht zu entscheiden — Änderungen im Laufe der Flüsse ableiten wollen. Entsprechendes würde für einen *Eisenbahnzug**) gelten, welcher mit konstanter Geschwindigkeit vom Äquator nach einem der beiden Pole fährt. Dieser müfste, wenn seine Geschwindigkeit nur grofs genug ist, auf der *nördlichen* Halbkugel von der Fahrrichtung

*) Numerische Angaben hierüber findet man bei A. Ritter, Höhere Mechanik, 1. Teil, pag. 153 u. ff.

aus gerechnet nach *rechts*, auf der *südlichen* nach *links* je an einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche umwerfen. Denken wir statt an strömendes Wasser an einen meridional zirkulierenden Luftstrom, so gelten auch für diesen ähnliche Betrachtungen. Der Druck, den die Röhrenwände auszuhalten hatten, würde sich jetzt in einer Ablenkung des Luftstromes aus seiner ursprünglichen Richtung äufsern, welcher durch das bekannte *Buys-Ballotsche Gesetz* näher bestimmt wird.

Diese und ähnliche Dinge werden ausführlich in einer interessanten, populär gehaltenen Schrift*) von Jouffret besprochen.

## § 8. Experimenteller Nachweis des Deviationswiderstandes. Der Kreisel von ein und zwei Freiheitsgraden.

Wir werden das Auftreten des Deviationswiderstandes nicht nur theoretisch zu verstehen, sondern auch praktisch zu prüfen wünschen.

Zu diesem Zwecke kann ein einfacher *Handkreisel* dienen, wie er durch die nebenstehende Figur veranschaulicht wird. Er besteht aus einem (in der Figur im Querschnitte sichtbaren) Schwungrade, welches in einem äufseren Ringe, wie wir annehmen wollen, reibungslos gelagert ist. An dem Ringe befindet sich eine Handhabe.**)

Fig 22.

Denken wir uns die Handhabe festgehalten, so haben wir einen *Kreisel von nur einem Freiheitsgrade* vor uns. Bewegen wir aber, wie es im folgenden geschehen soll, die Handhabe in beliebiger Weise um einen Punkt ihrer Axe, so realisieren wir dadurch den schon im vierten Paragraphen besprochenen Fall eines *Kreisels von nur einem Grade natürlicher nnd zwei Graden erzwungener Bewegungsfreiheit.* In der That sind wir, nachdem wir das Schwungrad in Rotation versetzt haben, nachträglich (wegen der vorausgesetzten

*) *Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope* etc. Revue d'Artillerie, Bd. 4, 1874. Wir bemerken jedoch, dafs die Jouffretschen Formeln nicht überall zuverläfsig sind. Bei der Berechnung des seitlichen Druckes wird nur der erste der pag. 186, 187 erwähnten Umstände berücksichtigt und daher die Gröfse des Widerstandes um den Faktor $\frac{1}{2}$ zu klein gefunden.

**) Wo ein solcher Kreisel nicht zur Hand ist, lassen sich die beschriebenen Versuche sehr leicht auch mittels eines Fahrrades anstellen, dessen Reifenmasse nicht notwendigerweise über ihren normalen Betrag vergröfsert zu werden braucht. Über ausgeführte Modelle dieser Art siehe die Fufsnote auf pag. 1.

Reibungslosigkeit der Lager) nicht mehr imstande, die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe durch Bewegungen der Handhabe zu beeinflufsen.

Wir wollen annehmen, dafs der dem Kreisel ursprünglich erteilte Impuls um die Figurenaxe recht erheblich und jedenfalls sehr viel gröfser ist, als die Impulsänderungen, welche wir durch die folgenden erzwungenen Bewegungen hervorrufen. Schwenken wir nun den Apparat mit der Hand schnell hin und her, so fühlen wir einen kräftigen Zug auf unsere Hand, aus welchem wir erkennen, dafs der Kreisel bei der ihm aufgezwungenen Bewegung einen Widerstand leistet. Dieser Widerstand gehört offenbar in die Kategorie der in den vorangehenden Paragraphen betrachteten Kräfte und hat seinen Grund in den durch die äufsere Bewegung erzwungenen Abänderungen des Rotationsimpulses. Er darf nicht etwa auf Rechnung des gewöhnlichen Trägheitswiderstandes nicht rotierender Körper gesetzt werden, mit dem er schon der Richtung nach nicht übereinstimmt und den er der Gröfse nach ganz bedeutend übertrifft.

Im besonderen können wir die *reguläre Präcession* in der Weise nachahmen, dafs wir den Kreisel mit ausgestrecktem Arm um unsern Körper herumführen. Auch hierbei fühlen wir einen Zug, den wir nach § 6 speziell als Deviationswiderstand ansprechen können. Der Arm wird ein wenig nach oben oder unten gezogen, wenn wir den Kreisel im einen oder anderen Sinne um die Vertikale herumführen. Allerdings wird dieser Zug bei normalen Dimensionen des Apparates nur im Falle einer sehr schnellen Drehung deutlich fühlbar.

Auffällig ist dabei namentlich der *Sinn des Zuges.* Wenn wir die Handhabe in horizontaler Richtung führen, wirkt der Zug in vertikaler Richtung. *Der Kreisel scheint immer senkrecht gegen die augenblickliche Bewegungsrichtung ausweichen zu wollen.* Dieses scheinbar paradoxe Verhalten, welches uns in ähnlicher Weise noch des öfteren begegnen wird, erklärt sich aus dem Begriff des Deviationswiderstandes von selbst. In der That: Die Impulsänderung bei unserer regulären Präcession findet in horizontaler Richtung statt; die Drehkraft des Deviationswiderstandes wirkt daher um eine horizontale Axe und sucht die Handhabe des Kreisels, je nachdem die Präcession eine progressive oder eine retrograde ist, zu heben oder zu senken.

Viel empfindlicher ist folgende Versuchsanordnung. Wir legen den Kreisel mit seiner Handhabe einerseits, mit dem festen Ringe andrerseits auf zwei Fingerspitzen der rechten und linken Hand. Drehen wir nun die Axe des Instruments, indem wir die Fingerspitzen in der horizontalen Ebene etwas gegen einander verschieben, so ver-

spüren wir einen deutlichen Druck auf die eine oder andere Hand. Die seitliche Bewegung der Fingerspitzen können wir dabei als den Beginn einer regulären Präcession auffassen, bei welcher die Figurenaxe senkrecht zur Axe der Präcession gelegen ist. Der Druck zeigt uns die Existenz des Deviationswiderstandes an.

An Stelle der Fingerspitzen können auch die beiden Schalen einer Wage treten. Wir legen den Handkreisel, nachdem wir ihn in starke Rotation versetzt haben, mit seiner Handhabe auf die eine, mit seinem Ringe auf die andere Wagschale. Jetzt drehen wir den Tisch, auf welchem die Wage steht. Sofort wird die eine Wagschale ein wenig zu sinken beginnen. —

Sodann behandeln wir einen Kreisel, wie er etwa durch die nebenstehende Figur dargestellt wird. Die Lagerung des (im Querschnitte sichtbaren) Schwungrades, sowie die Lagerung des inneren Ringes werden wir als reibungslos, äufsere Kräfte als nicht vorhanden ansehen. Über die Massenverteilung machen wir, um unsern Apparat als einen einheitlichen starren Körper behandeln zu können, die schon in der Einleitung (vgl. pag. 3) erwähnte Annahme, dafs die Masse des Schwungrades die Masse des inneren Ringes erheblich überwiegt.

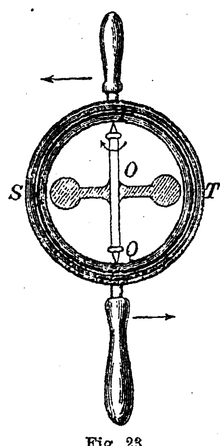


Fig. 23.

Denken wir uns den Stab, an welchem unser Kreisel befestigt ist, im Raume festgestellt, so haben wir einen *Kreisel von zwei Freiheitsgraden.* Verdrehen wir aber, wie es später geschehen soll, den Stab selbst in der Ebene des äufseren Ringes, so kommt zu den *beiden Graden natürlicher Bewegungsfreiheit* noch *ein Grad erzwungener Bewegungsfreiheit* hinzu. In gewissen geistreichen Spekulationen von Lord Kelvin bilden Kreisel dieser Art die Elemente, aus denen er seine Modelle für eine kinetische Theorie der Materie oder sogar des Maxwellschen Lichtäthers aufbaut. Allerdings erscheinen uns diese Bestrebungen heutzutage nicht mehr so fruchtbar, wie man zur Zeit ihrer Entstehung annahm.

Wir bezeichnen die Figurenaxe des Schwungrades mit $PQ$, die Drehungsaxe des inneren Ringes mit $ST$. Beide Geraden schneiden sich in dem Mittelpunkte $O$ des Kreisels. Bezüglich der Axe $PQ$ sei das Trägheitsmoment des Schwungrades gleich $C$, bezüglich der Axe $ST$ gleich $A$. Der innere und der äufsere Ring mögen ursprünglich, wie in der Figur, in eine Ebene fallen.

Zunächst wollen wir uns klar machen, *dafs die natürliche Be-*

*wegung unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden (bei festgestellter Handhabe) eine reguläre Präcession ist, bei welcher sich das Schwungrad mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe PQ und der innere Ring mit davon unabhängiger gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe ST dreht.* Das Kriterium für die natürliche Bewegung unseres Kreisels entnehmen wir dem § 4. Während bei der natürlichen Bewegung des kräftefreien Kreisels von *drei* Freiheitsgraden die Änderung des Impulses schlechtweg gleich Null sein muſs, brauchen bei der natürlichen Bewegung unseres kräftefreien Kreisels von *zwei* Freiheitsgraden nur diejenigen Komponenten der Impulsänderung zu verschwinden, welche zu einer möglichen Bewegung desselben gehören, während eine Impulsänderung, deren Richtung in die Drehaxe des festgestellten Stabes fällt, möglich ist und sich als Druck auf letzteren bemerkbar macht. Dasselbe Kriterium können wir auch, wenn wir uns der Ausdrucksweise des *D'Alembertschen Prinzipes* bedienen wollen (vgl. pag. 167), folgendermaſsen formulieren: Es muſs sich das System der Trägheitswiderstände aller Massenpunkte mit dem System der äuſseren Kräfte, d. h. in unserem Falle mit dem die Festhaltung des Stabes bewirkenden Mechanismus, das Gleichgewicht halten.

Bei unserer regulären Präcession wird nun der Impuls auf einem Kreiskegel um die Axe $ST$ herumgeführt und liegt beständig in einer Ebene mit den Axen $ST$ und $PQ$. Folglich steht die Impulsänderung auf diesen beiden Axen beständig senkrecht. Die Axe der Drehung, welche dieser Impulsänderung entspricht, fällt mit der Axe der Impulsänderung selbst zusammen; sie steht also ebenfalls senkrecht auf den beiden möglichen Drehungsaxen $PQ$ und $ST$. Unser obiges Kriterium ist folglich erfüllt und unsere Behauptung erwiesen.

Wir können daraufhin sagen: Haben wir dem Schwungrade beliebige Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$ um die Axen $PQ$ und $ST$ erteilt, so behalten diese Winkelgeschwindigkeiten dauernd ihre ursprünglichen Werte bei. Die negativ genommene Änderungsgeschwindigkeit des Impulses, d. h. der *Deviationswiderstand der regulären Präcession,* muſs dabei durch den die Feststellung des Stabes bewirkenden Mechanismus dauernd überwunden werden. Der Gröſse nach ist dieser Widerstand in dem vorliegenden Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (vgl. pag. 175):

$$|K| = |C\mu\nu|. \tag{1}$$

Der Richtung nach steht er, da zu Beginn der Bewegung die Ebenen des äuſseren und des inneren Ringes zusammenfallen sollten, anfangs auf der Ebene des äuſseren Ringes senkrecht. Dagegen wird er seine Neigung gegen diese Ebene ändern, sobald im Verlaufe der Präcession

die Figurenaxe aus der Ebene des äufseren Ringes herausgetreten ist. Um auch den Sinn des Widerstandes anzugeben, nehmen wir an, dafs die Winkelgeschwindigkeiten $\mu$ und $\nu$ von $P$ und $S$ aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgen. Alsdann ist die Impulsänderung zu Beginn der Bewegung senkrecht aus der Ebene der Zeichnung heraus auf den Beschauer hin gerichtet. Der Deviationswiderstand, welcher der Impulsänderung entgegengesetzt ist, wirkt daher um die vordere Normale der Zeichenebene entgegen dem Sinne des Uhrzeigers und sucht den Stab anfangs so zu bewegen, wie durch die horizontalen Pfeile der Figur angedeutet ist.

Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, wollen wir festsetzen, dafs wir überhaupt nur den Beginn der Bewegung in Betracht ziehen, d. h. nur diejenige Zeit, während deren die Figurenaxe nahezu in der Ebene des äufseren Ringes enthalten ist. Unter dieser Annahme können wir jetzt kurzweg sagen, dafs unser Widerstand auf der Ebene des äufseren Ringes senkrecht steht und den Stab in dieser Ebene von vorne gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu verdrehen strebt.

Wir können hier abermals an die vermeintliche Unveränderlichkeit der Rotationsaxe erinnern. Bei der regulären Präcession unseres Kreisels von zwei Freiheitsgraden wird die instantane Drehungsaxe (wenigstens bei kleinen Werten von $\nu : \mu$) auf einem sehr flachen Kreiskegel um die horizontale Axe $ST$ herumgeführt. Die äufsere Einwirkung, welche hierzu erforderlich ist, besteht in der kontinuierlichen Überwindung des Deviationswiderstandes. *Wir können also lediglich durch Festhalten der Handhabe d. h. ohne die geringste Arbeitsleistung bewirken, dafs die Rotationsaxe aus einer ursprünglichen in eine nahezu entgegengesetzte Lage übergeführt wird.*

Wir werden jetzt umgekehrt annehmen, dafs zu Beginn der Bewegung keine Rotation um die Axe $ST$ vorhanden ist, wohl aber, dafs dem Kreisel eine starke Rotation $\mu$ um die Axe $PQ$ erteilt wurde, welche von $P$ aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Wir denken uns für einen Augenblick die Arretierung des Stabes gelöst und erteilen diesem eine erzwungene Bewegung einfachster Art. Wir drehen nämlich den Stab in der Ebene des äufseren Ringes um einen kleinen Winkel $v$ von vorn gesehen im Sinne des Uhrzeigers plötzlich herum, um ihn sogleich wieder festzuhalten.

Der Impuls des Kreisels setzt sich natürlich mit den Drehstöfsen, welche zu unserer Bewegung $v$ gehören, nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Nun gehört zur Erzeugung der Bewegung $v$ ein gewisser und zu der unmittelbar darauf folgenden Hemmung dieser Bewegung der entgegengesetzt gleiche Drehstofs. Im ganzen behält also der

Impulsvektor seine ursprüngliche Lage im Raume bei. Gleichzeitig ist aber seine Lage im Kreisel geändert worden: während er der Annahme nach ursprünglich in Richtung der Figurenaxe fiel, bildet er jetzt mit dieser Axe den Winkel $v$. Dabei besitzt die Projektion des Impulsvektors auf die gedrehte Richtung der Figurenaxe bei genügend kleinem $v$ annähernd die Gröfse des ursprünglichen Impulses $C\mu$. Die zur Figurenaxe senkrechte, in die Richtung von $ST$ fallende Komponente des Impulses dagegen hat die Gröfse $C\mu v$.

Der letzteren Impulskomponente entspricht eine Drehgeschwindigkeit $\nu$, welche um die Axe $ST$ von $S$ aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers stattfindet und welche durch die Gleichung bestimmt ist

$$A\nu = C\mu v. \tag{2}$$

Mit dieser Geschwindigkeit $\nu$ beginnt sich der innere Ring, nachdem wir den äufseren Ring um $v$ verdreht haben, in Bewegung zu setzen. Das Schwungrad fährt dagegen fort, mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ um seine Figurenaxe zu rotieren, weil die Impulskomponente in Richtung der gedrehten Figurenaxe nach wie vor $C\mu$ beträgt. Wenn wir weiterhin die Stellung des Stabes im Raume nicht mehr ändern, so behalten $\mu$ und $\nu$ die angegebenen Werte bei. Es hat sich also eine reguläre Präcession genau von der oben betrachteten Beschaffenheit eingestellt.

Bemerken wir noch, dafs die Geschwindigkeit $\nu$ sehr klein ausfällt, da wir $v$ als einen sehr kleinen Winkel voraussetzten. Unsere obige Verabredung, dafs wir nur denjenigen Teil der regulären Präcession betrachten wollten, während dessen die Figurenaxe nahezu in der Ebene des äufseren Ringes enthalten ist, bedeutet daher jetzt keine wesentliche Beschränkung.

Nun sahen wir oben, dafs jede reguläre Präcession $(\mu, \nu)$ unseres Kreisels bei festgestellter Handhabe einen Deviationswiderstand erzeugt, welcher unter den vorliegenden Umständen den Apparat anfangs in der Ebene des äufseren Ringes entgegen dem Sinne des Uhrzeigers zu verdrehen strebt. Die Gröfse dieses Widerstandes ist den Gleichungen (1) und (2) zufolge

$$|K| = \frac{C^2\mu^2}{A} v, \tag{3}$$

sie ist also dem Drehwinkel $v$ proportional; dem Sinne nach ist unser Widerstand, wie wir soeben sahen, der ursprünglichen Drehung $v$ entgegengesetzt und strebt die letztere rückgängig zu machen.

Diese merkwürdigen Eigenschaften des Kreisels von zwei Freiheitsgraden werden wir später bei der Darstellung des Kelvinschen Elasticitätsmodelles zu benutzen haben. Wir fassen dieselben hier noch

einmal, wie folgt, zusammen, wobei wir uns diejenigen Vereinfachungen der Ausdrucksweise gestatten, welche durch unsere Verabredung einer nicht zu langen Ausdehnung der Beobachtungszeit gegeben sind:

*Wenn wir unseren mit einem rotierenden Schwungrade versehenen Stab in der Ebene des äußeren Ringes um einen kleinen Winkel verdrehen, so widersetzt er sich mit einer dem Drehungswinkel proportionalen Kraft. Wir müssen, um den Stab in seiner neuen Stellung zu erhalten, dauernd eine Kraft ausüben. Lassen wir mit dieser Kraft nach, so strebt unser Stab wiederum seiner Anfangslage zu.*

*Unser Stab besitzt also eine gewisse **spezifische Widerstandsfähigkeit gegen Richtungsänderungen**, eine Art **absoluter Orientierung im Raume**.*

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD

# ÜBER DIE THEORIE DES KREISELS

## HEFT II

## DURCHFÜHRUNG DER THEORIE IM FALLE DES SCHWEREN SYMMETRISCHEN KREISELS

ZWEITE DURCHGESEHENE
ANASTATISCH GEDRUCKTE AUFLAGE



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1921

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA:
COPYRIGHT 1921 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

# Kapitel IV.

## Die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Einführung der elliptischen Integrale.

### § 1. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; vorläufige Verabredungen.

In diesem Kapitel wenden wir uns zur definitiven Behandlung des *schweren* symmetrischen Kreisels von drei Graden der Freiheit, setzen also durchweg voraus, dafs der Schwerpunkt von dem Unterstützungspunkte verschieden ist.

Wir haben bisher nur einen ganz speziellen Fall der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels untersucht, nämlich die reguläre Präcession desselben (vgl. § 6 des vorigen Kap.). Demgegenüber soll es sich jetzt um seine allgemeine Bewegung (bei beliebiger Wahl des Anfangszustandes) handeln. Bevor wir aber in die etwas weitläufigen *quantitativen* Diskussionen eintreten, welche vollständig nur mit Hülfe der elliptischen Integrale durchgeführt werden können, wollen wir unsere Aufgabe zunächst *qualitativ* fassen und auf anschaulichem Wege einen ersten Überblick über die zu erwartenden Bewegungsformen zu gewinnen suchen. Ein entsprechendes Verfahren wird stets, zumal bei komplizierteren Aufgaben der Mechanik geboten sein, weil man im anderen Falle Gefahr läuft, sich in Einzelheiten zu verlieren und über den Formeln den Gegenstand selbst zu vergessen.*)

Zunächst treffen wir einige vereinfachende Verabredungen.

1. Wir beziehen uns im Folgenden stets auf den *Kugelkreisel.* Dies wird umsomehr gestattet sein, als wir bald lernen werden, die allgemeine Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels auf die des schweren Kugelkreisels zurückzuführen. Dafs es überhaupt schwere Kugelkreisel giebt, d. h. Körper von kugelförmigem Trägheitsellipsoid, deren Schwerpunkt von dem Mittelpunkte der Trägheitskugel verschieden

*) Vgl. hierzu die beachtenswerten Bemerkungen, welche Herr Poincaré seinen wichtigen „qualitativen" Untersuchungen über Differentialgleichungen, Journal de Liouville, sér. III t. 7 und 8, 1881, 1882 voranschickt.

ist, wurde bereits pag. 106 durch ein Beispiel erläutert. Den gemeinsamen Wert der Trägheitsmomente unseres Kreisels bezeichnen wir mit $A$.

2. Wir werden annehmen, dafs bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe der Schwerpunkt $S$ *unterhalb des Unterstützungspunktes* $O$ liegt ($P < 0$). Offenbar bedeutet diese Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil wir es ja in der Hand haben, den einen oder den anderen der beiden Halbstrahlen, in welche die Gerade $OS$ durch den Punkt $O$ zerlegt wird, als Figurenaxe zu bezeichnen.

3. Wir müssen uns ferner entscheiden, auf welche Elemente der Kreiselbewegung wir im Folgenden unser Hauptaugenmerk richten wollen. Nach der Poinsotschen Theorie der Drehung hätten wir uns in erster Linie den Ort des Drehungsvektors im Körper und im Raume klar zu machen. Die Gestalt der Polhodie- und der Herpolhodiekurve würde uns alsdann ein vollständiges Bild der Bewegung liefern. Indessen ist es nicht leicht, sich das Abrollen dieser Kurven deutlich zu vergegenwärtigen; aufserdem ist im Experimente der Ort der Drehungsaxe schwer sichtbar und überhaupt nur durch besondere Vorrichtungen (vgl. p. 14) zur Wahrnehmung zu bringen. Viel sinnfälliger ist bei der üblichen Konstruktion unserer Modelle der Ort der Figurenaxe im Raume. Infolgedessen werden wir statt nach Polhodie- und Herpolhodiekurve lieber nach der Kurve fragen, welche irgend ein Punkt der Figurenaxe, z. B. derjenige, welcher von $O$ den Abstand 1 hat, bei der Bewegung beschreibt. Indem wir uns vorstellen, dafs der mit Masse belegte Teil der Figurenaxe (vgl. etwa die Figur von pag. 1) gerade die Länge 1 hat, werden wir den genannten Punkt im Folgenden als Kreiselspitze bezeichnen. Die Kurve, welche diese „Kreiselspitze" auf der um $O$ beschriebenen Einheitskugel aufzeichnen würde, liefert uns alsdann ein für die Anschauung charakteristisches, wenn auch nicht ganz vollständiges Bild vom Ablauf der Bewegung; letzteres deshalb, weil ja unsere Kurve nur die Bewegung der Figurenaxe im Raume, nicht aber die Drehung des Kreisels um die Figurenaxe zum Ausdrucke bringt.

Um die Kurve der Kreiselspitze graphisch wiedergeben zu können, müssen wir die Einheitskugel, auf welcher sie verläuft, auf eine geeignete Zeichenebene projizieren. Als solche wählen wir die Äquatorebene der Kugel, d. h. die durch den Unterstützungspunkt gehende Horizontalebene. Was die Art der Projektion betrifft, so würde es vielleicht am nächsten liegen, eine orthogonale Parallelprojektion (kurz *„orthographische Projektion"* genannt) zu wählen, also die Kurve so zu zeichnen, wie sie einem von oben her aus unendlicher Entfernung auf die Kugel blickenden Beschauer erscheinen würde. Dies würde aber

gewisse Übelstände mit sich bringen, auf welche demnächst aufmerksam gemacht werden soll. Besser ist es, die *stereographische Projektion* anzuwenden, wobei wir den tiefsten Punkt der Kugel, den „Südpol", als Projektionszentrum benutzen werden. Die Zeichnung giebt dann dasjenige Bild wieder, welches ein im Südpol der Kugel befindliches Auge von der Kurve empfängt. Der Äquator der Kugel erscheint in der Zeichnung als Einheitskreis, dessen Mittelpunkt dem höchsten Punkte der Kugel, dem „Nordpol", dessen Inneres der „nördlichen Halbkugel" entspricht.

Sehr viel vollkommener als die genannte orthographische oder auch als die im Folgenden anzuwendende stereographische Projektion sind allerdings die *stereoskopischen Bilder* der Kreiselbewegung, welche die Herren Greenhill und Dewar*) publiziert haben. Hier werden zwei geeignete Zentralprojektionen der Bahnkurve hergestellt, welche, durch das Stereoskop betrachtet, den vollendeten Eindruck der sphärischen Kurve hervorrufen. Die lediglich typographische Schwierigkeit, von einer Raumkurve ein absolut adäquates Bild zu geben, wird hier also durch Hinzuziehung des Stereoskops in glücklichster Weise gelöst. Wir verzichten auf diese Wiedergabe der Bahnkurve nur deshalb, weil wir beim Leser den Besitz eines Stereoskops nicht voraussetzen wollen.

4. Wir können ferner ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unsere Aufgabe dadurch vereinfachen, dafs wir die *Anfangszeit*, von der aus wir die Bewegung des Kreisels verfolgen, passend auswählen. Die Anfangszeit soll immer so angenommen werden, dafs sich in ihr die Kreiselspitze an einem höchsten oder tiefsten Punkte ihrer Bahn befindet. Die Kurve der Kreiselspitze wird hiernach zu Anfang eine horizontal gerichtete Tangente besitzen, falls sie nicht im Besonderen eine vertikal gerichtete Spitze bildet. Gleichzeitig ist durch unsere Wahl der Anfangszeit die Anfangslage der instantanen Rotationsaxe beschränkt. Die Rotations- und die mit ihr zusammenfallende Impulsaxe liegen alsdann nämlich ersichtlich in einer durch die Anfangslage der Figurenaxe gehenden Vertikalebene.

5. Der Anfangszustand sowie der Charakter der resultierenden Bewegung sind nun durch drei Daten wesentlich bedingt, durch die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, durch die Anfangsneigung des Impulsvektors gegen die Vertikale und durch die Länge dieses Vektors. Die sonst etwa in Betracht kommenden Daten z. B. das Azimuth, unter welchem die Figurenaxe von oben gesehen erscheint, sind unwesentlich und haben speziell auf die Gestalt der im

*) Proceedings of the London Math. Soc., Bd. 27, pag. 587 u. ff., 1896, Engineering, Bd. 64 pag. 311, 1897.

Folgenden zu entwerfenden Figuren keinen Einfluſs. Die anfängliche Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale messen wir, wie üblich, durch den Winkel $\vartheta$; Lage und Länge des Impulsvektors sind bekannt, wenn wir etwa seine senkrechten Projektionen auf die Vertikale und auf die Figurenaxe angeben. Da wir die Komponenten des Impulsvektors im $X, Y, Z$-System mit $L, M, N$ bezeichnen, wird die Projektion des Impulsvektors auf die Figurenaxe durch den Buchstaben $N$ zu charakterisieren sein. Führen wir ferner für die Komponenten des Impulsvektors in dem $x, y, z$-Systeme, dessen $z$-Axe wie früher verabredet mit der Vertikalen zusammenfallen sollte, die entsprechenden Bezeichnungen $l, m, n$ ein, so wird die Projektion des Impulsvektors auf die Vertikale mit dem Buchstaben $n$ zu belegen sein. Die Impulskomponente $N$ bestimmt die Geschwindigkeit $r$, mit welcher sich der Kreisel um seine eigene Axe dreht. Es soll daher $N$ kurz als *Eigenimpuls*, die zugehörige Geschwindigkeitskomponente $r$ als *Eigenrotation* bezeichnet werden. Andrerseits stellt die Impulskomponente $n$ einen Drehstoſs von vertikaler Axe dar, welcher einem gewissen auf die Kreiselspitze ausgeübten und horizontal gerichteten gewöhnlichen Stoſse äquivalent ist. Durch diesen Stoſs wird die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Kreiselspitze in ihrer Anfangslage seitlich (d. h. in horizontaler Richtung) fortschreitet. Infolgedessen soll die Impulskomponente $n$ kurz als *seitlicher Anstoſs* bezeichnet werden. Zusammenfassend können wir hiernach sagen: Der Charakter der allgemeinen Kreiselbewegung hängt wesentlich nur von drei Konstanten ab, nämlich von der anfänglichen Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale, dem Eigenimpulse und dem seitlichen Anstoſs zu Beginn der Bewegung, d. h. von den Beträgen, welche die Gröſsen $\vartheta$, $N$ und $n$ zur Zeit $t = 0$ besitzen. Es wird sich übrigens im dritten Paragraphen zeigen, daſs die Impulskomponenten $n$ und $N$ ihre Anfangswerte für den ganzen Verlauf der Bewegung beibehalten, so daſs wir statt von den „Anfangswerten" der Gröſsen $n$ und $N$ schlechtweg von den „Konstanten" $n$ und $N$ reden können, welchen Umstand wir uns zur Vereinfachung der Ausdrucksweise schon jetzt zu nutze machen werden.

6. Während wir der Konstanten $n$ im Folgenden *alle möglichen Werte* erteilen, wollen wir die Konstante $N$ in diesem Paragraph als *positiv* voraussetzen; wir wollen also annehmen, daſs die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Ferner wollen wir den Anfangswert des Winkels $\vartheta$ von vornherein in spezieller Weise festlegen. Wir bestimmen nämlich, daſs die Figurenaxe anfangs *horizontal* liegen, der Winkel $\vartheta$ also gleich $\frac{\pi}{2}$ sein solle. Die

Kurve der Kreiselspitze wird alsdann, von dem Äquator der Einheitskugel auslaufend, in diesem einen höchsten oder tiefsten Punkt besitzen. Inwieweit durch diese Festsetzungen $\left(N > 0 \text{ und } \vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ die folgenden Betrachtungen spezialisiert werden, wird später auszuführen sein. —

Nach diesen Verabredungen werden wir so vorgehen, dafs wir alle möglichen Bewegungsformen unseres Kugelkreisels, welche sich bei beliebiger Wahl der Konstanten $n$ und $N$ ergeben, zwischen einige besonders einfache Spezialfälle einordnen und uns im übrigen einer Art Kontinuitätsprinzipes bedienen, welches wir so formulieren: *Bei stetiger Abänderung des Anfangszustandes (der Werte von $n$ und $N$) wird sich auch die Bewegung des Kreisels stetig verändern; unstetige Übergänge, welche mechanisch gesprochen auf instabile Bewegungsformen hindeuten würden, werden wir fürs erste als ausgeschlossen ansehen.* Natürlich bedarf dieses Prinzip, sowie unsere ganze qualitative Schlufsweise einer genauen quantitativen Nachprüfung. In der That sollen die folgenden Betrachtungen nicht als absolut stringent, sondern nur als plausibel hingestellt werden; wir werden sie später nach verschiedenen Richtungen hin zu ergänzen haben. Übrigens sind die Figuren, welche wir für die Kurve der Kreiselspitze geben, nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ richtig gezeichnet.

Die Gesamtheit der Fälle, welche wir zu überblicken haben, stellt, entsprechend den unendlich vielen Werten, welche wir den Konstanten $N$ und $n$ beilegen können, eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit dar. (Man vgl. hierzu das Schema in Figur 36 von pag. 215.) Wir müssen uns im Folgenden natürlich begnügen, aus dieser Mannigfaltigkeit eine Reihe einzelner charakteristischer Typen herauszuheben.

Betrachten wir zunächst die Spezialfälle, auf welche wir hindeuteten. Es sind dieses die *reguläre Präcession* einerseits und die *Pendelbewegung* andrerseits.

Nach pag. 178, 179 giebt es bei gegebener Massenverteilung des Kreisels, sowie bei gegebenen Werten des (konstanten) Winkels $\vartheta$ und der Geschwindigkeitskomponente $\mu$ zwei mögliche Werte der zugehörigen Geschwindigkeitskomponente $\nu$, welche zu einer *regulären Präcession* Anlafs geben. Im Falle des Kugelkreisels sind diese Werte beide reell und werden durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\text{a)} \quad \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{b)} \quad \nu = \pm\infty.$$

Es ist leicht, zumal in dem vorliegenden Falle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, von den Präcessionskonstanten $\nu$ und $\mu$ zu unseren Impulskomponenten $n$ und $N$

überzugehen. Die Gröfsen $\nu$ und $\mu$ bedeuten (vgl. z. B. die Figuren von pag. 48) die Parallelprojektionen des Drehungsvektors auf die Vertikale und die Figurenaxe. Steht nun die Figurenaxe auf der Vertikalen senkrecht, so sind diese Parallelprojektionen mit den bez. Normalprojektionen des Drehungsvektors, welche wir nach früherem mit $\varrho$ und $r$ zu bezeichnen haben, identisch. Aus $\varrho$ und $r$ berechnen sich aber bei unserem Kugelkreisel die Impulskomponenten $n$ und $N$ durch Multiplikation mit dem Werte des Trägheitsmomentes, welchen wir mit $A$ bezeichnen. Wir haben also in a) und b) für $\nu$ und $\mu$ bez. einzutragen $\frac{n}{A}$ und $\frac{N}{A}$. Infolgedessen beträgt die Gröfse des seitlichen Anstofses $n$, welche zusammen mit dem Eigenimpulse $N$ zu einer regulären Präcession $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ Anlafs giebt:

$$\text{a)}\ n = \frac{AP}{N} \quad \text{bez.} \quad \text{b)}\ n = \pm\infty.$$

Der Fall a), die früher sog. „langsame Präcession“, tritt, da wir oben $P < 0$ und $N > 0$ voraussetzten, für einen seitlichen Anstofs ein, welcher von der Vertikalen gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers wirkt ($n < 0$); im Falle b), der sog. „schnellen Präcession“ ist der Sinn des seitlichen Anstofses unbestimmt ($n = \pm\infty$).

Wir haben uns sodann über den zweiten der oben genannten Spezialfälle, die *Pendelbewegung*, zu unterrichten. Der Kreisel bewegt sich wie ein gewöhnliches Pendel, wenn wir ihm in der Anfangslage weder einen Eigenimpuls noch einen seitlichen Anstofs erteilen ($N = n = 0$), also kurz gesagt, wenn der Impulsvektor anfangs die Länge Null hat. Obwohl diese Aussage von selbst einleuchtend ist, wollen wir sie dennoch im Einzelnen durch unsere Impulsbetrachtungen beweisen.

Wenn der Kreisel bei horizontal gestellter Figurenaxe dem Einflufs der Schwere überlassen wird, so erzeugt diese während des ersten Zeitmomentes $dt$ einen unendlich kleinen Impulsvektor von der Gröfse $P \sin\vartheta\, dt = P\, dt$, welcher die Knotenlinie $OK$ (vgl. Fig. 24) zur Axe hat. Der Kreisel beginnt sich also um diese Axe zu drehen, wobei sich der Winkel $\vartheta$ verkleinert. Die Lage der Knotenlinie wird bei dieser Drehung nicht geändert. Im nächsten Moment wirkt daher der Zusatzimpuls der Schwerwirkung um dieselbe Axe $OK$ und addiert sich mit dem vorhandenen Impulse algebraisch; die Drehgeschwindigkeit des Kreisels um diese Axe wird entsprechend beschleunigt; die Knotenlinie behält ihre ursprüngliche Lage. Durch Wiederholung dieser Betrachtung erkennt man: Der Impuls des Kreisels fällt beständig in die Richtung $OK$; die Bewegung besteht in jedem Augenblicke aus einer Drehung um diese Axe; die Figurenaxe bewegt sich in einer festen

Vertikalebene; die Kurve der Kreiselspitze ist ein vertikal gestellter Kreisbogen. Die Bahngeschwindigkeit der Kreiselspitze berechnet sich dabei durch die Bedingung, daſs die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses jederzeit gleich sein muſs der äuſseren Drehkraft $P \sin \vartheta$ oder, wenn wir uns der Ausdrucksweise des D'Alembertschen Prinzipes bedienen wollen, daſs diese Drehkraft dem bei unserer Bewegung auftretenden Trägheitswiderstande das Gleichgewicht halten muſs.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, daſs die Kreiselspitze nach Überschreitung des höchsten Punktes der Kugel um ebensoviel herabsinkt, wie sie vorher gestiegen ist, d. h. bis zu einem Punkte des Äquators herunterfällt und dann umkehrt. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment auf, wo die Kreiselspitze den höchsten Punkt der Kugel passiert. Würden wir in diesem Momente den Sinn des vorhandenen Impulsvektors und also die Geschwindigkeit sämtlicher Kreiselpunkte umkehren, so würde die Kreiselspitze nach einem allgemeinen Grundsatze der Mechanik ihre bisherige Bahn im umgekehrten Sinne durchlaufen also einen Kreisquadranten beschreiben. Aus dieser Bahn ergiebt sich aber die Bahn, welche die Kreiselspitze bei Fortsetzung ihres ursprünglichen Bewegungssinnes beschreibt durch Spiegelung an der Vertikalebene $OK$, wie aus der Symmetrie des die Bewegung beeinflussenden Kraftsystems hervorgeht. Infolgedessen besteht die Fortsetzung der Bahn wieder aus einem Kreisquadranten, welcher bis zu dem mit dem Ausgangspunkte $A$ diametralen Äquatorpunkte $B$ herabreicht. Da die Kreiselspitze in $B$ mit der Geschwindigkeit Null ankommt, haben wir jetzt genau dieselben Verhältnisse, wie zu Beginn der Bewegung in $A$. Infolgedessen wird die Fortsetzung der Bahnkurve aus dem im umgekehrten Sinne durchlaufenen Halbkreise $AB$ bestehen und so fort. Die Bewegung ist hierdurch in der That als einfache Pendelbewegung charakterisiert.

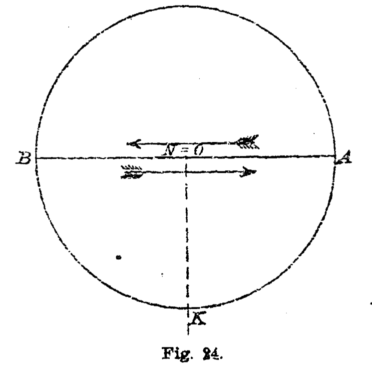


Fig. 24.

Bei der stereographischen Projektion erscheint unsere Bahnkurve (vgl. die nebenstehende Figur) einfach als ein Durchmesser $(AB)$ des Einheitskreises, welcher abwechselnd im Sinne des oberen oder unteren Pfeiles durchlaufen wird.

An diese Figur, welche wie erwähnt durch die Werte $n = N = 0$ charakterisiert ist, knüpfen wir in erster Linie an, um uns allgemeinere Fälle der Bewegung zu veranschaulichen. Zunächst werden wir eine

Serie von Figuren geben, bei welcher der seitliche Anstoſs fortgesetzt gleich Null ist ($n = 0$), während der Eigenimpuls ($N$) successive vermehrt werden soll.

## § 2. Anschauliche Diskussion der zu erwartenden Bewegungsformen; Fortsetzung und Schluſs.

Indem wir jetzt zur wirklichen Ausführung unserer qualitativen Diskussion übergehen, nehmen wir, wie verabredet, zunächst $n = 0$ und setzen überdies in der ersten der zu entwickelnden Figuren (Fig. 25) den Eigenimpuls verhältnismäſsig klein voraus gegen die Änderung, welche die Schwerewirkung in der Länge des Impulsvektors etwa während der Zeiteinheit hervorruft, so daſs die Kontinuität mit der vorhergehenden Figur gewahrt bleibt. Um die resultierende Änderung der Bahnkurve beurteilen zu können, wollen wir vorderhand die Kreiselspitze künstlich in der früheren Bahn mit der früheren Geschwindigkeit entlang führen und gleichzeitig dafür sorgen, daſs der Eigenimpuls $N$ seinen Anfangsbetrag beibehält. Praktisch wäre dieses etwa so zu realisieren, daſs man eine Rinne von der Gestalt und Lage der vorherbeschriebenen Bahnkurve herstellte, in welcher die Kreiselspitze ohne Reibung entlang gleiten könnte.

Bei dieser erzwungenen Bewegung ist das Gleichgewicht zwischen der Schwerkraft und dem Trägheitswiderstande, welcher bei der freien Pendelschwingung $N = 0$ bestand, nicht mehr vorhanden. In der That werden ja nur die Änderungen der Horizontal-Komponente des Impulses durch die Schwerkraft kompensiert, während die Änderungen des Eigenimpulses, welcher, wie wir voraussetzten, seine Länge beibehält, seine Richtung im Raume aber zugleich mit der Figurenaxe wechselt, unausgeglichen bleiben. Infolgedessen ergiebt sich ein Widerstand, welchen wir, da er auf der instantanen Rotationsaxe senkrecht steht, nach § 5 des vorigen Kapitels als Deviationswiderstand bezeichnen können. In unserem Beispiele würde sich derselbe als seitlicher Druck auf die Rinne äuſsern.

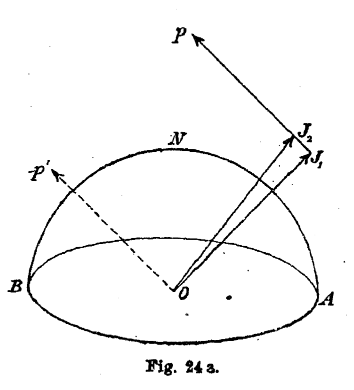


Fig. 24 a.

Der Sinn dieses Druckes ist leicht aus obenstehender Hülfsfigur zu ersehen. Dieselbe stellt den Eigenimpuls in zwei benachbarten Lagen $OJ_1$, $OJ_2$ während der ersten Phase der Bewegung dar, d. h. während die Kreiselspitze auf dem vertikalen Kreise

$ANB$ von $A$ nach $B$ pendelt. Der Sinn der Impulsänderung ist durch den Pfeil $p$ gegeben. Um die Axe dieses oder des parallel durch $O$ gezogenen Pfeiles $p'$ wirkt der Deviationswiderstand, welcher dem Sinne der Impulsänderung entgegengesetzt ist, von $p$ oder $p'$ aus gesehen entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Er sucht also die Kreiselspitze während der ganzen ersten Phase der Bewegung in unserer Figur nach hinten hin abzulenken. Ebenso erkennt man, dafs während der zweiten Bewegungsphase, d. h. während die Kreiselspitze von $B$ nach $A$ pendelt, ein Deviationswiderstand auftritt, welcher die Kreiselspitze in der Figur nach vorne überzudrehen strebt. Allgemeingültig können wir sagen: *die Kreiselspitze sucht infolge des Deviationswiderstandes von ihrer Fortschreitungsrichtung aus gerechnet nach rechts hin abzuweichen;* es würde also im Sinne der Bewegung gesprochen die rechte Wand der Rinne einen gewissen Druck auszuhalten haben. Die Gröfse dieses Druckes, welche dem nicht kompensierten Teil der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses gleich ist, wird, wie gleichfalls aus unserer letzten Figur hervorgeht, der Gröfse des Eigenimpulses direkt proportional.

Lassen wir nun die Figurenaxe frei, indem wir die Führung der Kreiselspitze aufheben. Der Erfolg ist dieser: *Die Kreiselspitze wird dem Deviationswiderstande entsprechend von der Bahnkurve aus nach rechts hin ausweichen.* Die gerade Linie, durch welche wir die Pendelschwingung in Fig. 24 darstellten, wird bei Benutzung der früheren graphischen Darstellungsweise in einen Bogen übergehen, welcher nach derjenigen Seite hin geöffnet ist, nach welcher die ablenkende Kraft des Deviationswiderstandes wirkt. Da wir den Eigenimpuls einstweilen verhältnismäfsig klein voraussetzten, wird auch die Abweichung unseres Bogens von der geraden Linie verhältnismäfsig gering sein (vgl. Fig. 25).

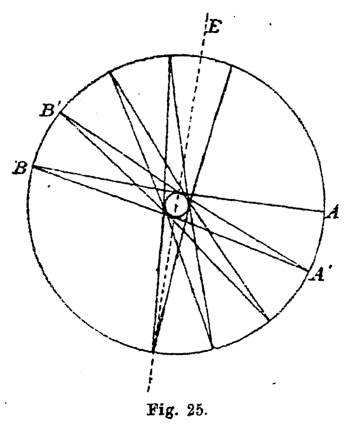


Fig. 25.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Kreiselspitze von ihrer Anfangslage $A$ aus im Raume und daher auch in unserem stereographischen Bilde senkrecht gegen den Äquator fortschreiten mufs. Wir brauchen uns zu dem Zwecke nur die ungefähre Lage des Impulsvektors klar zu machen. Anfangs liegt der Impulsvektor, weil wir $n = 0$ voraussetzten, horizontal. Die folgenden Lagen unseres Vektors ergeben sich aus dieser Anfangslage, indem wir successive den Zusatzimpuls der Schwere geometrisch hinzufügen. Die Axe dieses Zusatzimpulses liegt aber gleichfalls beständig horizontal. Also mufs der

Impulsvektor während der ganzen Dauer der Bewegung eine horizontale Axe haben (im Gegensatz zu der in Fig. 24a dargestellten erzwungenen Bewegung, wo sich der Impulsvektor allmählich aufrichtete). In dieser Betrachtung liegt, nebenbei bemerkt, bereits der Beweis unserer obigen Behauptung, dafs die Impulskomponente $n$ ihren anfänglichen Wert $n = 0$ dauernd beibehält, worauf wir im nächsten Paragraphen unter allgemeineren Voraussetzungen zurückkommen werden. Gleichzeitig mit der Impulsaxe liegt aber bei unserem Kugelkreisel auch die Rotationsaxe horizontal. Da nun die Kreiselspitze in jedem Momente senkrecht gegen die Richtung der Rotationsaxe fortschreitet, so wird sich diese von ihrer auf dem Äquator angenommenen Anfangslage aus in vertikaler Richtung fortbewegen müssen. Die Bahnkurve der Kreiselspitze steht also zu Beginn der Bewegung senkrecht auf dem Äquator, wie behauptet wurde. Übrigens ist die Fortschreitungsgeschwindigkeit im ersten Momente Null, weil die Rotationsaxe anfangs durch die Kreiselspitze selbst hindurchgeht.

Um den Gesamtverlauf unserer Bahnkurve zu überblicken, haben wir uns nur noch die Symmetrieverhältnisse derselben zu überlegen. Fassen wir zu dem Zwecke denjenigen Moment ins Auge, wo die Kreiselspitze auf der Kugel ihre höchste Lage ($H$) erreicht hat. Nach unserem Kontinuitätsprinzipe wird dieser höchste Punkt von dem höchsten Punkte, den die Kreiselspitze bei der Pendelbewegung erreicht, dem Nordpole, nur wenig abweichen. Das stereographische Bild derselben wird also nicht weit vom Mittelpunkte der Figur entfernt sein. Durch $O$ und $H$ legen wir die Vertikalebene $E$ hindurch, deren Durchschnitt mit der Äquatorebene uns die Lage des instantanen Impulsvektors angiebt. Darauf argumentieren wir ebenso wie oben bei der einfachen Pendelbewegung:

Wenn wir in dem betrachteten Momente den Sinn des Impulsvektors umkehren würden, so würde die Kreiselspitze ihre bisherige Bahn $AH$ in umgekehrter Richtung durchlaufen und in $A$ mit der Geschwindigkeit Null ankommen. Gleichzeitig berücksichtigen wir, dafs in je zwei hinsichtlich der Ebene $E$ symmetrischen Lagen des Kreisels das Drehmoment der Schwere dasselbe ist. Hieraus ist zu schliefsen, dafs die Kreiselspitze bei Fortsetzung der ursprünglichen Bewegungsrichtung von $H$ aus den zu $AH$ hinsichtlich der Vertikalebene $E$ symmetrischen Bogen $HB$ beschreiben wird und dafs sie in $B$ mit der Geschwindigkeit 0 ankommt. Der Bogen $AB$ unserer Bahnkurve besteht daher aus zwei spiegelbildlich gleichen Hälften.

In $B$ angekommen befindet sich die Kreiselspitze genau unter den gleichen Bedingungen wie in $A$. Infolgedessen mufs der weitere Ver-

lauf der Bahnkurve derselbe sein, wie zu Anfang der Bewegung. Es setzt sich also im Punkte $B$ ein neuer Bogen $BA'$ an, welcher seinerseits aus zwei symmetrischen Hälften besteht und welcher dem Bogen $AB$ kongruent ist. Aus letzterem kann er durch eine Drehung um die Vertikale erzeugt werden. Bei $B$ entsteht auf solche Weise ersichtlich eine Spitze. Für den Punkt $A'$ gilt darauf dieselbe Betrachtung, wie für $B$. Auch in $A'$ bildet die Bahnkurve eine Spitze und setzt sich von hier aus mit einem dem Bogen $AB$ kongruenten Bogen $A'B'$ fort. Alle diese Bögen $AB$, $BA'$, $A'B'$ ... werden wegen ihrer kongruenten Gestalt und ähnlichen Lage je in ihrem bezüglichen höchsten Punkte $H$ einen gewissen Parallelkreis auf der Kugel berühren, welcher in unserem Falle den Nordpol enge umschliefst. Zusammenfassend können wir daraufhin den Verlauf unserer Bahnkurve folgendermafsen beschreiben:

*Die Bahnkurve der Kreiselspitze stellt in unserem Falle eine Zickzackkurve vor, welche um die Vertikale entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herumläuft, ohne sich im allgemeinen zu schliefsen; sie besteht aus einer Serie kongruenter Bögen oder, wenn wir wollen, aus einer Serie von Halbbögen, welche unter einander abwechselnd symmetrisch gleich und kongruent sind. Die Kurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, nämlich in unserem Falle zwischen dem Äquator und einem Parallelkreise in der Nähe des Nordpoles. Letzteren Kreis berührt unsere Kurve, wo sie ihn trifft; auf ersterem sitzt sie mit Spitzen auf.*

Im Anschlufs hieran noch ein Wort über die Vorzüge der von uns gewählten Projektionsmethode. Hätten wir statt der stereographischen die orthographische Projektion benutzt, so würden, wie die in orthographischer Projektion hergestellte Fig. 25a zeigt, statt der Spitzen scheinbar regulär verlaufende Kurvenbögen auftreten. In der That bietet jede in eine Spitze auslaufende Raumkurve, aus der Tangentenrichtung der Spitze betrachtet, einen Anblick dar, der dem Auge das Vorhandensein einer Singularität in keiner Weise verrät. Statt der im Original vorhandenen Spitze haben wir im Bilde nur mehr eine sog. „maskierte Singularität“.

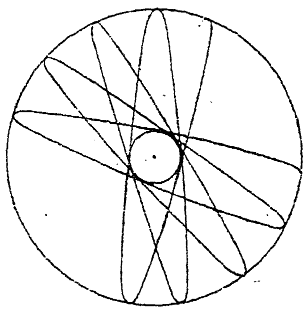


Fig. 25a.

Hiernach ist klar, dafs wir bei Benutzung der orthographischen Projektion das Charakteristische der Bahnkurve verwischen würden. Wir werden daher auch die folgenden Figuren stets in stereographischer Projektion herstellen.

Wir wollen nun, wie bereits in Aussicht genommen, die Gröfse des Eigenimpulses successive wachsen lassen und gleichzeitig den seitlichen Anstofs wie bisher gleich Null nehmen. Machen wir wiederum das orientierende Experiment von pag. 204, indem wir die Kreiselspitze auf der Bahn der Pendelschwingung entlang führen, so werden wir hierbei einen stärkeren Deviationswiderstand wie früher konstatieren, welcher die Figurenaxe von der Bewegungsrichtung nach rechts abzulenken strebt. In der That ergab sich aus der Figur 24a, dafs dieser Widerstand der Gröfse des Eigenimpulses proportional ist. Gehen wir daher von der erzwungenen Pendelbewegung zu der freien Kreiselbewegung über, so wird die Krümmung der einzelnen Bögen, aus denen sich die Bahnkurve zusammensetzt, um so gröfser, ihre Spannweite um so geringer werden, je gröfser wir den Wert des Eigenimpulses $N$ bemessen. Gleichzeitig wird sich der höchste Punkt des einzelnen Bogens von dem Nordpole successive entfernen; der begrenzende Parallelkreis, welcher die sämtlichen höchsten Punkte der Bögen enthält, mufs sich also mit wachsendem $N$ erweitern.

Die folgenden Figuren bringen diese Verhältnisse in drei Schritten zum Ausdrucke. In Figur 26 ist der Eigenimpuls circa dreimal, in

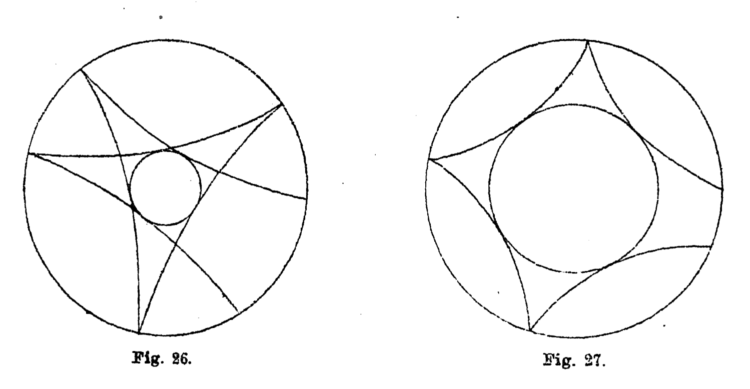


Fig. 26. Fig. 27.

Figur 27 neunmal so grofs gewählt, wie in Figur 25. Die Figur 28 stellt den Grenzfall eines sehr grofsen $N$ dar. Während die Figuren 26 und 27 den Zusammenhang mit der Figur der Pendelbewegung noch deutlich erkennen lassen, zeigt Figur 28 eine Bahnkurve, die von einem kontinuierlich durchlaufenen Kreise nur noch sozusagen mikroskopisch verschieden ist. Sie hat mit der Figur der Pendelbewegung nur noch geringe Ähnlichkeit, eher scheint sie bei ungenauem Hinsehen mit dem zweiten der vorangestellten Spezialfälle, der regulären Präcession, übereinzustimmen. Diese Übereinstimmung betrifft aber, wie wir betonen müssen, nur den *Ort* der Kreiselspitze, nicht

ihre *Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung.* Während bei der regulären Präcession die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Kreiselspitze längs des ganzen Kreises konstant ist, variiert sie in unserem Falle innerhalb sehr kurzer Zeitintervalle fortgesetzt zwischen dem Werte Null, der auf dem Äquator statthat, und einem maximalen Werte, der im Berührungspunkt mit dem zweiten begrenzenden Parallelkreise erreicht wird. Wir werden diese höchst bemerkenswerte Bewegungsform passend eine *pseudoreguläre Präcession* nennen können.

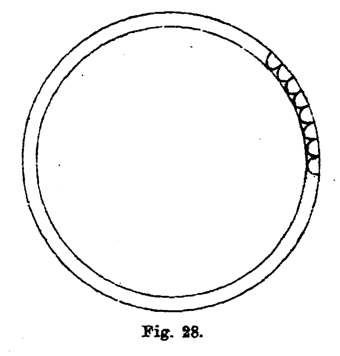


Fig. 28.

Im Experimente ist dieser letzte Fall sogar die Regel, da die Vorrichtungen zum Aufziehen des Kreisels meist einen gegenüber der Schwerewirkung sehr starken Eigenimpuls erzeugen. Untersucht man daher die Kreiselbewegung nur experimentell, so kommt man leicht zu der paradoxen Auffassung, dafs die Kreiselspitze sich von Anfang an senkrecht gegen die Richtung der wirkenden Kraft, der Gravitation, bewegt, einer Auffassung, welche den Prinzipien der Mechanik natürlich direkt zuwiderläuft, welche aber nichtsdestoweniger in der Litteratur häufig vertreten wird.*) Wir betonen deshalb ausdrücklich: *Unter den bisher vorausgesetzten Anfangsbedingungen* ($n = 0$) *ist unsere Bahnkurve allemal eine Spitzenkurve; eine wirkliche reguläre Präcession ist durchaus unmöglich.*

Für die Anstellung der Experimente entnehmen wir unserer letzten Figur noch die Regel, dafs wir den Eigenimpuls des Kreisels möglichst gering wählen müssen, wenn wir überhaupt eine im Einzelnen kontrollierbare Bahnkurve beobachten wollen; es empfiehlt sich daher, den Kreisel statt durch die Schnur mit der Hand in Rotation zu versetzen, wobei die Stärke des Impulses bequem reguliert werden kann. —

Während wir bisher den Eigenimpuls des Kreisels schrittweise wachsen liefsen, den seitlichen Anstofs aber beständig gleich Null annahmen, werden wir jetzt umgekehrt den seitlichen Anstofs variieren und den Eigenimpuls festhalten. Dabei entwickelt sich aus jeder der bisherigen eine ganze Serie neuer Figuren.

So entsteht z. B. aus der gewöhnlichen Pendelbewegung in Fig. 24 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstofses jedesmal ein Fall der *Bewegung des sog. sphärischen Pendels*, bei welcher sich die Kreiselspitze ebenso verhält, wie ein schwerer Massenpunkt, welcher am Ende eines

*) Vgl. unsere Kritik der populären Kreisellitteratur im folgenden Kapitel (§ 3).

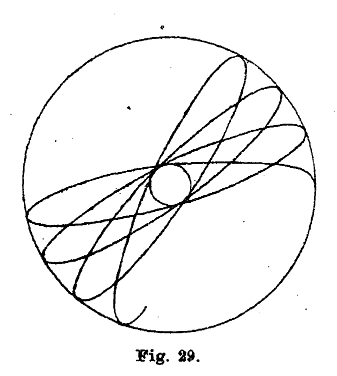
um $O$ beweglichen, starren und masselosen Stabes befestigt ist und welchem in seiner Anfangslage ein horizontal gerichteter Anstofs erteilt wird. Wir brauchen uns bei dieser bekannten und leicht zu beobachtenden Bewegung hier nicht aufzuhalten. Wir erwähnen nur des Folgenden wegen, dafs sich die Rückkehrpunkte (Spitzen), welche in unserer Figur bei der gewöhnlichen Pendelbewegung am Äquator auftraten, in abgeflachte Bögen auflösen, welche den Äquator berühren und dafs sich die Spannweite der Bögen, welche ursprünglich zwei Rechte betrug, etwas erweitert In der That mufs die Kreiselspitze, da sie in ihrer Anfangslage und ebenso in jeder folgenden Lage, wo sie den Äquator erreicht, dem seitlichen Anstofse $n$ ausgesetzt ist, momentan in Richtung des Äquators fortschreiten und zwar je nach dem Vorzeichen von $n$, von der Vertikalen aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne.

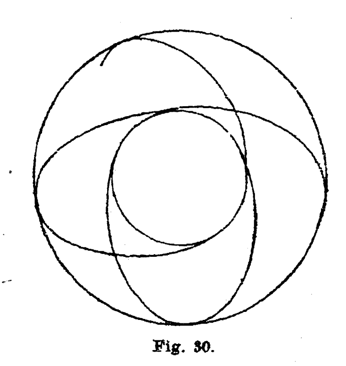
Gehen wir andrerseits von der pseudoregulären Präcession in Fig. 28 aus, so entsteht aus dieser durch Hinzufügung irgend eines seitlichen Anstofses eine Bewegung, welche, im Groben betrachtet, von der früheren nicht sehr verschieden ist und welche (in erweitertem Sinne) abermals als pseudoreguläre Präcession bezeichnet werden kann. Hierbei werden sich unsere mikroskopischen Spitzenbögen in kleine Schleifen bez. in abgeflachte Bögen auflösen, je nachdem wir den anfänglichen horizontalen Anstofs im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne um die Vertikale wirken lassen. Die Beobachtung giebt von dieser Modifikation der Bahnkurve natürlich keine deutliche Rechenschaft.

Wesentlich neue Typen werden sich dagegen aus den Figuren 25—27 ergeben. Speziell wollen wir den Fall eines verhältnismäfsig geringen Eigenimpulses näher betrachten, also diejenige Figurenserie entwickeln, die aus 25 durch Variation von $n$ entsteht. Zunächst lassen wir $n$ von dem Werte Null in Fig. 25 nach dem Negativen abnehmen, erteilen also der Kreiselspitze in der Anfangslage einen Anstofs, der sie entgegen dem Sinne des Uhrzeigers umzutreiben sucht.

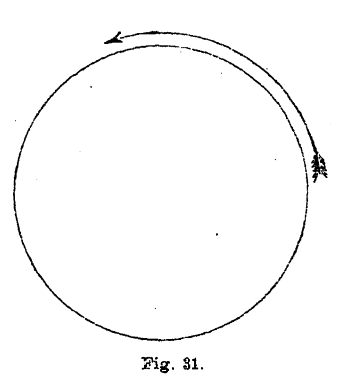
Wir erinnern daran, dafs sich bei einem gewissen, oben berechneten negativen Werte $n = \frac{AP}{N}$ die reguläre Präcession einstellen mufs. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird in diesem Falle einfach der entgegen dem Uhrzeigersinne durchlaufene Äquator (vgl. unten Fig. 31). Der Vergleich der Figuren 25 und 31 wird uns nun einen Anhalt liefern, um die Gestalt der Bahnkurve für die zwischenliegenden Werte von $n$ $\left[0 > n > \frac{AP}{N}\right]$ beurteilen zu können. Wir dürfen nämlich auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs diese Bahnkurven

sich stetig zwischen die Figuren 25 und 31 einordnen müssen. Auf dasselbe Prinzip bez. auf unsere früheren Überlegungen gestützt, werden wir ferner voraussetzen, dafs die allgemeinen Symmetrieverhältnisse der Bahnkurve 25, die Kongruenz der Teilbögen u. s. w., bei Hinzufügung eines seitlichen Anstofses erhalten bleiben.


Fig. 29.


Fig. 30.

In Figur 25 waren nun die einzelnen kongruenten Kurvenbögen zwischen dem Äquator und einem kleineren, in der Nähe des Nordpols befindlichen Parallelkreise enthalten; in Figur 31, können wir sagen, ist dieser zweite Parallelkreis mit dem Äquator zusammengefallen, da die Bahnkurve selbst in diesen übergegangen ist. Wir schliefsen hieraus, dafs für zwischenliegende Werte von $n$ jener zweite begrenzende Parallelkreis stetig anwachsen wird. Infolgedessen werden sich die Teilbögen der Bahnkurve nach dem Äquator hin ausbauchen und gleichzeitig bei abnehmendem $n$ successive in die Länge strecken müssen. Überdies ist klar, dafs, ebenso wie beim Übergange vom gewöhnlichen zum sphärischen Pendel, die Spitzen der Figur 25 sich in abgeflachte Bögen auflösen werden, da ja, überall wo die Kreiselspitze den Äquator erreicht, der tangential zum Äquator gerichtete seitliche Anstofs $n$ wirksam ist.


Fig. 31.

Wir zeichnen daraufhin die drei Figuren 29, 30, 31, von denen die erste einem kleinen Werte des seitlichen Anstofses entspricht, so dafs die Kontinuität mit Figur 25 augenfällig ist, (in der Figur wurde speziell $n = -N$ gewählt), die zweite einem gröfseren Werte von $n$ (und zwar in der Figur einem 5-mal so grofsen Werte wie im vorhergehenden Falle); die dritte Figur ist der Spezialfall der langsamen regulären

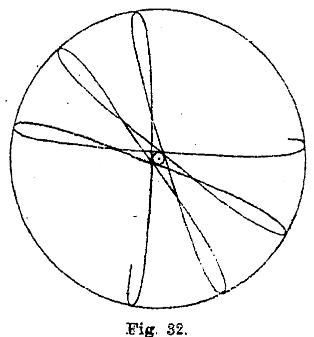
Präcession $n = \frac{AP}{N}$; (unter den in der Zeichnung zu Grunde gelegten Verhältnissen tritt dieser Fall wieder für ein 5-mal so großes $n$ ein, wie der Fall der Figur 30).

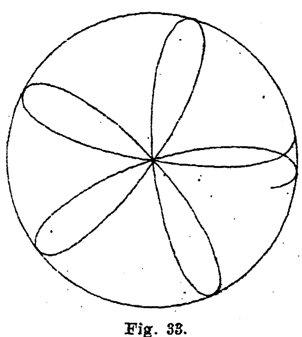
Den Gesamtcharakter der Bahnkurven unter den vorliegenden Bedingungen eines konstanten $N$ und eines von Null bis $\frac{AP}{N}$ abnehmenden Wertes von $n$ können wir daraufhin folgendermaßen schildern:

*Die Bahnkurve läuft fortgesetzt entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herum, ohne sich im allgemeinen zu schließen; sie besteht allemal aus einer Serie unter sich symmetrisch gleicher oder kongruenter Halbbögen, deren Spannweite bei abnehmendem $n$ successive wächst und die sich mehr und mehr dem Äquator anschmiegen. Die Bahnkurve ist ganz innerhalb zweier Parallelkreise enthalten, welche sie überall, wo sie sie trifft, berührt, nämlich des Äquators einerseits und eines mit abnehmendem $n$ sich stetig vergrößernden Parallelkreises andrerseits.*

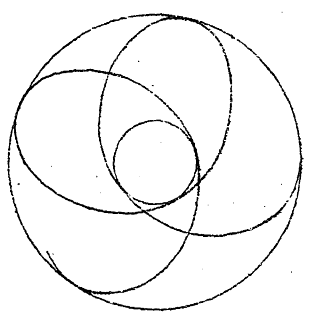
Wir gehen nun abermals zu Figur 25 zurück und lassen jetzt $n$ unter Festhaltung von $N$ im positiven Sinne wachsen; wir erteilen also der Kreiselspitze im Anfangszustande einen seitlichen Anstoß im Sinne des Uhrzeigers. Der Erfolg wird dabei gewissermaßen der umgekehrte sein, wie vorher. Während sich der zweite begrenzende Parallelkreis bei von Null aus abnehmendem $n$, wie wir sahen, erweiterte, wird er sich bei wachsendem $n$ zunächst verengern; während die Spannweite des einzelnen Teilbogens früher zunahm, nimmt sie jetzt zunächst ab. Im übrigen bleibt der Gesamtcharakter der Bewegung ein ähnlicher wie in Figur 25; insbesondere muß die Bahnkurve bei genügend kleinem positiven $n$ gleichfalls im Ganzen betrachtet entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Vertikale herumlaufen. Andrerseits wird sich aber die Kreiselspitze in der Anfangslage und ebenso in jedem späteren Momente, wo sie den Äquator erreicht, wegen des positiven Vorzeichens von $n$ in der Richtung des Äquators und zwar im Sinne des Uhrzeigers bewegen. Wir schließen hieraus, daß es auf jedem Teilbogen Punkte geben muß, wo die Kreiselspitze, in radialer Richtung fortschreitend, ihren Umlaufungssinn der Vertikalen ändert und erkennen so die Notwendigkeit des Auftretens von Schleifen. Die Spitzen der Figur 25, welche in Figur 29 in abgeflachte Bögen übergingen, lösen sich also jetzt in Schleifen auf, wie dieses ja in der Geometrie eine häufige Erscheinung ist. Alle diese Bemerkungen werden durch die folgende Figur 32 bestätigt, welche einem sehr kleinen positiven Werte von $n$ entspricht (wir haben $n = 0{,}4\,N$ gewählt).

Wenn wir $n$ weiter wachsen lassen, kommen wir bald zu einem Werte, wo sich der innere Parallelkreis auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat (vgl. Fig. 33). Nebenbei bemerkt entspricht dieser Fall, wie wir später sehen werden, dem Werte $n = N$. Die Punkte, in denen sich bei der vorigen Figur der Umlaufungssinn der Vertikalen änderte, sind jetzt in den Nordpol der Kugel zusammengerückt.


Fig. 32.


Fig. 33.

Um die Gestaltung der Bahnkurven bei fortgesetzt wachsendem $n$ zu überblicken, ziehen wir endlich den Grenzfall $n = \infty$ heran, bei welchem nach pag. 202 die Bewegung wieder eine reguläre Präcession wird. Während sich also im Falle $n = N$ der innere Parallelkreis auf einen Punkt reduzierte, fällt er im Falle $n = \infty$ mit dem äufsern Begrenzungskreise zusammen. Wir werden abermals auf Grund unseres Kontinuitätsprinzipes vermuten, dafs der fragliche Parallelkreis bei wachsenden Werten von $n$ $(N < n < \infty)$ sich stetig erweitern wird. Während er aber vorher von der Bahnkurve von aufsen berührt wurde, wird er jetzt von dieser umfafst. Die Kurve läuft jetzt durchweg im Sinne des Uhrzeigers und zwar bei wachsendem $n$ mit wachsender Geschwindigkeit um die Vertikale; sie wird durch den sich erweiternden inneren


Fig. 34.

Parallelkreis immer mehr an den Äquator herangedrängt; die Spannweite der kongruenten Bögen, aus denen sie sich zusammensetzt, wird gröfser und gröfser. Ein Beispiel für diese Gestaltung der Bahnkurve liefert Figur 34, in welcher nebenbei bemerkt $n = 5N$ genommen ist. Der Grenzfall $n = \infty$, die schnelle reguläre Präcession, möge schematisch durch die Figur 35 angedeutet werden. Dem doppelten

Sinne des Durchlaufungspfeiles entsprechend können wir die letzte Figur ebensowohl auffassen als Grenzfall der Bahnkurve bei unendlich wachsendem positiven, wie bei unendlich abnehmendem negativen $n$.

Wollen wir das Verhalten der Bahnkurven bei wachsendem positiven $n$ zusammenfassend schildern, so können wir etwa folgendermafsen sagen:

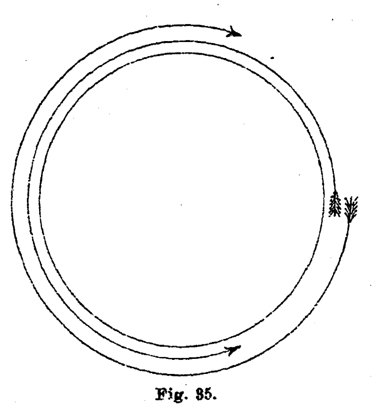


Fig. 35.

*Bei positivem $n$ verläuft die Bahnkurve in der Nähe des Äquators allemal im Sinne des Uhrzeigers, kehrt aber bei nicht zu grofsen Werten von $n$ innerhalb jedes der kongruenten Teilbögen, aus denen sie sich zusammensetzt, zweimal ihren Umlaufungssinn um. Charakteristisch für diese Bahnkurven ist das Auftreten von Schleifen. Der innere Begrenzungskreis wird anfangs von der Bahnkurve ausgeschlossen, nachdem aber der höchste Punkt der Kugel einmal überschritten ist, von aufsen umfafst. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt gleichzeitig von da ab immer mehr zu und wird im Grenzfalle $n = \infty$ unendlich grofs.*

Es erübrigt nur noch den Übergang zu suchen von der langsamen Präcession $n = \frac{AP}{N}$ in Figur 31 zu der schnellen $n = +\infty$ in Figur 35. Wir sahen, dafs sich der bewegliche Parallelkreis mit abnehmendem $n > \frac{AP}{N}$ dem Äquator successive nähert, um im Falle der regulären Präcession mit diesem zusammenzufallen. Bei weiter abnehmendem $n$ wird er zunächst seine Bewegungsrichtung beibehalten, also sich von dem Äquator wieder entfernen und auf die südliche Hälfte der Einheitskugel bez. im stereographischen Bilde in das Äufsere des Einheitskreises übergehen. Dementsprechend würde im Bilde fortan der Äquator der innere, der bewegliche Parallelkreis der äufsere Begrenzungskreis werden. Indessen hält die genannte Bewegungstendenz nicht lange vor; es giebt nämlich für unseren beweglichen Parallelkreis eine tiefste (bez. im Bilde eine äufserste) Lage. Nachdem diese für ein gewisses $n$ erreicht ist, strebt der Parallelkreis bei weiter abnehmendem $n$ wieder dem Äquator zu, mit dem er ja im Falle $n = -\infty$ zusammenfallen mufs. Aber selbst in der genannten extremen Lage liegt unser Parallelkreis unter den in unseren Figuren vorausgesetzten Verhältnissen dem Äquator so nahe, dafs er mit dem Auge überhaupt nicht von jenem zu unterscheiden sein würde. Dementsprechend wird auch die Bahn-

kurve der Kreiselspitze dem Äquator dauernd aufserordentlich nahe bleiben, so dafs wir auf ihre graphische Wiedergabe verzichten müssen. Im stereographischen Bilde würde sie den Äquator in nahezu kreisförmigen Windungen umschliefsen, welche den grofsen negativen Werten von $n$ entsprechend entgegen dem Sinne des Uhrzeigers mit grofser Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Der Kreis der Möglichkeiten, welche sich bei festgehaltenem $N$ und variabelm $n$ darbieten, hat sich hiermit geschlossen.

Wir könnten nun, ähnlich wie wir bisher an die Figur 25 anknüpften, aus den Figuren 26 und 27 durch Hinzufügung eines seitlichen Anstofses entsprechende Figurenserien entwickeln. Indessen müssen wir uns damit begnügen, später (vgl. § 7) auf die hierbei auftretenden Abweichungen von der vorhergehenden Serie hinzuweisen.

Zum Schlusse wollen wir in einem Schema, in welchem $n$ als Abscisse, $N$ als Ordinate aufgetragen wird, die vorstehend verzeichneten Figuren durch Eintragung ihrer Nummer lokalisieren.

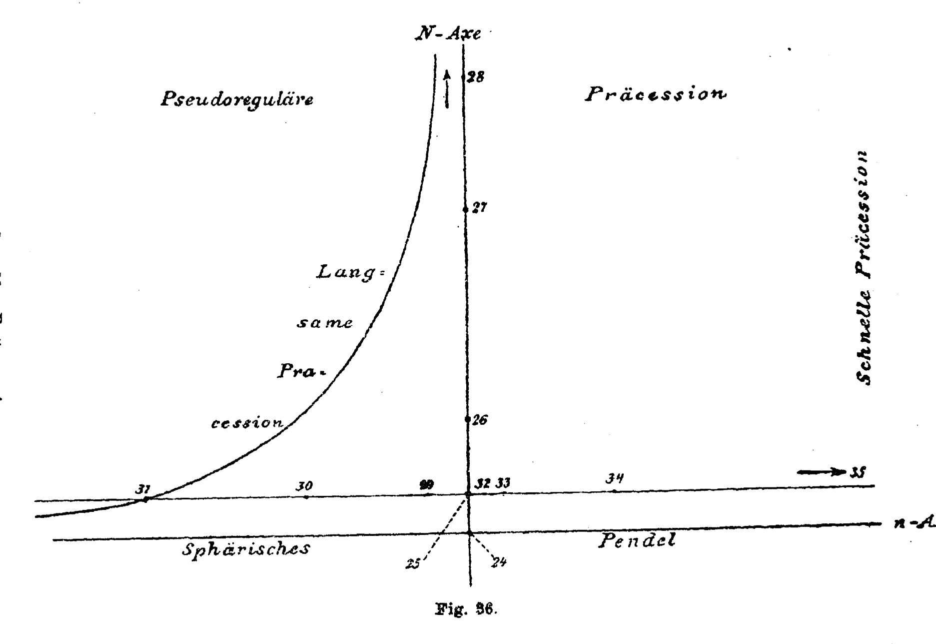



Fig. 36.

Die Ordinatenaxe unseres Schemas enthält die Figuren 24 bis 28; die Abscissenaxe entspricht den sämtlichen Fällen der gewöhnlichen oder sphärischen Pendelbewegung. Die Figuren 29 bis 35 liegen auf einer der Abscissenaxe parallelen und wenig von ihr entfernten Geraden. Gehen wir parallel der Ordinatenaxe ins Unendliche, so kommen wir

allemal in das Gebiet der pseudoregulären Präcession; schreiten wir in der Richtung der Abscissenaxe ins Unendliche fort, so finden wir den Fall der schnellen regulären Präcession vor. Die langsame reguläre Präcession bestimmt, wie aus der Formel $nN = PA$ hervorgeht, eine gleichseitige Hyperbel von der eingezeichneten Lage. Die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche durch die Gesamtheit aller Bahnkurven bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe und bei positivem Betrage des Eigenimpulses gebildet wird, findet so in unserem Schema eine anschauliche Darstellung.

## § 3. Quantitative Behandlung der allgemeinen Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels. Ausführung der erforderlichen sechs Integrationen.

Wir gehen nun von der angenäherten qualitativen Diskussion zu einer genauen quantitativen Behandlung über, wobei wir die Beschränkung auf den Kugelkreisel zunächst fallen lassen und einen beliebigen symmetrischen Kreisel von den Trägheitsmomenten $A$ und $C$ betrachten. Es handelt sich hierbei in letzter Linie darum, das System von Differentialgleichungen, welches die Bewegung des Kreisels reguliert, zu integrieren.

Zunächst stellen wir einige Impulsbetrachtungen von geometrischem Charakter an, welche die Ausführung der gedachten Integrationen teilweise zu ersetzen vermögen. Dabei stützen wir uns wesentlich auf den Fundamentalsatz IIa von pag. 115, nach welchem die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft, d. h. in unserem Falle gleich dem Drehmoment der Schwerkraft ist. Wir suchen vor allem, ähnlich wie pag. 123 beim kräftefreien Kreisel, Näheres über die Gestalt der beiden „Impulskurven" auszusagen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors relativ gegen den Raum bez. relativ gegen den Körper beschreibt.

Erstens bemerken wir, dafs das Drehmoment der Schwere, welches ja seiner Axe nach in die Knotenlinie fällt, beständig senkrecht auf der Vertikalen steht. Nach unserem Impulssatze schreitet also auch der Endpunkt des Impulses im Raume beständig senkrecht gegen die Vertikale vorwärts. Wir sehen hieraus:

*Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Raum in einer horizontalen Ebene; unsere erste Impulskurve ist also eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Vertikale, d. h. die früher als „seitlicher Anstofs" bezeichnete Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.*

Nennen wir die Komponenten des Impulses im $xyz$-System (die Koordinaten seines Endpunktes), wie pag. 200 verabredet, $l, m, n$, so haben wir hiernach:

(1) $$n = \text{const.}$$

Dieses Resultat wurde schon im vorigen Paragraphen erwähnt und in einem speziellen Falle, ähnlich wie soeben geschehen, begründet.

Zweitens fassen wir die Kurve ins Auge, welche der Endpunkt des Impulses relativ gegen den Kreisel beschreibt. Dabei werden wir statt von dem Impulssatze IIa, welcher die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses im Raume bestimmt, von dem Impulssatze IIb von pag. 145 ausgehen, durch welchen die relativen Änderungen des Impulses gegen den Kreisel festgelegt wurden. Nach diesem letzten Satze ist die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses relativ gegen den Kreisel nach Richtung und Gröfse gleich der von den äufseren Kräften herrührenden Drehkraft vermehrt um die sogenannte centrifugale Drehkraft. Letztere wurde l. c. gleich gefunden dem vektoriellen Produkt aus Impuls- und Rotationsvektor; ihre Axe steht mithin senkrecht auf diesen beiden Vektoren und also, da beim symmetrischen Kreisel diese beiden Vektoren mit der Figurenaxe in einer Ebene liegen, auch senkrecht auf der Figurenaxe. Da überdies auch die Drehkraft der Schwere auf der Figurenaxe senkrecht steht, so sehen wir, dafs der Impuls-Endpunkt im Kreisel beständig senkrecht gegen die Figurenaxe fortschreiten mufs. Wir haben also den Satz:

*Der Endpunkt des Impulses bewegt sich relativ gegen den Kreisel in einer der Äquatorebene parallelen Ebene; auch unsere zweite Impulskurve ist eine ebene Kurve; die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe, d. h. die oben als Eigenimpuls eingeführte Gröfse, hat eine unveränderliche Länge.*

Bezeichnen wir die Impulskomponenten im $XYZ$-System, wie früher, mit $L, M, N$, so gilt hiernach die Gleichung:

(2) $$N = \text{const.}$$

Wir haben damit ein ebenfalls schon im vorigen Paragraphen erwähntes Resultat allgemein abgeleitet.

Neben den Impulskurven können wir diejenigen Kurven betrachten, welche der Endpunkt des Rotationsvektors relativ gegen den Raum und gegen den Kreisel beschreibt, d. h. die *Herpolhodie-* und die *Polhodiekurve.* Von diesen zeigt aber nur die Polhodiekurve ein entsprechend einfaches Verhalten, wie die Impulskurven. *In der That liegt die Polhodiekurve in einer zur Figurenaxe senkrechten Ebene;* ihre Punkte haben von der Äquatorebene den festen Abstand.

$$r = \frac{N}{C}.$$

Versuchen wir dagegen den entsprechenden Übergang von unserer ersten Impulskurve zur Herpolhodiekurve zu machen, welcher, wie wir wissen, in einer Deformation nach den Axen $X$, $Y$, $Z$ besteht, so kommen wir wegen der veränderlichen räumlichen Lage dieser Axen zu keinem so einfachen Resultat; *die Herpolhodiekurve ist* (von dem Falle des Kugelkreisels abgesehen) *keine ebene, sondern*, wie wir demnächst zeigen werden, *im allgemeinen eine sphärische Kurve.*

Diese Bemerkung kann abermals dazu dienen, die Vorzüge, welche in kinetischer Hinsicht der Impulsvektor vor dem Rotationsvektor darbietet, ins rechte Licht zu stellen. Es führt offenbar zu Unzuträglichkeiten, wenn man den kinematisch definierten Rotationsvektor auch in kinetischen Fragen voranstellen will. Vielmehr ist hier der Impulsvektor das einfachste, die Bewegung regulierende Element.

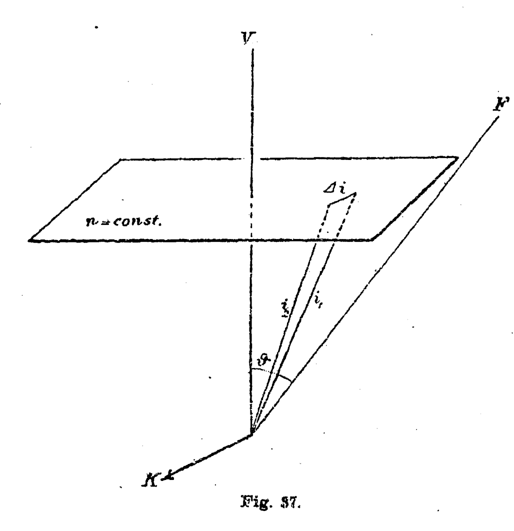


Fig. 57.

Während wir unsere bisherigen Schlüsse aus der Richtung der Impulsänderung gezogen haben, wollen wir nun auch ihre Gröfse betrachten. Wir werden so zu einer weiteren Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung geführt werden.

Es handle sich um zwei benachbarte Lagen $i_1$ und $i_2$ des Impulsvektors, welche dieser am Anfang und am Ende des Zeitintervalles $\Delta t$ inne hat. Die Endpunkte von $i_1$ und $i_2$ geben eine Verbindungslinie $\Delta i$, welche nach unserem Impulssatze der Knotenlinie $K$ parallel ist und bei hinreichend kleinem $\Delta t$ die Länge hat

(a) $$|\Delta i| = P \sin \vartheta\, \Delta t.$$

Gleichzeitig wird nach dem Pythagoräischen Lehrsatz (vgl. die Figur)

(b) $$\begin{aligned} |i_2|^2 - |i_1|^2 &= |\Delta i|^2 - 2|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, \Delta i) \\ &= |\Delta i|^2 + 2|i_1|\,|\Delta i| \cos(i_1, K). \end{aligned}$$

Nun bedeutet $|i_1| \cos(i_1, K)$ die Projektion des Impulsvektors auf die Knotenlinie, welche bis auf den Faktor $A$ mit der Projektion des Drehungsvektors auf diese Gerade übereinstimmt. Eine Drehung um die Knotenlinie bringt aber in der Zeit $\Delta t$ eine Änderung des

Winkels $\vartheta$ hervor von solchem Betrage, dafs $\Delta\vartheta : \Delta t$ gleich der Gröfse der genannten Drehung wird. Wir haben also

$$|i_1| \cos(i_1, K) = A \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

und wegen (a)

(c) $$|\Delta i|\,|i_1| \cos(i_1, K) = AP \sin\vartheta\,\Delta\vartheta.$$

Gehen wir in Gleichung (b) zur Grenze $\Delta t = 0$ über, so fällt das Glied zweiter Ordnung $|\Delta i|^2$ fort und wir erhalten mit Rücksicht auf (c)

$$d(|i|^2) = 2AP \sin\vartheta\, d\vartheta = -d(2AP\cos\vartheta).$$

*Mithin behält der Ausdruck*

$$|i|^2 + 2AP\cos\vartheta$$

*bei der Bewegung seine ursprüngliche Gröfse bei.* Bezeichnen wir diese feste Gröfse mit $k$, so haben wir:

(3) $$|i|^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Diese Beziehung hätten wir ohne weiteres hinschreiben können, wenn wir uns aufser auf unsern allgemeinen Impulssatz auch auf den Satz der lebendigen Kraft berufen hätten, welcher ja im zweiten Kapitel seinerseits aus unserem Impulssatze gefolgert wurde. In der That sehen wir sofort, dafs die Gleichung (3) mit Rücksicht auf (2) in den Satz der lebendigen Kraft übergeht. Statt (3) können wir nämlich schreiben:

$$L^2 + M^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta = k.$$

Dividieren wir nun mit $2A$ und führen wir rechts eine neue Konstante $h$ ein, welche mit der früheren durch die Formel:

(3a) $$h = \frac{k}{2A} + \frac{N^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$$

zusammenhängt, so entsteht

(3b) $$\frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) + P\cos\vartheta = h.$$

Hier bedeutet der erste Term der linken Seite die kinetische Energie $T$ des Kreisels

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2 + M^2}{A} + \frac{N^2}{C}\right) = \frac{1}{2}\left(A(p^2 + q^2) + Cr^2\right);$$

der zweite Term stellt die potentielle Energie $U$ im Falle der Schwerewirkung dar. Es ist nämlich nach der Definition von pag. 117, 118 $dU = -dW$, wo $dW$ die von den äufseren Kräften an unserem System bei einer unendlich kleinen Verrückung geleistete Arbeit ist, d. h. in unserem Falle

$$dW = P\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Mithin folgt in der That

$$U = P \cos \vartheta,$$

so dafs wir statt (3 b) wieder schreiben können

$$(3') \qquad T + U = h.$$

Die vorstehende geometrische Überlegung müssen wir also auffassen als einen *neuen, auf den schweren symmetrischen Kreisel zugeschnittenen Beweis vom Satze der lebendigen Kraft.*

Wir wollen uns nun die analytische Bedeutung unserer bisherigen Resultate klar machen. Wir werden sehen, dafs wir in den Gleichungen (1), (2) und (3) drei erste Integrale der Differentialgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels gefunden haben.

Zu diesem Zwecke werden wir diese Gleichungen neuerdings aus den Differentialgleichungen durch Integration ableiten. Am bequemsten legen wir die letzteren in der Form der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen, wie sie auf pag. 154 angegeben sind, zu Grunde. Hier haben wir für $T$ den Ausdruck (6) von pag. 156 einzutragen

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2 \vartheta \cdot \psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos \vartheta \cdot \psi')^2,$$

aus welchem folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

Andrerseits ist die Arbeit, welche die Schwerkraft bei der unendlich kleinen Verrückung $d\varphi$, $d\psi$, $d\vartheta$ leistet, wie eben benutzt wurde:

$$dW = \Phi\, d\varphi + \Psi\, d\psi + \Theta\, d\vartheta = P \sin \vartheta\, d\vartheta.$$

Die Komponenten $\Phi$, $\Psi$, $\Theta$ der äufseren Kraft in Richtung der Koordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ sind also

$$\Phi = \Psi = 0, \quad \Theta = P \sin \vartheta.$$

Daraufhin gehen die beiden ersten Lagrangeschen Gleichungen über in

$$\frac{d[\Phi]}{dt} = \frac{d[\Psi]}{dt} = 0;$$

wir haben also für die ganze Dauer der Bewegung

$$[\Phi] = \text{const}, \quad [\Psi] = \text{const}.$$

Nun sind aber nach pag. 109 die Impulskomponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ nichts anderes als die senkrechten Projektionen des Impulsvektors auf die Figurenaxe und die Vertikale, also bez. gleich $N$ und $n$. Unsere vorstehenden Gleichungen sind also mit (1) und (2) identisch. Die festen Werte unserer beiden Impulskomponenten werden wir daraufhin als zwei erste Integrationskonstanten bezeichnen können.

Natürlich können wir dieselben Integrale auch aus den Eulerschen Gleichungen von pag. 141, 142 ableiten. Hier haben wir $A = B$ zu setzen und für $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ bez. die Werte einzutragen:

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin\vartheta \cos(K, X), \quad \mathsf{M} = P \sin\vartheta \cos(K, Y), \quad \mathsf{N} = P \sin\vartheta \cos(K, Z).$$

Dabei ist zunächst

$$\cos(K, Z) = 0,$$

weil die Knotenlinie auf der Figurenaxe senkrecht steht; da wir ferner (vgl. Fig. 3 auf pap. 18) den von der Knotenlinie aus gezählten Winkel, welchen dieser Halbstrahl mit der positiven $X$-Axe bildet, mit $\varphi$ bezeichnen, so wird

$$\cos(K, X) = \cos\varphi, \qquad \cos(K, Y) = -\sin\varphi.$$

Es ergiebt sich also

$$\mathsf{\Lambda} = P \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \mathsf{M} = -P \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \mathsf{N} = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (3″) von pag. 142 lautet daher einfach

$$C \frac{dr}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dt} = 0,$$

so dafs sich wieder die Gleichung (2) ergiebt.

Die Ableitung von (1) aus den Eulerschen Gleichungen würde eine etwas längere Umrechnung erfordern, welche wir hier unterdrücken wollen.

Unsere Gleichung (3) schliefslich können wir nach der gewöhnlichen analytischen Beweismethode des Satzes von der lebendigen Kraft aus den Lagrangeschen oder Eulerschen Gleichungen finden, indem wir diese mit geeigneten Faktoren multiplizieren und addieren; hierbei tritt als dritte Integrationskonstante unsere obige Gröfse $h$, die Konstante der lebendigen Kraft, auf, welche unserer obigen Konstanten $k$ äquivalent ist.

Aufser den drei Integralgleichungen (1) bis (3) verlangt die vollständige Integration unseres Problems die Aufstellung von drei weiteren Beziehungen zwischen den Lagenkoordinaten des Kreisels und der Zeit mit je einer willkürlichen Integrationskonstanten. Diese Beziehungen lassen sich nicht, wie unsere drei ersten Integrale, in elementarer Form angeben; dementsprechend dürfte es kaum gelingen, sie durch direkte geometrische Betrachtungen abzuleiten. Immerhin ist ihr analytischer Charakter sehr einfach; sie lassen sich nämlich durch blofse Quadraturen herstellen.

Wir müssen jetzt neben den Eulerschen die sog. kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 bez., was bequemer ist, neben den La-

grangeschen Gleichungen (1) von pag. 154 die Gleichungen (2) (s. ebendaselbst)

$$[\Phi] = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad [\Psi] = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad [\Theta] = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'},$$

berücksichtigen. In den beiden ersten dieser Gleichungen tragen wir links die konstanten Werte $N$ und $n$ ein; die rechten Seiten berechnen wir nach dem oben angegebenen Ausdrucke von $T$. Wir finden so

$$C(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi') = N,$$
$$C\cos\vartheta \cdot \varphi' + (A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\,\psi' = n.$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen ergiebt sich zunächst

$$\psi' = \frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}; \tag{4}$$

sodann folgt aus der ersten Gleichung:

$$\varphi' = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{N - n\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}. \tag{5}$$

Die Integration nach $t$ läßt sich in dieser Form natürlich noch nicht ausführen. Gehen wir aber mit den gefundenen Werten von $\varphi'$ und $\psi'$ in die Gleichung (3′) der lebendigen Kraft hinein, so ergiebt sich:

$$\frac{A}{2}\left\{\vartheta'^2 + \left(\frac{N\cos\vartheta - n}{A\sin\vartheta}\right)^2\right\} + \frac{C}{2}\left\{\frac{N^2}{C^2}\right\} + P\cos\vartheta = h.$$

Hier führen wir die wichtige Hülfsvariable

$$u = \cos\vartheta$$

ein; die vorstehende Gleichung schreibt sich dann, nachdem wir sie mit $2A\sin^2\vartheta$ multipliziert haben:

$$A^2u'^2 + (Nu - n)^2 + \frac{A}{C}N^2(1-u^2) + 2APu(1-u^2) = 2Ah(1-u^2).$$

Somit wird

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \tag{6}$$

wo $U$ eine Abkürzung für den folgenden etwas komplizierten Ausdruck bedeutet:

$$U = \frac{1}{A^2}\left[2Ah(1-u^2) - (Nu-n)^2 - \frac{A}{C}N^2(1-u^2) - 2APu(1-u^2)\right], \tag{7}$$

In $U$ führen wir statt der Konstanten $h$ unsere frühere Gröfse $k$ ein; da nach Gleichung (3a)

$$2Ah - \frac{A}{C}N^2 = k - N^2$$

wird, so ergiebt sich:

$$U = \frac{1}{A^2}\left[-(Nu-n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2)\right] \tag{7'}$$

oder, nach Potenzen von $u$ geordnet:

$$(7'') \quad U = \frac{1}{A^2}\left[2APu^3 - ku^2 + 2(nN - AP)u + (k - N^2 - n^2)\right].$$

Da $U$ lediglich von unserer Hülfsvariabeln $u$ abhängt, läfst sich die Integration in (6) unmittelbar ausführen. Wir haben nur zu schreiben:

$$(6') \qquad dt = \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Tragen wir diesen Wert von $dt$ in (4) und (5) ein, so gehen letztere Gleichungen über in

$$(4') \qquad d\psi = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}\frac{du}{\sqrt{U}}$$

und

$$(5') \qquad d\varphi = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)dt + \frac{N - nu}{A(1-u^2)}\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Nunmehr führen wir die Quadraturen in (4'), (5') und (6') aus und bekommen:

$$(8) \qquad \begin{cases} t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}\frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi = \int \frac{N - nu}{A(1-u^2)}\frac{du}{\sqrt{U}} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t, \end{cases}$$

wobei $U$ durch (7), (7') oder (7'') definiert ist.

Die drei additiv hinzutretenden Integrationskonstanten haben wir nicht hinzugeschrieben, weil sie für den geometrischen Charakter der zugehörigen Bewegung belanglos sind. Diese Integrationskonstanten sind etwa die Werte $t_0$, $\psi_0$, $\varphi_0$, welche wir dem Werte von $u$ an der unteren Grenze der Integrale zuordnen mögen. Sie können durch passende Wahl des Zeitpunktes, von dem aus wir $t$, sowie durch passende Bestimmung der Axen $x$ und $X$, von denen aus wir $\psi$ und $\varphi$ messen, herausgeschafft werden. Immerhin konstatieren wir, dafs wir in den drei wesentlichen Konstanten $n$, $N$ und $k$ (oder $h$), sowie in den drei unwesentlichen Konstanten $t_0$, $\psi_0$ und $\varphi_0$ die erforderliche Anzahl von *sechs willkürlichen Gröfsen* bekommen haben, welche zu der allgemeinen Bewegung eines Systems von drei Freiheitsgraden gehören.

Dafs wir in solcher Weise durch blofse Quadraturen zum Ziel gelangten, werden wir an dieser Stelle als einen Glücksfall ansehen, der aber nicht vereinzelt dasteht. Vielmehr kommt die nämliche Eigentümlichkeit einer umfassenden Klasse wichtiger mechanischer Probleme,

den sogenannten cyklischen Systemen, zu, welche sich genau so wie unser Kreiselproblem durch bloſse Quadraturen teilweise oder vollständig behandeln lassen. Der Kreisel kann als ein instruktives Beispiel zur Theorie der cyklischen Systeme aufgefaſst werden. Die hier befolgte Integrationsmethode würde durch Vergleich mit den allgemeineren Problemen eine neue Beleuchtung erfahren.*)

In historischer Hinsicht bemerken wir schlieſslich, daſs man die Aufstellung der obigen Integralformeln **Lagrange****) verdankt, der das Problem des schweren symmetrischen Kreisels zum erstenmale allgemein in Angriff genommen hat.

## § 4. Allgemeine Periodicitätseigenschaften der Bewegung. Vorläufiges über das Verhalten der elliptischen Ingrale bei Umlaufung des Integrationssegmentes. Integraldarstellung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Integrale für $t$, $\psi$ und $\varphi$ bezeichnet man, da sie die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke dritten Grades unter dem Integralzeichen führen, als *elliptische Integrale*. Bekanntlich lassen sich solche Integrale im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen ersetzen. Sie definieren vielmehr eine Klasse transcendenter Funktionen, welche von den Mathematikern seit 100 Jahren mit Vorliebe untersucht worden ist.

Es soll unsere nächste Aufgabe sein, aus der Form dieser Funktionen die allgemeinsten und augenfälligsten Eigenschaften der Bewegung des schweren Kreisels abzulesen. Insbesondere wollen wir auf analytischem Wege begründen, daſs die Kreiselspitze fortgesetzt zwischen zwei Parallelkreisen der Einheitskugel auf- und abschwankt und daſs ihre Bahnkurve aus lauter kongruenten oder symmetrisch gleichen Stücken besteht. Diese Thatsachen wurden bereits in den ersten Paragraphen dieses Kapitels auf mechanisch-geometrischem Wege dargethan. Abgesehen von der genaueren Begründung der früheren etwas unsicheren Schlüsse werden wir durch das Folgende die Möglichkeit erreichen, die Gestalt der Bahnkurven im einzelnen durch numerische Rechnung zu kontrollieren.

Wir haben dabei im Grunde dieselben Betrachtungen anzustellen, die sonst in der Theorie der elliptischen Funktionen entwickelt werden. Indem wir diese Betrachtungen an unser konkretes Beispiel anknüpfen, hoffen wir geradezu eine bequeme erste Einführung in diese Theorie zu geben, welche wir hier nicht als bekannt voraussetzen werden.

---

*) Wegen der allgemeinen Theorie der cyklischen Systeme vgl. z. B. H. Hertz, Mechanik. Zweites Buch, Abschnitt 5, I: Cyklische Bewegungen.

**) In der *Mécanique analytique sec. partie*, sect. IX, Nr. 35. Ges. W. Bd. XII.

Wir stellen uns fürs Erste durchaus auf den Standpunkt der älteren Autoren, etwa auf den Legendres, und betrachten nur reelle Werte der Integrationsvariabeln $u$, welche wir uns auf einer Geraden, der „$u$-Axe", repräsentieren werden. Wegen der geometrischen Bedeutung von $u$ ($u = \cos \vartheta$) kommt von dieser Axe für die Mechanik direkt nur das Stück zwischen $-1$ und $+1$ in Betracht.

Auch dieses Stück wird bei den Kreiselbewegungen im allgemeinen nur teilweise von $u$ bestrichen. Da nämlich das Inkrement von $t$ sicher eine reelle Gröfse sein mufs, so darf $u$ wegen der Beziehung

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

nur solche Werte annehmen, für welche $\sqrt{U}$ reell, also $U$ positiv ist. Nun wird aber $U$ in den Punkten $u = \pm 1$ im allgemeinen negativ und niemals positiv. Wir haben nämlich nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen

$$\text{für} \quad u = +1 \ \cdots\cdots \ U = -\frac{1}{A^2}(N-n)^2,$$

$$\text{für} \quad u = -1 \ \cdots\cdots \ U = -\frac{1}{A^2}(N+n)^2,$$

d. h. $U < 0$, sofern nicht gerade $N = \pm n$ und also $U = 0$ ist. Daher erscheint die Variable $u$ auf ein gewisses Intervall zwischen $-1$ und $+1$ eingeschränkt, in welchem $U$ positiv ist. Ein solches Intervall mufs stets vorhanden sein; wäre es nämlich nicht vorhanden, so müfsten wir sagen, dafs die in $U$ eingehenden Integrationskonstanten $n$, $N$ und $h$ im Sinne der Mechanik unzulässig gewählt sind, weil ihnen keine reelle Bewegung entspricht. Die Grenzen unseres Intervalles werden durch zwei Punkte gebildet, in denen $U$ verschwindet. Es seien dieses die Punkte $u = e$ und $u = e'$.

Aufser diesen beiden Wurzeln besitzt die Gleichung $U = 0$ noch eine dritte Wurzel, welche notwendig reell ist und aufserhalb des Intervalles $-1$ bis $+1$ liegt. Wir bezeichnen sie mit $e''$*) und zeigen leicht, dafs je nachdem $P >$ oder $< 0$ ist, $e'' > +1$ oder $< -1$ wird. In der That nimmt $U$ bei unendlich grofsem $u$ das Vorzeichen des in $u$ höchsten Gliedes, also nach Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen das Vorzeichen von $Pu^3$ an. Dieses Vorzeichen ist im Falle $P > 0$ positiv für $u = +\infty$, im Falle $P < 0$ für $u = -\infty$; $U$ wechselt also im ersteren Falle sein Vorzeichen zwischen $+\infty$ und $+1$, im

*) Weierstrass bezeichnet die drei Wurzeln des Ausdrucks dritten Grades unter dem Integralzeichen durchweg mit $e_1$, $e_2$, $e_3$. Wir haben die obige abweichende Bezeichnung gewählt, weil bei uns nicht die Weierstrassische Normierung des Integrales vorliegt.

letzteren zwischen $-\infty$ und $-1$. Die fragliche dritte Wurzel liegt also sicher auf unserer $u$-Axe und zwar im Falle $P > 0$ rechterhand von $u = +1$, im Falle $P < 0$ linkerhand von $u = -1$.

Wir müssen weiterhin zwischen den beiden Vorzeichen von $\sqrt{U}$ gut unterscheiden. Es ist deshalb bequem, statt der einfachen $u$-Axe eine *Doppelaxe* zu Grunde zu legen, oder, wie wir auch sagen können, die $u$-Axe *doppelt überdeckt* zu denken. Je zwei übereinanderliegende Punkte dieser Doppelaxe (vgl. Fig. 38) repräsentieren uns dann denselben Wert von $u$ und $U$, aber entgegengesetzte Werte von $\sqrt{U}$. In den Verschwindungspunkten von $U$ sind diese beiden entgegengesetzten Werte nicht verschieden. Dasselbe gilt von der Stelle $u = \pm\infty$, wo $\sqrt{U}$ die beiden funktionentheoretisch nicht verschiedenen Werte $\pm\infty$ annimmt. Wir bringen dieses in der Figur dadurch zum Ausdruck, dafs wir an diesen Stellen die beiden Überdeckungen der Axe in einen Punkt zusammenlaufen lassen. Die vier Punkte $e$, $e'$, $e''$, $\infty$ bezeichnen wir auch, indem wir die übliche Terminologie der *Riemannschen Fläche* vorbereiten, als *Verzweigungspunkte*. Überhaupt entspricht die Mafsnahme der doppelten Überdeckung unserer $u$-Axe bereits dem von Riemann in die Funktionentheorie eingeführten Ideenkreise, dem wir aber erst im sechsten Kapitel näher treten können.

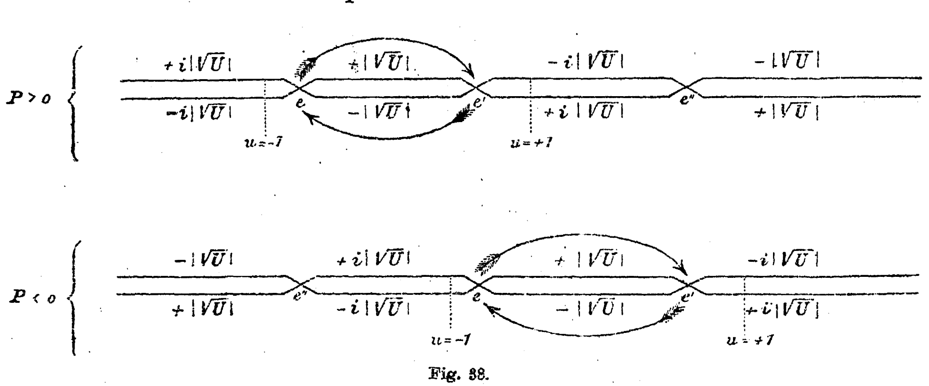


Fig. 38.

Wie wir im übrigen die positiven und negativen Werte der Quadratwurzel auf die beiden Überdeckungen verteilen, ist von dem hier eingenommenen Standpunkte der reellen Integrationsvariabeln aus bis zu einem gewissen Grade in unser Belieben gestellt. Natürlich werden wir die Wertefolge von $\sqrt{U}$ in den beiden Überdeckungen so einrichten, dafs sie eine stetige Folge wird, dafs also ein Vorzeichenwechsel nur in den Verzweigungspunkten ($U = 0$ oder $U = \infty$) eintritt. Dabei bleibt in jedem der Intervalle $ee'$, $e'e''$ u. s. w. noch je eine Vorzeichenwahl willkürlich. Erst später, wenn wir von komplexen

Werten der Gröfse $u$ sprechen werden, wird sich auch hierfür eine bestimmte Regel ergeben. Vorläufig haben wir die in den vorstehenden Figuren enthaltene Vorzeichenbestimmung als eine willkürliche Festsetzung anzusehen.

Wir untersuchen jetzt das für $t$ aufgestellte elliptische Integral in seiner Abhängigkeit von $u$ etwas näher. Dabei benutzen wir die evidente Thatsache, dafs in der Mechanik die Zeit nicht nur eine reelle, sondern auch eine beständig wachsende Gröfse bedeutet, dafs also $dt$ notwendigerweise positiv sein mufs.

Als untere Grenze des Integrales nehmen wir den kleineren der beiden zwischen $-1$ und $+1$ enthaltenen Wurzelwerte von $U=0$, welchen wir (wie in den Figuren) mit $e$ bezeichnen. Von hier aus müssen wir $u$ in das mechanisch allein brauchbare Intervall zwischen $e$ und $e'$ eintreten lassen und zwar, nach dem vorangestellten Prinzipe, in die obere Überdeckung dieses Intervalles, damit wir für

$$dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

einen positiven Wert erhalten. Darauf haben wir $u$, beständig in der oberen Überdeckung bleibend, wachsen zu lassen bis zum Punkte $u=e'$. In diesem angekommen, müssen wir umkehren, damit $dt$ reell, und wir müssen in die untere Überdeckung übergehen, damit $dt$ positiv bleibt. Sind wir zu $e$ zurückgelangt, so müssen wir aus demselben Grunde in die obere Überdeckung übergehen. Es wiederholt sich dann fortgesetzt dasselbe Spiel.

*Der Weg, den wir der Variabeln $u$ bei der Integration zuweisen müssen, besteht also aus der kontinuierlichen Umlaufung des Segmentes $ee'$ in bestimmtem Sinne.* (Vgl. die Pfeile in den vorstehenden Figuren.)

Dieser Satz liefert sofort eine erste wichtige Eigenschaft der allgemeinen Kreiselbewegung. Er besagt nämlich:

*Die Bahnkurve der Kreiselspitze oscilliert beständig zwischen zwei Parallelkreisen* $\cos\vartheta = e$ *und* $\cos\vartheta = e'$ *auf der Einheitskugel hin und her.*

Zugleich lernen wir hierdurch die Lage der beiden Parallelkreise berechnen. Wir haben zu dem Zwecke die kubische Gleichung $U=0$ zu lösen; *ihre beiden zwischen* $-1$ *und* $+1$ *gelegenen Wurzeln liefern uns die fraglichen Werte von* $\cos\vartheta$.

Ferner können wir nunmehr die Zeit angeben, welche verstreicht, während die Kreiselspitze von ihrer tiefsten zu der nächstfolgenden höchsten Lage übergeht. Wir bezeichnen sie mit $\omega$ und haben

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{1}$$

Ebenso grofs ist die Zeitdauer, in welcher die Kreiselspitze zu ihrer tiefsten Lage zurückgelangt; sie ist nämlich wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten negativen Vorzeichens von $\sqrt{U}$:

$$\int_{e'}^{e} \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \omega.$$

Während also $u$ einen vollen Umlauf um das Integrationssegment $ee'$ ausführt, vergeht jedesmal die Zeit $2\omega$. Hierauf beruht es, dafs man $2\omega$ als die *Periode des elliptischen Integrals* bezeichnet (περίοδος = Umlauf).

Auf dasselbe Zeitintervall $2\omega$ kommen wir, wenn wir $u$, von irgend einem Werte des Integrationsintervalles beginnend, das Segment $ee'$ umlaufen und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren lassen. Umgekehrt wird also auch zu je zwei Zeitpunkten, welche sich um $2\omega$ oder um ein Vielfaches dieser Gröfse unterscheiden, derselbe Wert von $u$, d. h. dieselbe Vertikal-Erhebung der Kreiselspitze über die Äquatorebene der Einheitskugel gehören. *Die Bewegung der Kreiselspitze stellt daher, was ihre Vertikalkomponente betrifft, einen in der Zeit periodischen Vorgang dar.*

Ähnliches gilt aber auch von der Horizontal-Komponente dieser Bewegung. Letztere wird uns durch die wechselnden Werte des Winkels $\psi$ bestimmt. Ursprünglich bedeutete ja $\psi$ den von der $x$-Axe aus gemessenen Winkel nach der Knotenlinie. Die Knotenlinie aber steht auf der Figurenaxe und auch auf ihrer (orthographischen oder stereographischen) Projektion in der Äquatorebene beständig senkrecht. Da nun die Gröfse von $\psi$ in unserer Integraldarstellung von pag. 223 sowieso nur bis auf eine additive Integrationskonstante definiert ist, so können wir, indem wir diese Konstante speziell wählen, $\psi$ auch direkt auffassen als den Winkel, den die Projektion der Figurenaxe mit der $x$-Axe bildet. Die Gleichung

$$\psi = \psi(u),$$

in welcher die Funktion $\psi$ das oben angegebene elliptische Integral bedeutet, liefert uns darauf direkt die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten. Wir haben nur noch nötig, $u$ durch den von $O$ aus gezählten Radius-Vektor $\varrho$ des Bildes der Kreiselspitze auszudrücken, indem wir, je nachdem es sich um das orthographische oder das stereographische Bild handelt, setzen:

$$u = \sqrt{1-\varrho^2} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}.$$

Es ist nun klar, dafs das Integral $\psi = \psi(u)$ ganz ähnliche Periodicitätseigenschaften zeigen wird, wie das Integral für $t$, welches wir

soeben untersuchten. Zunächst haben wir den Weg der Variabeln $u$ in unserem Integrale wegen des Faktors $\frac{du}{\sqrt{U}}$ und wegen seiner Bedeutung als Inkrement der Zeit ebenso zu bestimmen, wie oben geschehen. Gehen wir dementsprechend von der unteren Grenze $e$ aus, so liefert die Integration, einmal bis zum Punkte $e'$ ausgedehnt, denjenigen charakteristischen Zuwachs, welchen $\psi$ während der Zeit $\omega$ erfährt. Wir bezeichnen denselben mit $\psi_\omega$ und haben

$$\psi_\omega = \int_e^{e'} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{2}$$

Das Doppelte dieses Zuwachses erhalten wir, wenn wir über den Punkt $e'$ hinaus in der unteren Überdeckung weiter integrieren und zum Ausgangspunkte zurückkehren. In der That wird, wegen des für die untere Überdeckung festgesetzten Vorzeichens von $\sqrt{U}$, wieder

$$\int_{e'}^{e} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \cdot \frac{du}{-|\sqrt{U}|} = \psi_\omega.$$

Derselbe Wert $2\psi_\omega$ ergiebt sich natürlich, wenn wir, in irgend einem Punkte unseres Segmentes beginnend, die Integrationsvariable dieses einmal vollständig umlaufen lassen. Die Gröfse $2\psi_\omega$ stellt daher denjenigen Zuwachs dar, welchen das Azimuth der Kreiselspitze erfährt, während diese von irgend einem Punkte aus nach Überschreitung einer höchsten und einer tiefsten Lage zu einem in gleicher Höhe über der Äquatorebene gelegenen Punkte zurückkehrt. Dieser Zuwachs ist mithin derselbe für alle Punkte der Bahnkurve. Mit anderen Worten:

*Die Bahnkurve der Kreiselspitze kommt mit sich zur Deckung, wenn wir sie um die Vertikale durch den Winkel $2\psi_\omega$ herumdrehen. Sie besteht daher aus einer (im allgemeinen unendlichen) Serie unter sich kongruenter Bögen, deren jeder in der Zeit $2\omega$ durchlaufen wird. Die Bewegung der Kreiselspitze stellt, räumlich wie zeitlich betrachtet, einen periodischen Vorgang dar.*

Die soeben ausgesprochene Kongruenz der einzelnen Kurvenbögen haben wir schon früher geometrisch erkannt; unsere jetzige analytische Ergänzung lehrt nun darüber hinaus, die Spannweite der Bögen mittelst der Gleichung (2) wirklich zu berechnen.

Wir wollen sodann analytisch verifizieren, was wir gleichfalls schon früher erkannt haben, dafs nämlich jeder Bogen der Bahnkurve in zwei symmetrisch gleiche Halbbögen zerfällt. Wir konstatieren zu dem Zwecke, dafs, unter $u$ irgend einen Wert zwischen $e$ und $e'$ ver-

standen, die beiden Integrale

$$\int_{u}^{e'} d\psi \quad \text{und} \quad \int_{e'}^{u} d\psi,$$

von denen wir uns das erste in der oberen, das zweite in der unteren Überdeckung ausgeführt denken, denselben Wert (etwa $\psi_0$) haben. Nun gehören auf einem bestimmten unserer kongruenten Bögen zu dem Werte $u$ je zwei Punkte, welche bez. die Azimuthe $\psi_1$ und $\psi_2$ haben mögen, wobei

$$\psi_1 = \psi_\omega - \psi_0, \quad \psi_2 = \psi_\omega + \psi_0.$$

Wir sehen hieraus, dafs je zwei zu demselben $u$ gehörige aufeinanderfolgende Punkte unseres Bahnkurvenbildes hinsichtlich der Geraden $\psi = \psi_\omega$ spiegelbildlich liegen. *Jeder einzelne unserer kongruenten Bögen zerfällt daher*, wie behauptet wurde, *in zwei spiegelbildlich gleiche Halbbögen.*

Schliefslich gelten genau dieselben Schlüsse auch hinsichtlich des Integrales, durch welches wir $\varphi$ dargestellt haben. Wir können direkt sagen: Auch die $\varphi$-Koordinate nimmt bei einem vollen Umlauf der Variabeln $u$ um das Integrationssegment je um eine bestimmte additive Gröfse $2\varphi_\omega$ zu. *Infolgedessen besitzt auch die Bewegung des Kreisels um die Figurenaxe einen periodischen Charakter. Diese Bewegung wiederholt sich in demselben Tempo, in dem sich die Bahnkurve periodisch reproduziert.* Die $\varphi$-Koordinate ist allerdings für den geometrischen Charakter der Bewegung weniger wichtig, wie die $\psi$-Koordinate; speziell kommt sie in unserer früheren graphischen Darstellung der Kreiselbewegung überhaupt nicht zum Ausdruck.

Wir haben unsere bisherige Diskussion an die Ausdrücke für die Eulerschen Winkel $\psi$ und $\varphi$ angeschlossen, welche auch in der That, wegen ihrer anschaulichen Bedeutung, bei geometrischen Fragen am bequemsten sind. Wir bemerken aber, dafs zum Zwecke einer eingehenden analytischen Behandlung unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ entschieden den Vorzug verdienen. Dies wird im sechsten Kapitel klar hervortreten. Hier begnügen wir uns damit, aus den obigen Ausdrücken der $t$, $\psi$ und $\varphi$ entsprechende Integraldarstellungen für die Logarithmen unserer Parameter abzuleiten.

Wir knüpfen dabei an die ursprüngliche Definition der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in den Gleichungen (8) von pag. 21 an, wonach beispielsweise

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}$$

war. Wir berechnen nun $\lg \alpha$, indem wir für $\cos \frac{\vartheta}{2}$ seinen Wert in $u$, d. h. $\sqrt{\frac{u+1}{2}}$ eintragen und erhalten so:

$$\lg \alpha = \frac{1}{2} \lg (u+1) + \frac{i}{2} (\varphi + \psi) - \frac{1}{2} \lg 2.$$

Jetzt setzen wir für $\varphi$ und $\psi$ die Integrale von pag. 223 ein, schreiben auch $\lg (u+1)$ in ein Integral um und gestatten uns, die rechts stehende additive Konstante wegzuwerfen, indem wir sie mit der nicht hingeschriebenen willkürlichen Integrationskonstanten vereinigt denken. Nach gehöriger Zusammenziehung ergiebt sich für $\lg \alpha$ der folgende Ausdruck, dem wir sogleich die in entsprechender Weise gewonnenen Darstellungen für $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ hinzufügen:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\lg \alpha &= \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\
\lg \beta &= \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\
\lg \gamma &= \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} + \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\
\lg \delta &= \int \left\{ \frac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} - \frac{iN}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \right\} \frac{du}{\sqrt{U}}.
\end{aligned}\right.$$

Zunächst möchte es scheinen, als ob diese Ausdrücke komplizierter sind, wie die Integraldarstellungen für $\varphi$ und $\psi$. In Wirklichkeit zeigen sie aber ein viel einfacheres funktionentheoretisches Verhalten. Wir werden später sehen, daſs die Gröſsen $\lg \alpha$, $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \delta$ sogenannte Normalintegrale dritter Gattung sind, während sich die $\psi$ und $\varphi$ nur additiv aus solchen einfachsten Elementen zusammensetzen lassen.

## § 5. Über den Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel, welche dieselbe Impulskurve liefern, und über die Bewegung des Kugelkreisels.

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daſs wir uns, wie früher schon gelegentlich erwähnt wurde, fernerhin nur noch mit der Bewegung des Kugelkreisels zu befassen brauchen. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst eine etwas allgemeinere Überlegung an.

Wir betrachten einen bestimmten „ersten" symmetrischen Kreisel und fassen die Kurve ins Auge, welche der Impuls-Endpunkt bei irgendeiner natürlichen Bewegung im Raume beschreibt. Darauf fragen wir uns: *Können wir diese Kurve in mehrfacher Weise als Impulskurve auffassen*, d. h. entsteht dieselbe Kurve als Ort der Endpunkte des

Impulsvektors im Raume etwa noch bei einer passend gewählten Bewegung eines „zweiten“ symmetrischen Kreisels? Wir werden sehen, dafs diese Frage zu bejahen ist.

Die auf die Massenverteilung und die Bewegung unseres ersten und zweiten Kreisels bezüglichen Konstanten mögen durch den Index 1 und 2 unterschieden werden, so dafs also $A_1$, $C_1$, $P_1$ bez. $A_2$, $C_2$, $P_2$ die Trägheits- und Schweremomente des ersten bez. zweiten Kreisels bedeuten. Dabei wollen wir den zweiten Kreisel speziell so annehmen, dafs er dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment und dasselbe Drehmoment der Schwere aufweist, wie der erste Kreisel, dafs also

$$A_1 = A_2, \quad P_1 = P_2;$$

das Trägheitsmoment um die Figurenaxe kann dagegen verschieden sein. Ferner wollen wir die Anfangslage unseres zweiten Kreisels so bestimmen, dafs seine Figurenaxe mit der des ersten Kreisels zusammenfällt, dafs also zu Beginn der Bewegung

$$\vartheta_1 = \vartheta_2.$$

Endlich werden wir auch die Anfangslage und Gröfse des Impulses in beiden Fällen gleich bestimmen müssen, da wir ja erreichen wollen, dafs beide Kreisel zu derselben Impulskurve Anlafs geben. Wir werden also setzen

$$n_1 = n_2, \quad N_1 = N_2, \quad k_1 = k_2$$

und werden übrigens bei den hiernach als gleich vorausgesetzten Konstanten $A$, $P$, $n$, $N$, $k$ die Indices fortlassen können.

Die oben gestellte Frage läfst sich nun, wenn wir uns auf unsere expliciten Integralformeln berufen wollen, äufserst leicht entscheiden. Wir brauchen nur zu bemerken, dafs der Ausdruck von $U$ in Gleichung (7′) von pag. 222, ebenso wie die Formeln für $t$ und $\psi$ in den Gleichungen (8) von pag. 223, lediglich von den für beide Kreisel als gleich vorausgesetzten Impulsgröfsen $n$, $N$ und $k$, sowie von $A$ und $P$ abhängen, dagegen von dem als verschieden vorausgesetzten Hauptträgheitsmomente $C$ unabhängig sind. Infolgedessen werden $t$ und $\psi$ für beide Kreisel dieselben Funktionen von $u$, d. h. die Bahnkurve der Kreiselspitze wird nach ihrer räumlichen Gestalt und ihrer zeitlichen Durchlaufung bei beiden Kreiseln identisch. Dafs alsdann auch die Impulskurven identisch werden, ergiebt sich direkt aus der Gleichheit der Impulskomponenten $n$ und $N$, sowie aus der Gleichheit der Länge des Impulses, welche bei entsprechend gleichen Werten von $\cos\vartheta$ durch den Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 ausgesprochen wird.

Unsere obige Frage ist daher in folgendem Sinne zu beantworten: *Zu einer bestimmten möglichen Impulskurve gehören unendlich viele mit*

*demselben Anfangsimpuls und derselben Anfangslage der Figurenaxe vor sich gehenden Bewegungen aller derjenigen symmetrischen Kreisel hinzu, welche dasselbe Drehmoment der Schwere und dasselbe äquatoriale Hauptträgheitsmoment besitzen. Zugleich mit der Impulskurve wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze bei allen solchen Bewegungen identisch.*

Wir können uns aber auch unmittelbar geometrisch von diesem eigentümlichen Zusammenhang zwischen den Bewegungen verschiedener Kreisel Rechenschaft geben.

Wir vergleichen zu dem Zwecke den Verlauf der Impulskurve bei unserem ersten und zweiten Kreisel, indem wir den Anfangsimpuls successive mit dem unendlich kleinen Drehstofse der Schwere zusammensetzen. Dabei ergiebt sich wegen der Gleichheit von $P$ und wegen der Gleichheit des Anfangsimpulses und der Anfangslage der Figurenaxe im ersten Momente für beide Kreisel dieselbe Änderung des Impulses. Insbesondere, können wir sagen, behält die Differenz $|i_1|^2 - |i_2|^2$ zunächst ihren Anfangswert Null bei oder, genauer gesagt, der Differentialquotient dieser Differenz nach der Zeit ist in der Anfangslage gleich Null.

Wir berücksichtigen ferner, dafs zwischen der Länge des Impulses und der Neigung der Figurenaxe für die Bewegung beider Kreisel die unveränderliche Relation (3) von pag. 219 besteht:

$$|i_1|^2 + 2AP\cos\vartheta_1 = k, \quad |i_2|^2 + 2AP\cos\vartheta_2 = k.$$

Aus diesen beiden Gleichungen schliefsen wir, dafs die Neigung der Figurenaxe gegen die Vertikale sich anfangs in beiden Fällen in gleicher Weise ändert. Bilden wir nämlich die Differenz der vorstehenden Gleichungen, so folgt durch Differentiation nach $t$:

$$2AP\frac{d}{dt}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) = -\frac{d}{dt}(|i_1|^2 - |i_2|^2) = 0.$$

Nehmen wir zu der Gleichheit des Neigungswinkels $\vartheta$ im ersten Moment noch die Gleichheit der Projektionen $n$ und $N$ hinzu, so ergibt sich auch $\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt}$ nach der kinematischen Gl. (4) von § 3; also bleiben die anfangs vereinigt gelegenen Figurenaxen zunächst vereinigt.

Wir sind damit auf dieselben Bedingungen, die zu Anfang der beiden Bewegungen galten, zurückgeführt. Durch Wiederholung unseres Schlusses sehen wir daher, dafs je zwei symmetrische Kreisel, welche dieselbe Anfangslage der Figurenaxe und denselben Anfangsimpuls besitzen, bei gleichen Werten von $A$ und $P$ dauernd denselben Impuls und dieselbe Lage der Figurenaxe aufweisen müssen. Dies ist aber wieder der oben ausgesprochene Satz.

Je zwei der hier verglichenen Bewegungen sind natürlich nicht völlig identisch. Sie unterscheiden sich beispielsweise durch die Gestalt der Herpolhodiekurve, wie wir unten noch näher ausführen werden. Offenbar fällt nämlich bei gleicher Impulskurve und gleicher Bahnkurve der Kreiselspitze, aber ungleichen Werten des Hauptträgheitsmomentes $C$ Lage und Gröfse des Rotationsvektors verschieden aus. Diese Verschiedenheit der instantanen Drehung kann aber nur in der bez. Bewegung der beiden Kreisel um die Figurenaxe, d. h. in den Werten des Winkels $\varphi$, zum Ausdrucke kommen, da ja die Bewegung der Figurenaxe selbst, wie wir sahen, dieselbe sein mufs. In der That kommt denn auch $C$ in der Integralformel für $\varphi$ (s. Gl. (8) von pag. 223) explicite vor.

Nach derselben Gleichung können wir aber sagen, dafs

$$\varphi - N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \tag{1}$$

für je zwei Kreisel unserer Serie dauernd denselben Wert besitzt. Es differieren also die Rotationskomponenten $\varphi'$ bei zwei solchen Kreiseln nur je um einen konstanten Betrag, dessen Gröfse von der Verschiedenheit der Trägheitsmomente $C$ abhängt.

Insbesondere findet sich unter der Serie unserer mit gleicher Impuls- und Bahnkurve ausgestatteten Kreisel ein *Kugelkreisel.* Diesen werden wir mit Vorliebe, wenn irgend ein „erster" symmetrischer Kreisel gegeben ist, zum Vergleich heranziehen. Sein Trägheitsmoment, welches wir mit $A$ bezeichnen, haben wir nach dem Vorstehenden so zu bestimmen, dafs $A = A_1$.

Nehmen wir ferner die Gröfsen $P$, $n$, $N$, $k$, sowie die Anfangslage der Figurenaxe den entsprechenden Gröfsen des vorgelegten symmetrischen Kreisels bez. gleich, so sind wir sicher, dafs die Bahnkurve des Kugelkreisels mit der des symmetrischen Kreisels identisch wird, während sich gleichzeitig die beiden Winkelgeschwindigkeiten $\varphi'$ nur um eine konstante Gröfse unterscheiden. *Kugelkreisel und symmetrischer Kreisel sind also für unsere Zwecke nicht wesentlich von einander verschieden.* Hat man die Bewegung des ersteren allgemein behandelt, so läfst sich die Bewegung des letzteren sofort angeben.

Die Möglichkeit der Reduktion des allgemeinen Kreiselproblems auf den Kugelkreisel ist zuerst von Herrn Darboux*) bemerkt worden.

Eine erste Anwendung, welche wir von dieser Reduktion machen, soll darin bestehen, dafs wir über die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels einen schon pag. 218 erwähnten Satz beweisen. Wir wollen

*) Mouvement d'un corps pesant de révolution, Journ. de Liouville, sér. IV, t. 1, 1885.

zeigen: *Die Herpolhodiekurve des symmetrischen Kreisels ist eine sphärische Kurve.*

Wir gehen dabei von der Thatsache aus, dafs die Herpolhodiekurve des zugehörigen Kugelkreisels *eben* ist. In der That wird ja beim Kugelkreisel die Herpolhodiekurve der Impulskurve, d. h. derjenigen Kurve, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Raume beschreibt, ähnlich. Dafs aber letztere eine ebene Kurve ist, wurde pag. 216 ausführlich dargethan.

Die Koordinaten der Herpolhodiekurve, welche wir wie früher mit $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ bezeichnen, haben wir pag. 45 durch die Werte von $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ und ihre Differentialquotienten dargestellt; insbesondere ergab sich für die dritte Koordinate:

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi'.$$

Nun hat $\varrho$ beim Kugelkreisel vom Trägheitsmomente $A$ den konstanten Wert $\frac{n}{A}$. Ferner sind die Werte von $\psi$ und $\vartheta$ beim symmetrischen Kreisel, wie wir eben sahen, den entsprechenden Werten bei dem zugehörigen Kugelkreisel bez. gleich, während sich nach (1) die Winkelgeschwindigkeit $\varphi'$ beim symmetrischen Kreisel aus der entsprechenden Gröfse beim Kugelkreisel durch Hinzufügung von $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ berechnet. Wir haben daher, unter $\varphi'$ den Wert dieser Winkelgeschwindigkeit beim Kugelkreisel, unter $\varrho$ den Wert der dritten Herpolhodiekoordinate beim symmetrischen Kreisel verstanden:

$$\frac{n}{A} = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi',$$

$$\varrho = \psi' + \cos\vartheta \cdot \varphi' + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta$$

oder

$$\varrho = \frac{n}{A} + N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos\vartheta. \tag{2}$$

Wir drücken ferner die Länge des Drehungsvektors bei der Bewegung des symmetrischen Kreisels einmal durch seine Koordinaten $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$, das andere Mal durch die Koordinaten $p$, $q$, $r$ aus, wobei wir statt $r$ auch schreiben können $\frac{N}{C}$. So erhalten wir:

$$\pi^2 + \varkappa^2 + \varrho^2 = p^2 + q^2 + \frac{N^2}{C^2}. \tag{3}$$

Der Satz der lebendigen Kraft in der Form der Gleichung (3) von pag. 219 gestattet uns sodann $p^2 + q^2$ noch in anderer Weise zu berechnen. Setzen wir nämlich in der genannten Gleichung

$$|i|^2 = L^2 + M^2 + N^2 = A^2(p^2 + q^2) + N^2,$$

so ergiebt sich:

$$A^2(p^2+q^2)+N^2+2AP\cos\vartheta=k$$

oder

$$p^2+q^2=\frac{k-N^2-2AP\cos\vartheta}{A^2}.$$

Gleichung (3) geht mithin über in

$$(4)\qquad \mathfrak{x}^2+x^2+\varrho^2=\frac{k-2AP\cos\vartheta}{A^2}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Schliesslich eliminieren wir $\cos\vartheta$ aus (2) und (4) und finden eine Gleichung, in der aufser $\mathfrak{x}$, $x$, $\varrho$ nurmehr konstante Gröfsen vorkommen, nämlich:

$$(5)\qquad \mathfrak{x}^2+x^2+\varrho^2=\frac{k}{A^2}-\frac{2CP(A\varrho-n)}{AN(A-C)}+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right)$$

oder

$$(5')\quad \mathfrak{x}^2+x^2+\left(\varrho+\frac{CP}{N(A-C)}\right)^2=\frac{k}{A^2}+\frac{2CPn}{AN(A-C)}+\frac{C^2P^2}{N^2(A-C)^2}$$
$$+N^2\left(\frac{1}{C^2}-\frac{1}{A^2}\right).$$

Dies ist aber die Gleichung einer Kugel. Ihr Mittelpunkt liegt auf der Vertikalen im Abstande $\frac{-CP}{N(A-C)}$ vom Unterstützungspunkte; ihr Radius ist gleich der Quadratwurzel aus der rechten Seite in (5'). *Die Herpolhodiekurve ist also in der That eine sphärische Kurve.*

Die Verschiedenheit der Herpolhodiekurve für verschiedene Kreisel unserer Serie folgt auch unmittelbar daraus, dafs Lage und Gröfse der Kugel von dem Trägheitsmomente $C$ abhängen. Speziell wird für den in unserer Serie enthaltenen Kugelkreisel wegen des Nenners $A-C$ der Radius unendlich grofs; gleichzeitig rückt sein Mittelpunkt ins Unendliche. Die sphärische Kurve geht also für diesen Spezialfall in eine ebene Kurve über, wie es sein mufs.

Die Einführung des Kugelkreisels empfiehlt sich namentlich auch wegen eines eigentümlichen *Reciprocitätsgesetzes*, welches für die Bewegung des Kugelkreisels Platz greift. Wir behaupten:

*Die umgekehrte Bewegung, d. h. die relative Drehung des Raumes gegen den als fest gedachten Kreisel, ist beim Kugelkreisel wieder eine Kreiselbewegung.*

Geometrisch sehen wir die Richtigkeit dieses Satzes ein, wenn wir uns im Einzelnen überlegen, dafs bei der direkten Bewegung des Kugelkreisels Figurenaxe und Vertikale dieselbe Rolle spielen, wie bei der umgekehrten Bewegung Vertikale und Figurenaxe oder, genauer gesagt, wie die zur Vertikalen und zur Figurenaxe diametralen Halbstrahlen.

Der analytische Beweis besteht in Folgendem: Wir setzen in den Gleichungen (7') und (8) von pag. 222, 223 $C = A$ und vertauschen $n$ mit $-N$ und $N$ mit $-n$, was einer Vertauschung der Vertikalen mit dem zur Figurenaxe diametralen Halbstrahle u. s. w entspricht, während wir unsere dritte Integrationskonstante $k$ ungeändert lassen. Alsdann bleibt der Ausdruck $U$ und mithin auch die Funktion $t$ von $u$ ungeändert. Gleichzeitig geht $\psi$ in $-\varphi$ und $\varphi$ in $-\psi$ über. Wir wissen aber aus dem ersten Kapitel (s. pag. 30, 31), dafs die Umänderung von $\vartheta$, $\psi$, $\varphi$ in $\vartheta$, $-\varphi$, $-\psi$ dem Übergange von der direkten zu der umgekehrten Drehung entspricht. Die umgekehrte Bewegung ist also in der That wieder eine Kreiselbewegung; sie ist durch die wesentlichen Konstanten $-N$, $-n$, $k$ charakterisiert, wenn die entsprechenden Konstanten der direkten Bewegung $n$, $N$, $k$ lauten.

Dieses Reciprocitätsgesetz ist natürlich nur durch die besonderen Symmetrieverhältnisse des Kugelkreisels bedingt. Bei allgemeineren Systemen hat die umgekehrte Bewegung einen ganz anderen kinetischen Charakter wie die direkte, worauf bereits pag. 12 hingewiesen. Schon bei dem symmetrischen Kreisel verliert unser Reciprocitätsgesetz seine Gültigkeit, weil in diesem Falle bei der Konstruktion des Drehungsvektors aus dem Impulsvektor die Figurenaxe und die Vertikale nicht gleichberechtigt auftreten. Analytisch kommt dieses darin zum Ausdrucke, dafs in dem Ausdrucke von $\varphi$ in Gleichung (8) von pag. 223 das Glied

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t$$

auftritt, welches bei der Vertauschung von $n$, $N$ mit $-N$, $-n$ nicht ungeändert bleibt.

Wir werden später aus dem somit festgestellten Reciprocitätsgesetze des Kugelkreisels einen namhaften Vorteil bei der Berechnung unserer Impulskurven bez. unserer Polhodie- und Herpolhodiekurven ziehen. Wenn wir nämlich etwa die Polhodiekurve oder, was beim Kugelkreisel auf dasselbe herauskommt, die „zweite Impulskurve" irgendwie gefunden haben, so können wir die Gleichungen der Herpolhodiekurve oder die der „ersten Impulskurve" unmittelbar herstellen. Es liegt nämlich, wie pag. 14 bemerkt, die Polhodiekurve der direkten Bewegung hinsichtlich des Unterstützungspunktes diametral zur Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung. Aus der Herpolhodiekurve der umgekehrten Bewegung entsteht aber die Herpolhodiekurve der direkten auf Grund unseres Reciprocitätsgesetzes durch Vertauschung von $n$, $N$ mit $-N$, $-n$. Mithin können wir folgende Regel zur Ableitung der Herpolhodiekurve aus der als bekannt vorausgesetzten Polhodiekurve aussprechen:

*Man kehre die Koordinaten $p$, $q$, $r$ der Polhodiekurve, welche als Funktionen der Zeit und der Integrationskonstanten $n$, $N$ und $k$ gefunden sein mögen, im Vorzeichen um und schreibe $-N$, $-n$ an Stelle von $n$, $N$. Dann gehen die Koordinaten $p$, $q$, $r$ der Polhodiekurve in die Koordinaten $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ der Herpolhodiekurve über. In derselben Weise ergeben sich aus den Koordinaten $L$, $M$, $N$ der zweiten Impulskurve die Koordinaten $l$, $m$, $n$ der ersten.*

Wir stellen hierunter die wichtigsten der bisher gewonnenen Formeln für den Spezialfall des Kugelkreisels zum leichteren Gebrauch zusammen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) von pag. 222 folgt für einen Kugelkreisel vom Trägheitsmomente $A$:

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \varphi' = \frac{N - nu}{A(1-u^3)}, \quad u = \cos\vartheta; \tag{6}$$

die Gleichungen (8) von pag. 223 gehen über in

$$\left\{\begin{aligned} t &= \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \psi &= \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \varphi &= \int \frac{N - nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2); \tag{7'}$$

die Integraldarstellungen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ endlich lauten jetzt nach pag. 231:

$$\left\{\begin{aligned} \lg\alpha &= \int \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\beta &= \int \frac{A\sqrt{U} - i(n-N)}{2A(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\gamma &= \int \frac{A\sqrt{U} + i(n-N)}{2A(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}}, \\ \lg\delta &= \int \frac{A\sqrt{U} - i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Der Übergang zu einem symmetrischen Kreisel vom Trägheitsmomente $C \gtrless A$ wird hinterher einfach dadurch bewerkstelligt, dafs wir den vorstehenden Werten von $\varphi$ bez. $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$, $\lg\delta$ den Term

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \quad \text{bez.} \quad \pm\frac{i}{2}N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)t \tag{9}$$

hinzufügen.

## § 6. Kontrolle der in den ersten Paragraphen entwickelten Bewegungsformen des Kugelkreisels; die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $e = 0$.

Nachdem wir im vierten Paragraphen die allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung festgestellt und damit eine erste Kontrolle für die anschaulichen Entwickelungen der ersten Paragraphen erhalten haben, wollen wir nun eine detailliertere Einsicht in die Gestalt der Bahnkurven zu gewinnen suchen, soweit dieses auf analytisch-algebraischem Wege ohne ein näheres Eingehen auf die Theorie der elliptischen Integrale möglich ist. Wir werden zu dem Zwecke untersuchen, wie die Gestalt der Bahnkurven von den Konstanten $n$, $N$ und $k$ abhängt. Dabei können wir uns nach dem vorigen Paragraphen auf den Fall eines Kugelkreisels, dessen Trägheitsmoment wir mit $A$ bezeichnen, beschränken.

Zunächst wollen wir in der Wahl der Integrationskonstanten eine Änderung vornehmen. Wir wollen nämlich statt der Konstanten $k$, welche keine hinreichend einfache geometrische Bedeutung hat und welche überdies, damit die zugehörige Bewegung reell ausfällt, gewissen ziemlich komplizierten Ungleichungen zu unterwerfen ist, eine neue Konstante einführen, welche uns die Anfangslage der Figurenaxe gegen die Vertikale angiebt. Und zwar wählen wir die Anfangszeit, von der aus wir die Bewegung verfolgen, wie bereits pag. 199 verabredet, so dafs in ihr die Kreiselspitze einen höchsten oder tiefsten Punkt ihrer Bahnkurve auf der Einheitskugel einnimmt. Die Anfangsneigung ($\vartheta_0$) der Figurenaxe ist alsdann nach pag. 227 bestimmt durch eine der zwischen $-1$ und $+1$ gelegenen Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$. Bezeichnen wir diese Wurzel mit $e$, so haben wir $\cos \vartheta_0 = e$.

Wir können nun die Konstante $k$ aus $U$ eliminieren und statt ihrer $e$ einführen. Dies geschieht folgendermafsen. Nach der Gleichung (7′) des vorigen Paragraphen haben wir:

$$\frac{A^2 U}{1 - u^2} = -\frac{(Nu - n)^2}{1 - u^2} + k - N^2 - 2\,APu.$$

Setzen wir $u = e$, so soll die linke Seite verschwinden; es besteht also die weitere Gleichung:

$$0 = -\frac{(Ne - n)^2}{1 - e^2} + k - N^2 - 2\,APe.$$

Nehmen wir die Differenz der beiden Gleichungen, so ergiebt sich als Resultat der Elimination von $k$:

$$A^2 U = -(Nu - n)^2 + \frac{(Ne - n)^2 (1 - u^2)}{1 - e^2} - 2\,AP(u - e)(1 - u^2).$$

Da die rechte Seite für $u = e$ verschwinden muſs, so können wir $u - e$ als Faktor herausziehen. Wir setzen dementsprechend, indem wir auf gleichen Nenner bringen:

$$U = \frac{u - e}{A^2(1 - e^2)} U_1, \tag{1}$$

wo $U_1$, wie man leicht nachrechnet, folgenden Wert hat:

$$U_1 = -(u + e)(n^2 + N^2) + 2Nn(1 + eu) - 2AP(1 - e^2)(1 - u^2). \tag{2}$$

Indem wir so eine der Wurzeln unserer kubischen Gleichung $U = 0$ als vorgegeben ansehen (indem wir, wie man sich ausdrückt, diese Wurzel adjungieren), hängt die Bestimmung der übrigen nur noch von einer quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ ab. Von ihren beiden Wurzeln bestimmt uns diejenige, welche zwischen $-1$ und $+1$ gelegen ist, den anderen Parallelkreis $u = e'$, welcher zusammen mit dem bekannten Parallelkreise $u = e$ die Bahnkurve der Kreiselspitze auf der Einheitskugel eingrenzt.

Die Einführung der Konstanten $e$ bringt also einen doppelten Vorteil mit sich: 1) wird die wenig anschauliche Konstante $k$ durch eine Gröſse ersetzt, welche in der Anfangslage der Figurenaxe und in der Gestalt der Bahnkurve unmittelbar zum Ausdruck kommt, 2) wird die kubische Gleichung $U = 0$ durch eine leicht lösbare quadratische Gleichung $U_1 = 0$ ersetzt. Wir werden daher im Folgenden $n$, $N$ und $e$ als die wesentlichen Elemente der Kreiselbewegung ansehen und gelegentlich als Integrationskonstanten bezeichnen.

Indem wir nun zu einer genaueren Untersuchung der Bahnkurvengestalten übergehen, werden wir vor allem zu wissen wünschen, wie die Lage des zweiten Begrenzungskreises $u = e'$ von der Wahl der Integrationskonstanten abhängt. Da es unsere nächste Absicht ist, die Serie der Figuren 24 bis 35 einer näheren Kontrolle zu unterziehen, nehmen wir, wie im ersten Paragraphen, durchweg an, daſs die Figurenaxe anfangs horizontal steht, und setzen dementsprechend für's erste $e = 0$.

In den Figuren 24 bis 28 hatte $n$ den festen Wert null, während $N$ variirt wurde. Setzen wir also $e = n = 0$ und etwa $N = v$, so stellt uns die Gleichung $U_1 = 0$ die fragliche Abhängigkeit zwischen $u$ und $v$, d. h. zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und der Gröſse des Eigenimpulses $v = N$ dar. Diese Gleichung lautet jetzt folgendermaſsen:

$$uv^2 = -2AP(1 - u^2). \tag{3}$$

Während sie in $u$ vom zweiten Grade ist, erhöht sich ihr Grad wieder

auf 3, sobald wir, wie es jetzt geschehen mufs, $u$ und $v$ gleichzeitig als Variabele ansehen. Um die Abhängigkeit zwischen diesen Gröfsen bequem übersehen zu können, deuten wir sie als rechtwinklige Koordinaten in einer $uv$-Ebene, $u$ als Abscisse, $v$ als Ordinate und erhalten so als Bild der Gleichung $U_1 = 0$ *eine Kurve dritter Ordnung* („eine $C_3$").

Die Gestalt dieser $C_3$ ist leicht zu übersehen. Zu jeder Abscisse $u$ gehört ein Paar entgegengesetzt gleicher (nicht notwendig reeller) Werte $\pm v$; die Gerade $u = \text{const.}$ schneidet also die Kurve in zwei zur Abscissenaxe spiegelbildlich gelegenen Punkten; die Kurve selbst liegt zu dieser Axe symmetrisch. Zusammenrücken können zwei solche Punkte nur, wenn $\pm v = 0$ oder $= \infty$ wird, in welchem Falle die betr. Gerade $u = \text{const.}$ unsere $C_3$ berührt. Nun haben wir nach Gleichung (3) $v = 0$, wenn $u = \pm 1$, und $v = \infty$, wenn $u = 0$ oder $= \infty$ wird. Unsere Kurve besitzt hiernach in den Punkten $u = \pm 1$, $v = 0$ je eine vertikale Tangente und hat die Ordinatenaxe zur Asymptote.

Bemerken wir ferner, dafs rechts von der Ordinatenaxe die linke Seite unserer Gleichung (3) positiv ist. Die rechte Seite ist aber, da wir wie in § 1 $P < 0$ voraussetzen wollen, nur solange positiv, als $u < 1$ ist. Infolgedessen giebt es rechts von der Geraden $u = +1$ keine reellen Kurvenpunkte. In entsprechender Weise sieht man, dafs innerhalb des Streifens links von der Ordinatenaxe und rechts von der Geraden $u = -1$ keine Kurvenpunkte liegen können. Die Kurve mufs daher (vgl. Fig. 39) an der Stelle $u = +1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein und wird sich von hier aus der Geraden $u = 0$ asymptotisch nähern. Desgleichen wird die Kurve an der Stelle $u = -1$, $v = 0$ nach links hin geöffnet sein, von wo aus sie parabelähnlich ins Unendliche verläuft. Unsere $C_3$ besteht also aus zwei getrennten Zügen, welche wir als „paaren" und „unpaaren" Zug unter-

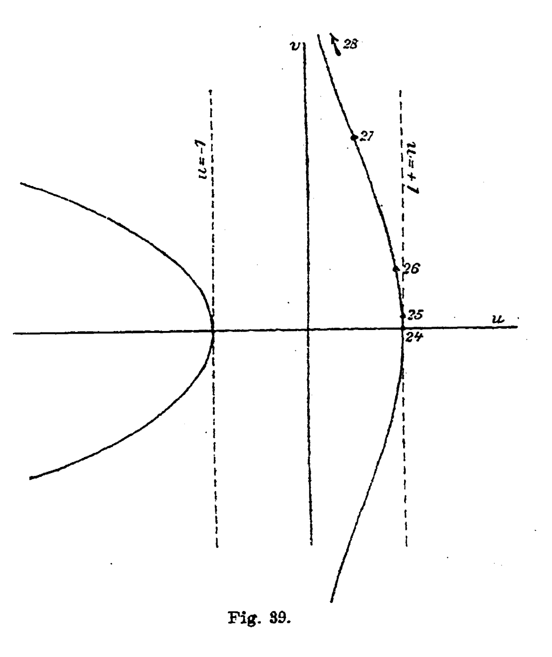


Fig. 39.

scheiden. Der unpaare Zug ist der in dem Streifen $0 < u < 1$ enthaltene, der paare Zug ist unser parabelähnlicher Ast.

Auf Grund dieser Figur können wir unsere früheren Schlüsse über die Abänderung des Parallelkreises $u = e'$ bei wachsendem $N$ vollkommen bestätigen. Natürlich kommen für die Mechanik nur solche Abscissenwerte $v$ in Betracht, welche zwischen $-1$ und $+1$ enthalten sind. Sehen wir also von dem isolierten Punkte $u = -1$ ab, welchem, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, eine ganz besondere Art der Bewegung entspricht, so haben wir uns mit dem unpaaren Zuge zu beschäftigen. Wir ziehen die Parallele zur $u$-Axe $v = N$ und lassen $N$ von Null aus wachsen. Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit dem unpaaren Zuge giebt uns den zu $N$ gehörigen Wert von $e'$. Dem Falle $N = 0$ entspricht die gewöhnliche Pendelbewegung, bei der $e' = 1$ ist, bei der sich also der Parallelkreis $e'$ auf den Nordpol der Einheitskugel reduziert. Bei wachsendem $N$ nimmt $e'$, wie die Figur zeigt, successive ab, unser Parallelkreis erweitert sich also und nähert sich für $N = \infty$ asymptotisch dem Äquator. Die Bewegung geht dabei, in Übereinstimmung mit Fig. 28, in unsere pseudoreguläre Präcession über.

Wir verifizieren auch leicht das Auftreten von Spitzen in den Figuren 25 bis 28. Nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen haben wir im Falle $n = 0$:

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{-Nu}{A^2(1-u^2)} \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

Auf dem Äquator $u = 0$ wird die rechte Seite null, weil $\sqrt{U}$ von niederer Ordnung verschwindet wie $u$. Hier mufs also die Bahnkurve im stereographischen Bilde radial verlaufen; da sie aber den Äquator nicht überschreiten kann, mufs sie auch in radialer Richtung zurücklaufen, so dafs sie in der That eine Spitze bildet.

Hieran mögen sich einige Angaben über die den Figuren 25 bis 28 zu Grunde liegenden numerischen Werte schliefsen, soweit sie sich auf die Lage der begrenzenden Parallelkreise beziehen. Wir haben bei der Herstellung dieser Figuren $A = 1$, $P = -1$ angenommen, Werte, welche sich übrigens durch Wahl geeigneter Einheiten für die Messung von Länge und Zeit stets erreichen lassen. Die numerischen Werte von $N$ und die zugehörigen Werte von $e'$ werden durch die folgende Tabelle geliefert bez. durch unsere obige Kurve, in welcher die Nummern der betr. Figuren an den repräsentierenden Stellen $(u, v)$ des unpaaren Zuges eingetragen sind.

| | | |
|---|---|---|
| Fig. 24 | $e' = 1$ | $N = 0$ |
| „ 25 | $\frac{99}{100}$ | $\sqrt{\frac{398}{9900}} = 0{,}20$ |
| „ 26 | $\frac{9}{10}$ | $\sqrt{\frac{19}{45}} = 0{,}65$ |
| „ 27 | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3} = 1{,}73$ |
| „ 28 | $0$ | $\infty$ |

Bei einem negativen Werte von $N$ ergiebt sich, wegen der symmetrischen Lage unserer $C_3$ gegen die Abscissenaxe, genau dieselbe Gröfse des Parallelkreises und dieselbe Bahnkurve wie bei positivem $N$, was übrigens auch mechanisch evident ist. Insoweit war also die im ersten Paragraphen festgehaltene Beschränkung auf positive Werte von $N$ wohlbegründet.

Unsere bisherigen Betrachtungen geben uns gleichzeitig Aufschlufs über die Bewegung des Kugelkreisels im Falle $N = 0$ bei variablem $n$. In der That bestimmt sich nach Gleichung (2) — in Übereinstimmung mit dem Reciprocitätsgesetz des vorigen Paragraphen — die Lage des Parallelkreises in diesem Falle wiederum durch die Gleichung (3) bez. durch unsere Fig. 39, in welcher alsdann $v$ die Impulskomponente $n$ bedeuten wird. Wir haben diese durch $N = 0$ charakterisierten Bahnkurven des Kugelkreisels als Bahnkurven des sphärischen Pendels bezeichnet. Wir können diese Bezeichnung nachträglich auf Grund des vorigen Paragraphen rechtfertigen.

Ein Pendel ist allerdings kein Kugelkreisel, sondern ein symmetrischer Kreisel von spezieller Beschaffenheit. Es ist nämlich bei diesem das Trägheitsmoment um die Figurenaxe, d. h. um die Axe des Stabes, an dessen Ende der Massenpunkt befestigt ist, gleich null, während das Trägheitsmoment um eine dazu senkrechte Axe gleich $ml^2$ ist, wo $m$ die Masse des Punktes, $l$ die Länge des Stabes bedeutet. Gleichzeitig mit dem Trägheitsmoment um die Figurenaxe ist natürlich auch der Eigenimpuls des Pendels notwendig gleich null. Nun sahen wir aber, dafs ein symmetrischer Kreisel dieselbe Bahnkurve beschreibt, wie ein Kugelkreisel von gleichem Schwere- und äquatorialem Trägheitsmoment und gleichen Impulskonstanten $N$, $n$, $k$. Infolgedessen sind wirklich im Falle $N = 0$ die Bahnkurven unseres Kugelkreisels zugleich Bahnkurven eines gewissen sphärischen Pendels.

Wir wollen hiermit die in dem Schema 36 auf den Axen $n = 0$ bezw. $N = 0$ gelegenen Figuren als erledigt ansehen und wenden uns nun zu den Fällen, wo keine unserer beiden Impulskomponenten $n$, $N$ verschwindet, insbesondere also zu den Figuren 29 bis 35.

In diesen Figuren haben wir den Wert von $N$ festgehalten und den von $n$ variiert. Wir wollen dementsprechend in Gleichung (2) $n = v$ und übrigens wie früher $e = 0$ setzen. Alsdann wird die gegenseitige Abhängigkeit zwischen der Lage des Begrenzungskreises $u = e'$ und dem seitlichen Anstofse $v = n$ durch die Gleichung gegeben:

$$u(v^2 + N^2) - 2Nv + 2AP(1 - u^2) = 0, \tag{4}$$

welche uns wieder eine *Kurve dritter Ordnung* repräsentiert.

Um ihre Gestalt zu bestimmen, suchen wir wie oben die vertikalen Tangenten auf. Zwei derselben haben die Gleichung $u = \pm 1$; in der That schneiden diese Geraden unsere $C_3$ in zwei zusammenfallenden Punkten, da sich für $u = \pm 1$ die Gleichung (4) auf

$$(v \mp N)^2 = 0$$

reduziert. Die Berührungspunkte liegen hiernach an den Stellen $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Aufser diesen zwei (zusammenfallenden) Schnittpunkten müssen aber die Geraden $u = \pm 1$ mit unserer $C_3$ noch einen dritten Schnittpunkt haben, welcher nur im Unendlichen liegen kann. Die Kurve erstreckt sich also in vertikaler Richtung ins Unendliche. Asymptote wird die Gerade $u = 0$. Tragen wir nämlich diesen Wert in (4) ein, so ergiebt sich nur ein zugehöriger Ordinatenwert

$$v_1 = \frac{AP}{N}.$$

Die Gerade $u = 0$ mufs daher die $C_3$ im Unendlichen berühren.

Wir fragen sodann, ob es aufser den gefundenen drei noch weitere vertikale Tangenten giebt. Das allgemeine Kriterium für das Auftreten vertikaler Tangenten wird dieses sein, dafs die Gleichung $U_1 = 0$, als Gleichung in $v$ aufgefafst, eine Doppelwurzel ergiebt, wenn für $u$ der betr. Abscissenwert einer vertikalen Tangente eingetragen wird. In $v$ ist die Gleichung $U_1 = 0$ quadratisch. Die Bedingung für das Auftreten einer Doppelwurzel bei der quadratischen Gleichung $av^2 + 2bv + c = 0$ wird aber durch Nullsetzen der Discriminante $ac - b^2$ geliefert. Die Ausrechnung dieser Bedingung giebt in unserem Falle:

$$(1 - u^2)(N^2 - 2APu) = 0.$$

Wir sehen also, dafs aufser den Geraden $u = \pm 1$ auch

$$u_2 = \frac{N^2}{2AP}$$

eine vertikale Tangente ist. Ihr Berührungspunkt hat die Ordinate

$$v_2 = -\frac{b}{a} = \frac{N}{u_2} = \frac{2AP}{N}.$$

Es kommt nun wesentlich auf die Lage dieser Tangente gegen die vorher gefundenen an. Jedenfalls liegt sie, da wir $P < 0$ voraussetzen,

linkerhand von der Asymptote $u = 0$. Es fragt sich aber ferner, ob sie auch links oder rechts von der Tangente $u = -1$ verläuft. Da es uns hier nur auf eine Kontrolle der Figuren des ersten Paragraphen ankommt, legen wir die pag. 242, 243 genannten Zahlenwerte $A = -P = 1$, $N = 0{,}20$ zugrunde und behalten uns vor, im folgenden Paragraphen die Gestalt der $C_3$ unter allgemeineren Annahmen zu untersuchen. Der numerische Wert der Abscisse unserer vierten Tangente wird daraufhin

$$u_2 = -0{,}02 > -1.$$

Wir können jetzt in das von unseren vier vertikalen Tangenten gebildete Gerüst die Kurve dritter Ordnung eintragen. Beginnen wir die Zeichnung im Punkte $u = 1$, $v = N$. Die Kurve verläuft hier vertikal und nähert sich nach oben hin asymptotisch der Ordinatenaxe. Setzen wir sie nach unten hin fort, so überschreitet sie die Ordinatenaxe im Punkte $u = 0$, $v = v_1$, berührt die Gerade $u = u_2$ im Punkte $v = v_2$ und nähert sich dann asymptotisch der negativen Ordinatenaxe. Aufserdem setzt sich im Punkte $u = -1$, $v = -N$ ein zweiter parabelähnlicher Kurvenast an. Die Kurve besteht also wieder aus einem „paaren" und einem „unpaaren" Zuge von vertikaler Erstreckung, welcher letzterer mechanisch allein wichtig ist. Übrigens haben wir in der Zeichnung (vgl. Fig. 40) wegen des ziemlich kleinen Wertes von $N$ ($N = 0{,}20$) die Mafseinheit auf der Vertikalen fünfmal so klein wählen müssen, wie auf der Horizontalen.

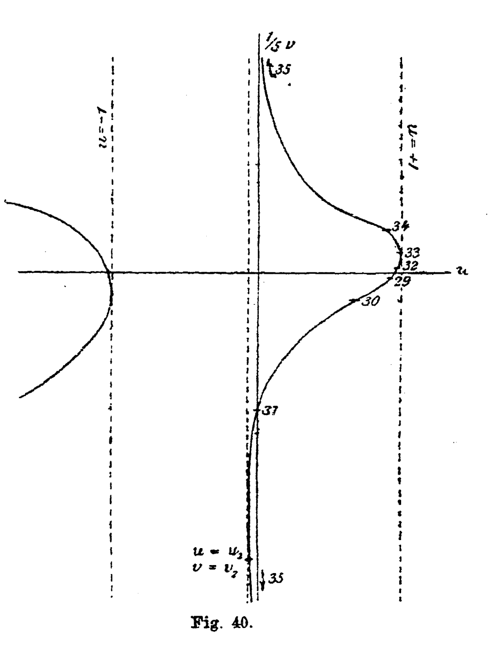



Fig. 40.

Wir haben nun in dieser $C_3$ ein vollständiges Bild der Veränderungen vor uns, welche die Lage des zweiten Begrenzungskreises bei Veränderung des seitlichen Anstofses erfährt. Ziehen wir nämlich die Parallele $v = n$ zur $u$-Axe, so trifft diese den unpaaren Zug in einem Punkte, dessen Abscisse die Gröfse des Kreises $u = e'$ angiebt. Geben wir jener Geraden alle möglichen Lagen zwischen $v = -\infty$ und $v = +\infty$, so durchläuft der Schnittpunkt den ganzen unpaaren Zug.

Wir wollen diesen Vorgang in derselben Reihenfolge betrachten, in welcher die Figuren 29 bis 35 auf einander folgen.

Wir lassen also $n$ von dem in Fig. 25 dargestellten Falle $n = 0$ aus zunächst abnehmen, verschieben also unsere Parallele zur $u$-Axe nach unten hin. Der Wert von $e'$ verkleinert sich dabei, d. h. der zweite Begrenzungskreis erweitert sich, bis er (für $e' = e = 0$) mit dem Äquator zusammengefallen ist. Die Bewegung geht dann in den Fall der langsamen Präcession über; der entsprechende Punkt unserer $C_3$ ist ihr Schnittpunkt mit der Ordinatenaxe, welchem, wie wir oben sahen, die Ordinate

$$v_1 = n = \frac{AP}{N}$$

zukommt; derselbe Wert von $n$ wurde bereits pag. 202 für die langsame Präcession abgeleitet.

Wir gehen jetzt wieder zu der Lage $v = 0$ unserer Geraden zurück und verschieben sie nach oben, indem wir $n$ wachsen lassen. Dabei wächst der Wert von $e'$ eine Zeit lang, d. h. unser Begrenzungskreis verengert sich, bis er sich (für $e' = 1$) auf den Nordpol der Einheitskugel zusammengezogen hat. Der zugehörige Wert von $n$ ist, wie wir unserer $C_3$ entnehmen,

$$n = N.$$

Von da ab nimmt bei weiter wachsendem $n$ der Wert von $e'$ ab; der Begrenzungskreis erweitert sich und geht für $n = \infty$ asymptotisch in den Äquator über; die Bahnkurve nähert sich mehr und mehr der in Fig. 35 dargestellten schnellen regulären Präcession.

Es bleiben nur noch diejenigen Fälle übrig, welche bei negativem $n$ den Übergang bilden zwischen der langsamen und der schnellen Präcession. Der zweite Begrenzungskreis $e'$ bleibt bei allen diesen Fällen dem Äquator sehr nahe und liegt, wie unsere $C_3$ zeigt, auf der südlichen Hemisphäre der Einheitskugel ($e' < 0$). Zunächst verengert er sich ein wenig bis zu dem extremen Werte $u_2$, welcher unter den unseren Figuren zu Grunde liegenden Verhältnissen gleich $-0{,}02$ ist und dem Werte $v_2 = n = -10$ entspricht. Von da ab nimmt er wieder zu und geht für $v = -\infty$ in den Äquator über. In dem Umstande, dafs dieser ganze Teil der $C_3$ der Ordinatenaxe aufserordentlich nahe liegt, erkennen wir den Grund, warum wir früher (vgl. pag. 214) für die entsprechenden Fälle der Kreiselbewegung keine deutliche Bahnkurve zeichnen konnten.

Die numerischen Daten, welche den Figuren 29 bis 35 zu Grunde liegen, stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen; sie sind auch aus der Stellung der bez. Nummern in unserer $C_3$ zu ersehen.

$$A = -P = 1, \quad N = 0{,}20.$$

| Fig. | $e'$ | $n$ |
|---|---|---|
| Fig. 29 | $e' = 0{,}96$ | $n = -0{,}20$ |
| „ 30 | 0,67 | $-1$ |
| „ 31 | 0 | $-5 = \frac{AP}{N}$ |
| „ 32 | 0,9964 | $+0{,}08$ |
| „ 33 | 1 | $+0{,}20 = N$ |
| „ 34 | 0,87 | $+1$ |
| „ 35 | 0 | $\pm\infty$. |

Wohlgemerkt entspricht unsere $C_3$, sowie unsere Figurenserie 29—35 nur einem ganz bestimmten und zwar einem kleinen Werte von $N$. Wenn man diesen Wert wachsen läſst, wird sich auch die Gestalt der $C_3$, sowie die Serie unserer Bahnkurven verändern. Der Erfolg wird nämlich der sein: Es wird sich bei wachsendem $N$ der oberhalb der Abscissenaxe gelegene Teil der $C_3$ in die Länge strecken; der untere Teil wird gedrungener werden, indem die vertikale Tangente $u_2 = \frac{N^2}{2AP}$ nach links wandert und gleichzeitig ihr Berührungspunkt $v_2 = \frac{2AP}{N}$ der Abscissenaxe näher rückt. Eine wesentliche qualitative Änderung in dem Verlauf der Bahnkurven wird sich aber erst ergeben, wenn die genannte vertikale Tangente über die Gerade $u = -1$ nach links hinausrückt, worauf wir im folgenden Paragraphen ausführlich eingehen werden.

Wir bemerken hier nur noch, daſs bei einer Vorzeichenumkehr von $N$ die $C_3$ eine Spiegelung an der Abscissenaxe erleidet. In der That bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ ungeändert, wenn wir gleichzeitig $N$ mit $-N$ und $n$ mit $-n$ vertauschen. Infolgedessen ergiebt sich bei einem negativen Werte von $N$ dieselbe Serie der Bahnkurven wie bei dem entsprechenden positiven Werte, nur in umgekehrter Reihenfolge.

Wir erwähnen schlieſslich, daſs auch in dem früher citierten Werke von Routh*) ein Ansatz zur geometrischen Diskussion der Gleichung dritten Grades $U = 0$ gegeben wird.

## § 7. Die charakteristischen Kurven dritter Ordnung bei beliebiger Lage des Ausgangskreises $e$; Unterscheidung zwischen starken und schwachen Kreiseln.

Wir haben jetzt die Überlegungen des vorigen Paragraphen noch einmal in gröſserer Allgemeinheit anzustellen und namentlich zuzusehen, inwiefern die im zweiten Paragraphen entwickelte Figurenserie wegen

*) Rigid dynamics, advanced part, pag. 114, art. 204.

der dort getroffenen besonderen Voraussetzungen (z. B. $e = 0$) zu speziell ausfiel. Wir lassen also jetzt die Lage des Ausgangskreises $e$ beliebig und legen dementsprechend die Gleichung $U_1 = 0$ in der Form von pag. 240 zu Grunde. Da diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn wir $n$ und $N$ gegeneinander vertauschen, können wir uns darauf beschränken, die Abhängigkeit der Bahnkurven von einer dieser Gröfsen, z. B. von $n$ zu betrachten und $N$ als einen festen Parameter anzusehen, dessen Gröfse allerdings nicht unwesentlich ist. Wir setzen wieder $n = v$; die Abhängigkeit zwischen $u$ und $v$ wird dann durch die Kurve dritter Ordnung dargestellt:

$$(1) \quad -(u+e)(v^2+N^2)+2Nv(1+eu)-2AP(1-e^2)(1-u^2)=0.$$

Indem wir auch hier nach den vertikalen Tangenten der Kurve fragen, haben wir die Überlegungen von pag. 244 von Neuem anzustellen. Zwei dieser Tangenten (I und II) sind wie früher durch $u = \pm 1$ gegeben; ihr Berührungspunkt ist $v = \pm N$. Ferner giebt es auch hier eine vertikale Gerade (III), welche die Kurve im Unendlichen berührt Sie hat die Gleichung $u = -e$ und schneidet die Kurve noch in dem Punkte

$$v = \frac{AP}{N}(1-e^2)$$

Eine vierte vertikale Tangente (IV) folgt wie pag. 244 durch Nullsetzen der „Discriminante", welcher man hier durch eine kleine Rechnung die Form giebt:

$$(N^2 - 2AP(u+e))(1-e^2)(1-u^2).$$

Unsere vierte vertikale Tangente ist also die Gerade

$$(2a) \qquad u = -e + \frac{N^2}{2AP}$$

mit dem Berührungspunkte

$$(2b) \qquad v = Ne + \frac{2AP}{N}(1-e^2).$$

Diese Gerade liegt, bei negativem $P$, wegen (2a) jedenfalls links, bei positivem $P$ rechts von der Asymptote $u = -e$. Wir müssen aber weiter zwei Unterfälle unterscheiden, je nachdem diese Gerade bei negativem (positivem) $P$ auch links (rechts) von der Geraden $u = -1$ ($u = +1$) liegt oder rechts (links) von derselben. Die Bedingungen hierfür lauten beziehungsweise:

$$P<0 \begin{cases} -e+\frac{N^2}{2AP}<-1, \\ -e+\frac{N^2}{2AP}>-1, \end{cases} \qquad P>0 \begin{cases} -e+\frac{N^2}{2AP}>+1, \\ -e+\frac{N^2}{2AP}<+1. \end{cases}$$

Ob die eine oder andere dieser Ungleichungen erfüllt ist, hängt bei gegebener Massenverteilung und gegebener Anfangslage des Kreisels von der Stärke seines Eigenimpulses ab. *Wir unterscheiden danach zwei Kreiselarten, welche wir als starke und schwache Kreisel bezeichnen;* dieselben sollen im Falle $P < 0$ bez. $P > 0$ durch die mit den vorstehenden identischen Ungleichungen definiert sein:

$$(3)\qquad P < 0 \begin{cases} N^2 > -2AP(1-e) \cdots & \text{starker Kreisel,} \\ N^2 < -2AP(1-e) \cdots & \text{schwacher Kreisel;} \end{cases}$$

$$(3')\qquad P > 0 \begin{cases} N^2 > +2AP(1+e) \cdots & \text{starker Kreisel,} \\ N^2 < +2AP(1+e) \cdots & \text{schwacher Kreisel.} \end{cases}$$

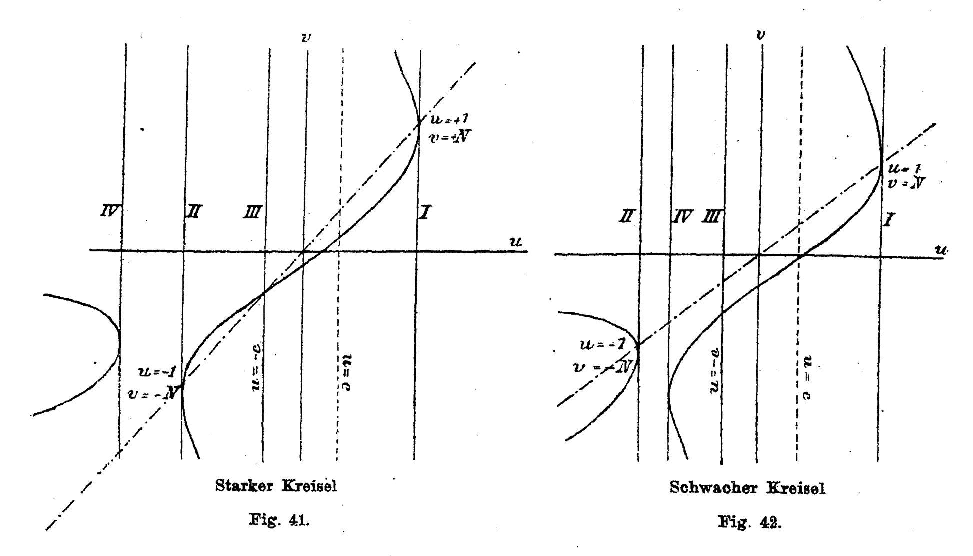
Man kann bemerken, dafs unsere Unterscheidung keine absolute ist, sondern von der Anfangslage $e$ des Kreisels abhängt. Beispielsweise ist bei positivem $P$ im Fall $e = -1$, wo die Bahnkurve im Südpole der Kugel beginnt, jeder Kreisel ein starker Kreisel.

Die Gestalt der $C_3$ fällt nun, je nachdem ein starker oder ein schwacher Kreisel vorliegt, verschieden aus. Beidemal besteht die Kurve aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Bei dem starken Kreisel durchquert aber der unpaare Zug den ganzen Vertikalstreifen zwischen $u = -1$ und $u = +1$, bei dem schwachen Kreisel ist er auf einen Teil desselben eingeschränkt, welcher durch die Geraden $u = -1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}(P < 0)$ bez. durch die Geraden $u = +1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}(P > 0)$ begrenzt wird.

(Nur in dem Grenzfalle zwischen dem starken und schwachen Kreisel, wo in (3) und (3′) statt der Zeichen $\gtrless$ das Zeichen $=$ eintritt, verschmelzen die beiden Bestandteile unserer $C_3$ mittels eines bei $u = \mp 1$, $v = \mp N$ gelegenen Doppelpunktes zu einem einzigen Kurvenzuge. Es wird nicht nötig sein, diesen Grenzfall im Folgenden ausdrücklich zu besprechen. Er vermittelt natürlich den stetigen Übergang zwischen den Bewegungen des starken und des schwachen Kreisels. Im nächsten Kapitel (vgl. namentlich § 8) werden wir nur noch auf diejenige spezielle Bewegung dieses Grenzfalles zurückzukommen haben, welche in der $C_3$ durch den Doppelpunkt selbst charakterisiert wird und welche im Hinblick auf die Theorie der kleinen Schwingungen ein besonderes Interesse beanspruchen darf.)

Um nicht zu viele Fallunterscheidungen zu haben, werden wir, wie in den ersten Paragraphen, annehmen, dafs $P < 0$ sei. Dieser Annahme entsprechen die Figuren 41 und 42. Der Fall $P > 0$ läfst sich nach pag. 198 dadurch auf $P < 0$ zurückführen, dafs wir die Bezeichnung

„Figurenaxe“ von dem einen der beiden Halbstrahlen, in welche die Symmetrieaxe der Massenverteilung durch den Unterstützungspunkt zerlegt wird, auf den anderen übertragen. Dabei ändert sich ersichtlich neben dem Vorzeichen von $P$ auch das von $N$, während die Impulskomponente $n$ ungeändert bleibt. Gleichzeitig geht der Winkel $\vartheta$




Starker Kreisel

Fig. 41.

Schwacher Kreisel

Fig. 42.

über in $\pi - \vartheta$. Es werden also auch die Gröfsen $u$, $e$, $e'$, $e''$ im Vorzeichen umzukehren sein. Hiernach ist klar, dafs wir die charakteristischen Kurven dritter Ordnung im Falle $P > 0$ aus den angezeichneten einfach dadurch erhalten, dafs wir die letzteren an der Ordinatenaxe spiegeln. Auf ihre Wiedergabe können wir füglich verzichten.

Wir machen jetzt unsere Konstruktion zur Auffindung des Begrenzungskreises $u = e'$, verschieben also die Gerade $v = n$ parallel der $u$-Axe von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ und suchen den Abscissenwert ihres Schnittpunktes mit dem unpaaren Zuge der $C_3$ auf. Hierbei tritt folgender charakteristischer Unterschied zwischen dem starken und schwachen Kreisel hervor: Bei dem starken Kreisel bestreicht die Projektion des Schnittpunktes auf die Abscissenaxe das ganze Intervall zwischen $-1$ und $+1$; bei dem schwachen Kreisel durchläuft sie nur ein Stück dieses Intervalles, welches von $u = +1$ und $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ begrenzt wird. Beidemal wird übrigens jeder Wert, der überhaupt erreicht wird, zweimal erreicht. *Dies hat zur Folge, dafs beim starken Kreisel der Parallelkreis $e'$ jede Lage auf der Kugel annehmen kann und zwar jede noch bei zwei verschiedenen Werten des $n$, dafs er da-*

*gegen beim schwachen Kreisel von einer gewissen Kugelkalotte ausgeschlossen ist, welche den Südpol der Einheitskugel umgiebt und durch den Kreis* $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ *begrenzt wird.*

Wir sehen hieraus, dafs den Figuren 29 bis 35 die Annahme eines schwachen Kreisels zu Grunde lag, weil bei diesen der gröfste Teil der südlichen Halbkugel von Bahnkurven überhaupt freiblieb. In der That ist denn auch für die früher vorausgesetzten Werte

$$N = 0{,}20, \quad A = 1, \quad P = -1, \quad e = 0$$

von den beiden Kriterien (3) das zweite erfüllt.

An der Hand unserer Figuren lassen sich jetzt weiter die verschiedenen ausgezeichneten Fälle, welche bei der Kreiselbewegung vorkommen können, das Auftreten der regulären Präcession, die Spitzenbildung u. s. w. bequem untersuchen. Dies soll im Folgenden unter einer Anzahl verschiedener Nummern geschehen.

1) Wir sehen zunächst zu, was unsere Kurven über die Möglichkeit der *regulären Präcession* aussagen. Reguläre Präcession tritt ein, wenn $e' = e$ wird. Wir ziehen daher die Gerade $u = e$; ihre Schnittpunkte mit der Kurve dritter Ordnung geben, wenn solche vorhanden sind, diejenigen Werte von $n$, welche für die reguläre Präcession erforderlich sind. Dabei unterscheiden sich wieder der starke und der schwache Kreisel:

*Beim starken Kreisel giebt es immer zwei reelle Schnittpunkte auf der Geraden* $u = e$ *und daher zwei (im allgemeinen verschiedene) Fälle möglicher Präcessionsbewegung.*

Beim schwachen Kreisel dagegen sind die Schnittpunkte nur dann reell, wenn die Gerade $u = e$ rechts von der Tangente $u = -e + \frac{N^2}{2AP}$ liegt, wenn also die Ungleichung besteht

$$4APe < N^2.$$

*Beim schwachen Kreisel giebt es also zwei Fälle oder keinen Fall regulärer Präcession, je nachdem gilt*

$$(4) \qquad 4APe < N^2 \quad \text{oder} \quad 4APe > N^2.$$

Wir bemerken noch, dafs bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe ($e = 0$) die erste unserer Ungleichungen von selbst erfüllt ist, falls nicht gerade $N = 0$ wird. Dementsprechend hatten wir im zweiten Paragraphen dieses Kapitels, trotzdem ein schwacher Kreisel vorlag, bei $N > 0$ stets zwei reelle Präcessionsfälle.

Die Werte von $n$, welche den beiden Fällen der regulären Prä-

cession entsprechen, ergeben sich natürlich aus (1), wenn wir $u = e$ setzen und die so entstehende quadratische Gleichung

$$(5) \qquad (v - Ne)(N - ve) = AP(1 - e^2)^2$$

auflösen; wir finden

$$(6) \qquad v = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + e^2) N \pm (1 - e^2) \sqrt{N^2 - 4APe}}{2e}.$$

(Es wird gut sein, dieses Resultat mit den Entwickelungen von pag. 178, 179 in Beziehung zu setzen. Wir sahen dort, dafs es bei gegebener Massenverteilung, gegebenem Werte von $\cos \vartheta = e$ und *gegebener Geschwindigkeitskomponente* $\mu$ zwei Werte der Geschwindigkeitskomponente $\nu$ giebt, welche im Falle des Kugelkreisels eine reguläre Präcession bedingen, nämlich

$$\text{(a)} \quad \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{(b)} \quad \nu = \pm \infty.$$

Unser jetziges Resultat lautet, von dem früheren scheinbar abweichend, folgendermafsen: Bei gegebener Massenverteilung, gegebener Gröfse des Parallelkreises $e$ und *gegebener Impulskomponente* $N$ entsteht eine reguläre Präcession des Kugelkreisels bei zwei Werten der Impulskomponente $n$, welche in (6) angegeben sind. Die Abweichung beruht offenbar darauf, dafs wir das eine Mal die Geschwindigkeitskomponente $\mu$, das andere Mal die Impulskoordinate $N$ festhalten; wir können uns daher nicht wundern, dafs wir für die zugehörigen Werte der Präcessionskonstanten $\nu$ bez. $n$ beidemal verschiedene Werte erhalten.

Um die Beziehung zwischen den Wurzeln $n_1, n_2$ und den früher unterschiedenen Fällen (a) und (b) noch genauer zu verfolgen, bemerken wir, dafs beide Wurzeln $n_1, n_2$ dem Falle (a) entsprechen. In der That zeigen wir leicht, dafs unsere Gleichung (5) mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gewonnenen Gleichung $P = A\mu\nu$, welche uns die Wurzel (a) lieferte, identisch ist. Benutzen wir nämlich die pag. 238 in Gleichung (6) angegebenen Werte von $\psi'$ und $\varphi'$ und berücksichtigen wir, dafs diese bei der regulären Präcession bez. den Konstanten $\nu$ und $\mu$ gleich werden, so haben wir

$$(7) \qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1 - e^2)}.$$

Infolgedessen geht die Gleichung (5) wirklich in die Beziehung $P = A\mu\nu$ über, welche aussagt, dafs die Drehkraft der Schwere mit dem Trägheitswiderstand des Kugelkreisels im Gleichgewichte steht.

Wir überzeugen uns ferner, dafs der Fall (b) der Präcession, bei welcher $\mu$ einen gegebenen endlichen Wert hat und $\nu$ unendlich grofs ist, von einer Ausnahme abgesehen einem unendlich grofsen Werte von

$N$ entspricht. Hierzu diene die nebenstehende Figur, in welcher der Endpunkt des Rotationsvektors auf der durch den Endpunkt der Komponente $\mu$ gezogenen Parallelen zur Vertikalen in unendlicher Entfernung zu denken ist. Projizieren wir diesen Vektor senkrecht auf die Figurenaxe, so ergiebt sich, unter $\Omega$ die Länge des Rotationsvektors verstanden, als Länge der Orthogonalprojektion auf die Figurenaxe $r = \Omega \cos \vartheta = \infty$, so dafs auch die Impulskomponente $N$ unendlich grofs wird.

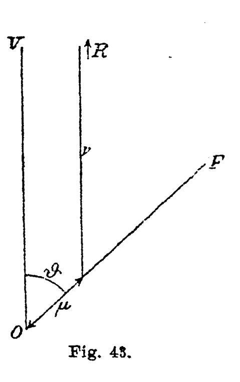


Fig. 43.

Der angedeutete Ausnahmefall ist der Fall $e = 0$, in welchem die Wurzeln (a), (b) bez. den (durch $A$ dividierten) Wurzeln $n_1, n_2$ gleich werden. In der That sind unter der Annahme $e = 0$ die Parallelkomponenten $\nu$ und $\mu$ des Rotationsvektors zugleich Orthogonalkomponenten bezüglich der Vertikalen und der Figurenaxe. Dementsprechend finden wir dann aus (6) durch den Grenzübergang $e = 0$ direkt die Wurzeln (a) und (b) wieder, nämlich

$$\text{(a)} \quad \frac{n_1}{A} = \nu = \frac{P}{A\mu}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{n_2}{A} = \nu = \pm\infty.$$

Trotz des somit gekennzeichneten Unterschiedes möge es gestattet sein, auch die beiden Fälle regulärer Präcession, welche bei gegebenem $N$ möglich sind, ebenso wie die beiden Fälle, welche zu einem gegebenen $\mu$ gehören, je nach der Gröfse von $n$ als *langsame* und *schnelle Präcession* zu bezeichnen. Da wir in Zukunft nicht mehr wesentlich auf die Präcessionskonstanten $\mu$ und $\nu$ rekurrieren werden, so wird durch diese Zweideutigkeit der Benennung kein Mifsverständnis entstehen.)

2) Sodann wollen wir *den Grenzfall der Kreiselbewegung bei unendlich wachsendem* $n$ untersuchen. Während dieser Grenzfall, wie wir wissen, unter der Annahme $e = 0$ mit der schnellen regulären Präcession zusammenfällt, welche alsdann ihrerseits in eine unendlich schnelle Präcession ausartet, ist er bei allgemeiner Anfangslage wesentlich davon verschieden.

Zunächst können wir aus unsern Kurven dritter Ordnung über diesen Grenzfall Folgendes schliefsen: Der zweite Begrenzungskreis $e'$ fällt sowohl beim starken wie beim schwachen Kreisel für $n = \infty$ mit dem Parallelkreise $-e$ zusammen; in der That ist $-e$ die Abscisse des auf dem unpaaren Zuge gelegenen unendlich fernen Punktes der $C_3$.

*Im Grenzfall $n = \infty$ oscilliert also die Kreiselspitze um den Äquator als Mittellage herum, indem die Bahnkurve zwischen den Kreisen $+e$ und $-e$ auf und ab schwankt.*

Die Gestalt der Bahnkurve wird dabei äufserst einfach. Zur Orientierung betrachten wir vorab einen Kreisel, für welchen $P = N = 0$ ist, also einen schwerelosen Kreisel ohne Eigenimpuls. Die betr. Bewegung gehört (wegen $N = 0$) unter die Bewegungen des sphärischen Pendels; dabei liegt (wegen $P = 0$) der spezielle Fall vor, dafs die Wirkung der Schwere aufgehoben ist. Die Bahnkurve mufs daher dieselbe sein, wie die eines einzelnen Massenpunktes, welcher keinen äufseren Kräften ausgesetzt ist und gezwungen wird, auf einer Kugelfläche zu bleiben. Dieser beschreibt aber auf der Kugel ersichtlich einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit.

Wird nun $P$ und $N$ nicht gleich Null gesetzt, dafür aber der seitliche Anstofs $n$ unendlich grofs genommen, so wird die Bahn der Kreiselspitze dieselbe bleiben wie vorher. Es wird nämlich der Einflufs des Anfangsstofses den der Schwere und des Eigenimpulses völlig überwinden.

Mit dieser Überlegung stimmt das Resultat der Rechnung überein. Lassen wir nämlich $n$ unendlich grofs werden, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240 in erster Annäherung:

$$U = -\frac{n^2}{A^2}\frac{u^2 - e^2}{1 - e^2}.$$

Das Integral für $t$ von pag. 238 vereinfacht sich folgendermafsen:

$$(8) \qquad t = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\int\frac{du}{\sqrt{e^2 - u^2}} = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{n}\arcsin\frac{u}{e};$$

hieraus folgt

$$u = e \sin\frac{nt}{A\sqrt{1-e^2}}.$$

Es wird also die Änderungsgeschwindigkeit von $u$ unendlich grofs. Gleichzeitig geht das Integral für $\psi$ von pag. 238 näherungsweise über in

$$\psi = \sqrt{1-e^2}\int\frac{du}{(1-u^2)\sqrt{e^2-u^2}};$$

der Wert desselben wird, wie man leicht verifiziert:

$$(8') \qquad \psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Diese Gleichung können wir, wenn wir $u = \cos\vartheta$, $e = \cos\vartheta_0$ machen, einfacher so schreiben:

$$(9) \qquad \sin\psi \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta_0;$$

richtig interpretiert, sagt sie aus, *dafs die Kreiselspitze einen gröfsten Kreis beschreibt.*

Die Kreiselspitze hat nämlich im $XYZ$-System die Koordinaten

$$X = Y = 0, \quad Z = 1;$$

ihre Koordinaten im $xyz$-System werden daher nach den Substitutionsformeln (5) von pag. 19

$$x = \sin\vartheta \sin\psi, \quad y = -\sin\vartheta \cos\psi, \quad z = \cos\vartheta.$$

Mithin können wir die Gleichung (9) unserer Bahnkurve auch so schreiben:

$$x = \operatorname{tg}\vartheta_0 z.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene durch $O$, welche aus der Einheitskugel den vorgenannten gröfsten Kreis ausschneidet.

Stellen wir insbesondere die Figurenaxe in der Anfangslage horizontal, so geht unser gröfster Kreis in den Äquator über und wir haben wieder die unendlich schnelle reguläre Präcession des ersten Paragraphen, welche sich jetzt mit unserem Grenzfalle confundiert.

Die Verhältnisse der ersten Paragraphen waren also insofern zu partikulär gewählt. *Bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe giebt es zwischen der schnellen Präcession und unserem Grenzfalle eine Folge von Übergängen, welche uns in den ersten Paragraphen entschlüpft ist.* Die hier erforderliche Ergänzung kann aber leicht angebracht werden.

Wir stellen hierunter die Bahnkurven der schnellen Präcession und des Grenzfalles in den Figuren 44 und 45 stereographisch dar. Bei ersterer ist die Bahnkurve der Kreis $u = e$, bei letzterem der die Kreise $u = +e$ und $u = -e$ berührende stärker ausgezeichnete Kreis.

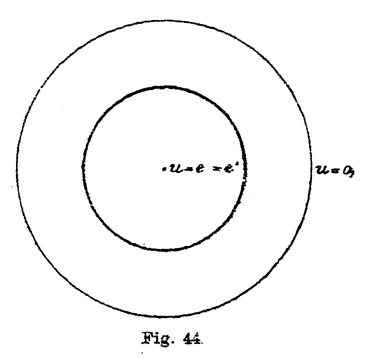


Fig. 44.

Die Übergangskurven zwischen beiden haben folgenden Charakter. Der Begrenzungskreis $e'$ **erweitert** sich bei wachsendem $n$ allmählich, indem er, von seiner Lage in Fig. 44 ausgehend, den Äquator überschreitet und sich asymptotisch dem Kreise $u = -e$ nähert. Die Bahnkurve, welche zwischen den Kreisen $e$ und $e'$ hin und her laufen mufs, umschliefst in der stereographischen Projektion den ersteren Kreis, während sie von dem letzteren umschlossen wird. Als Typus dieser Bahnkurven können wir etwa die Fig. 30 ansehen, wobei jetzt der innere Kreis den festgehaltenen Ausgangskreis $e$, der äufsere den Begrenzungskreis $e'$ bedeuten würde. Die Spannweite der einzelnen Teilbögen nimmt mit

wachsendem $n$ ab, bis sie für $n = \infty$ sich auf Null reduziert hat, so daſs die Bahnkurve einfach in sich zurückläuft.

Neben den Grenzfall $n = \infty$ bei endlichem $N$ stellt sich der Grenzfall $N = \infty$ bei festgehaltenem $n$, welcher sich ähnlich wie jener behandeln läſst. Wie erwähnt bleibt die Gleichung $U_1 = 0$ bei Vertauschung von $n$ und $N$ ungeändert, so daſs wir in den Figuren 41 und 42 der Ordinate $v$ ebensowohl die Bedeutung $N$ wie $n$ beilegen

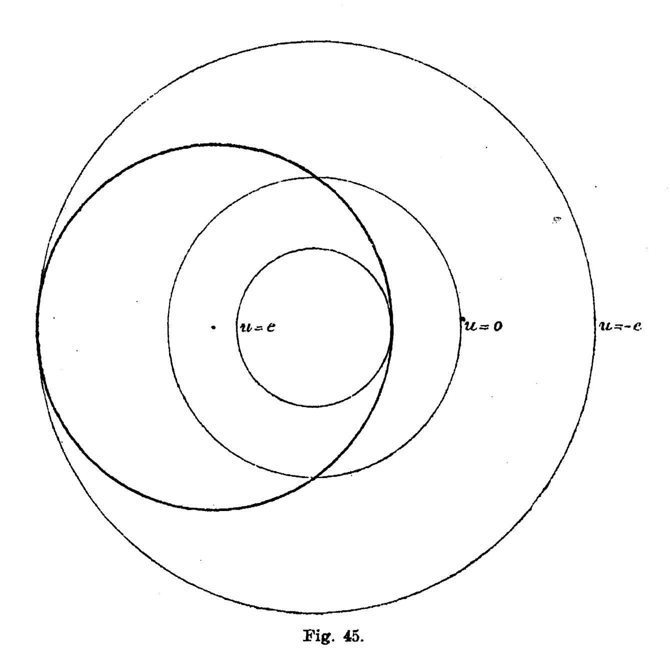



Fig. 45.

können. Hieraus folgt, daſs auch bei wachsendem $N$ und festgehaltenem $n$ der Begrenzungskreis $e'$ asymptotisch in die Lage $-e$ übergeht. Die Kreiselspitze oscilliert also auch in diesem Grenzfalle mit unendlicher Geschwindigkeit zwischen den beiden Kreisen $e$ und $-e$ auf und ab. Nur bei horizontaler Anfangslage der Figurenaxe fallen die beiden Begrenzungskreise zusammen, die Amplitude der Oscillation wird in der Grenze verschwindend klein und wir haben einen Grenzfall des in Fig. 28 dargestellten Typus der pseudoregulären Präcession, nämlich stationäre Rotation um die sich nur unendlich langsam vorwärtsbewegende Figurenaxe.

Unter welchen Umständen bei allgemeiner Anfangslage der Figurenaxe der besonders interessante Fall der pseudoregulären Präcession zustande kommt, wird im nächsten Kapitel ausführlich darzustellen sein.

3) Wir wollen schlieſslich noch die Möglichkeit von *Spitzen- und*

*Schleifenbildung* untersuchen. Die Bahnkurve kann nur dann auf den Parallelkreisen $e$ oder $e'$ mit Spitzen aufsitzen, wenn für $u = e$ oder $e'$ $\frac{d\psi}{du} = 0$ wird. Wir schliefsen daraus, ebenso wie pag. 242, dafs die Bedingung für das Auftreten von Spitzen an den Kreisen $e$ und $e'$ bez. lautet:

$$n - Ne = 0, \quad n - Ne' = 0.$$

Was den Ausgangskreis $e$ betrifft, so zeigt sich also, dafs für ein bestimmtes Verhältnis von $n : N$ allemal Spitzenbildung eintreten wird. Im § 2 lag nur der besondere Fall vor, dafs dieses Verhältnis gleich Null war, dafs also, unabhängig von dem Werte des Eigenimpulses, Spitzenbildung immer dann auftrat, wenn der seitliche Anstofs gleich Null genommen wurde.

Um auch das Auftreten von Spitzen an dem Begrenzungskreise $e'$ bequem übersehen zu können, greifen wir wieder auf unsere Kurven dritter Ordnung zurück. Denken wir uns $N$ festgehalten und $n$ variabel ($n = v$), so wird unsere obige Bedingung in der $uv$-Ebene durch die Gerade

$$v - Nu = 0$$

dargestellt, welche die Berührungspunkte der Tangenten $u = \pm 1$ verbindet und in den Figuren 41, 42 strichpunktiert gezeichnet ist. Die Frage ist, ob diese Gerade die $C_3$ innerhalb des mechanisch gültigen Intervalles schneidet oder nicht.

Zwei Schnittpunkte fallen in die Punkte $u = \pm 1$, $v = \pm N$. Ihnen entspricht aber keine eigentliche Spitzenbildung, weil sich in diesem Falle der Begrenzungskreis $e'$ auf einen einzelnen Punkt, den Nord- oder Südpol zusammengezogen hat. Was den dritten Schnittpunkt betrifft, so zeigt der Anblick unserer Kurven unmittelbar, dafs er auf dem unpaaren Zuge liegt im Falle des starken, auf dem paaren Zuge im Falle des schwachen Kreisels.

*Bei dem starken Kreisel giebt es daher einen bestimmten Parallelkreis $e'$, auf welchen sich — bei festgehaltenem $N$ und geeignet gewähltem $n$ — die Bahnkurve mit Spitzen aufsetzt, bei dem schwachen Kreisel giebt es keinen solchen Kreis.*

Wie wir sahen, entspricht die im ersten Paragraphen entwickelte Figurenserie 29—35 dem Falle eines schwachen Kreisels, so dafs in diesen Figuren eine Spitzenbildung auf dem Kreise $e'$ nicht vorkommen konnte. Es zeigt sich jetzt überdies, dafs das gleiche Vorkommnis im Falle des schwachen Kreisels auch bei beliebiger Lage des Anfangskreises $e$ ausgeschlossen ist. Die frühere Figurenserie bietet insofern für den schwachen Kreisel ein hinreichend allgemeines Bild der Bahn-

kurvenfolge. Es bleibt aber noch die Aufgabe bestehen, beim starken Kreisel die kontinuierliche Einordnung der soeben gefundenen Spitzenkurve in die Bahnkurvenserie klarzustellen. Dies soll am Ende dieses Paragraphen geschehen. Vorher wollen wir noch unseren Kurven dritter Ordnung ein Kriterium über das Auftreten von *Schleifen* entnehmen.

Wenn die Gleichung $n - Nu = 0$ für $u = e$ oder $e'$ erfüllt ist, ergiebt sich, wie wir eben sahen, Spitzenbildung. Ist aber diese Gleichung für einen zwischen $e$ und $e'$ gelegenen Wert von $u$ erfüllt, so läuft die Bahnkurve im stereographischen Bilde jedesmal, wo sie den so bestimmten Parallelkreis $u$ überschreitet, in radialer Richtung. Alsdann folgt, wie pag. 242, das Vorhandensein von Schleifen. Geometrisch erkennen wir daher das Auftreten von Schleifen so: Wir ziehen unsere Parallele $v = n$ zur Abscissenaxe und schneiden diese mit der Geraden $v - Nu = 0$. Liegt die Abscisse des Schnittpunktes zwischen $e$ und $e'$, so treten Schleifen auf, liegt sie aufserhalb jenes Intervalles, so sind Schleifen unmöglich.

Wendet man diese Regel auf die $C_3$ des schwachen Kreisels an, so sieht man sofort, dafs Schleifenbildung nur in dem Intervalle zwischen der auf dem Ausgangskreise $e$ mit Spitzen aufsitzenden Kurve und derjenigen Bahnkurve auftreten kann, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. Ein Beispiel hierfür bietet die Figur 32 von pag. 213.

Dasselbe Intervall ist auch beim starken Kreisel durch Schleifenbildung ausgezeichnet. Hier findet sich aber noch ein zweites Intervall, welches von dem Schnittpunkte der $C_3$ mit der Geraden $v - Nu = 0$ bis zu ihrem Berührungspunkt mit der Geraden $u = -1$ reicht. Alsdann befindet sich nämlich (vgl. Fig. 41) der Schnittpunkt von $v = n$ mit der Geraden $v - Nu = 0$ rechts von der $C_3$ und fällt bei der Projektion auf die Abscissenaxe in das Gebiet $e e'$. Die betreffenden Schleifenkurven schliefsen sich nach der einen Seite an diejenige Bahnkurve, welche sich auf den Kreis $e'$ mit Spitzen aufsetzt, nach der anderen Seite an die Kurve, welche durch den Südpol der Einheitskugel hindurchzieht, kontinuierlich an.

*Bei dem schwachen Kreisel haben wir also ein, bei dem starken zwei Intervalle mit Schleifenbildung.* —

Wir wollen zum Schlusse, wie bereits in Aussicht genommen, die Bahnkurvenserie des ersten Paragraphen für den Fall des starken Kreisels dahin ergänzen, dafs wir den Übergang von der langsamen regulären Präcession bis zu dem Grenzfalle $n = \infty$ durch die Fälle der Schleifen- und Spitzenbildung hindurch verfolgen.

Wir gehen von der langsamen regulären Präcession aus, geben $N$ einen festen, positiven Wert und lassen $n$ abnehmen. Gleichzeitig mit $n$ nimmt auch der Wert $e'$ zunächst gleichförmig ab, wie aus Fig. 41 ersichtlich.

Die Bahnkurve berührt dabei im stereographischen Bilde den Ausgangskreis von aufsen, indem sie ihn umschliefst, den zweiten Begrenzungskreis von innen. Für einen gewissen oben konstruierten Wert von $n$ tritt an Stelle der Berührung des Kreises $e'$ die Spitzenbildung an diesem Kreise. Bei weiter abnehmendem $n$ lösen sich die Spitzen in Schleifen auf Dieser Charakter der Bahnkurve bleibt bestehen, bis $n$ den Wert $-N$ erreicht hat, wo sich der Kreis $e'$ auf den Südpol zusammenzieht und dementsprechend sein stereographisches Bild unendlich grofs geworden ist. Von jetzt ab erweitert sich der Kreis $e'$ wieder (d. h. er verengert sich im stereographischen Bilde) und strebt asymptotisch dem Parallelkreise $u = -e$ zu. Die Bahnkurve nimmt dabei mehr und mehr die in Fig. 45 verzeichnete einfache Gestalt an.

## § 8. Über die numerische Berechnung der elliptischen Integrale für $t$ und $\psi$.

Bei einem Probleme der Anwendungen, wie es hier vorliegt, dürfen wir uns nicht damit begnügen, die Möglichkeit der Rechnung in einem allgemeinen Schema darzuthun. Wir müssen vielmehr bis zur wirklichen numerischen Durchführung vorzudringen suchen. Während die älteren Mathematiker bis Gaufs und Jacobi incl. stets bemüht waren, ihre Resultate nicht nur durch konvergente, sondern auch durch gut konvergente, praktikable Prozesse darzustellen, geht die augenblickliche Entwickelung der Mathematik vielfach dahin, die numerische Exekutive über Gebühr zu vernachlässigen. Demgegenüber möchten wir in der numerischen Durchführung einer Theorie geradezu den Schlufsstein des Gebäudes erblicken, dem wir keine geringere Wichtigkeit und kein geringeres Interesse beimessen, wie jedem anderen Bestandteile des Ganzen. Speziell sind wir bei Aufgaben, welche auf elliptische Funktionen führen, dank der hohen Entwickelung dieser Theorie, in der angenehmen Lage, die numerische Auswertung ohne alle Schwierigkeit bewerkstelligen zu können, wie sich in diesem Paragraphen zeigen wird.

Es handle sich zunächst um ein Integral von der Form unseres $t$:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{1}$$

in welchem $U$ irgend ein Polynom dritten oder vierten Grades in $u$ bedeutet. Wir setzen von $U$ nur voraus, dafs die Wurzeln $U = 0$ reell

sind. Man bezeichnet ein solches Integral als ein *elliptisches Integral erster Gattung*, weil es sich stets auf diejenige Normalform bringen läſst, die Legendre als „fonction de première espèce“ eingeführt hat. Die Bezeichnung überall endliches Integral, welche an das Verhalten von $t$ in der komplexen Ebene anknüpft und somit die Integrale erster Gattung in funktionentheoretischer Hinsicht charakterisiert, kann erst im sechsten Kapitel erläutert werden.

*Die Legendresche Normalform des Integrals erster Gattung ist in der Legendreschen Bezeichnung die folgende:*

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}; \tag{2}$$

hier heiſst $\varphi$ die Amplitude, $k$ der Modul des Integrals; man setzt voraus $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $0 < k < 1$. Wird $\sin^2 \varphi = x$ gesetzt, so können wir auch schreiben:

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}. \tag{2'}$$

Fast alle Methoden, welche zur Auswertung der elliptischen Integrale erster Gattung angegeben werden, stimmen darin überein, daſs sie zunächst die Transformation des vorgelegten Integrales auf die Legendresche Normalform erfordern. Hiervon machen auch diejenigen Autoren keine Ausnahme, welche wie Schwarz*) und Halphen*) von der Weierstrassischen Theorie ausgehen und die Formeln der älteren Theorie in die Weierstrassischen Bezeichnungen übersetzen. So wichtig aber diese Theorie in theoretischer Hinsicht ist, so scheint sie doch nach der numerischen Seite über die ältere Theorie keinen eigentlichen Fortschritt gemacht zu haben. Wir möchten daher vorschlagen, bei numerischen Fragen direkt auf die Legendreschen Bezeichnungen und Begriffe zurückzugreifen, anstatt sie jedesmal durch die Weierstrassischen zu umschreiben.

Um die Transformation des Integrales (1) auf die Legendresche Normalform ausführen zu können, muſs man die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ aufsuchen. Wir beschränken uns auf den beim Kreisel vorliegenden Fall, daſs $U$ ein Polynom dritten Grades ist, so daſs wir nur eine kubische Gleichung zu lösen haben. Diese Gleichung reduziert sich sogar, da wir die Wurzel $e$ als bekannt ansehen (vgl. pag. 239), auf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ mit den Wurzeln $e'$ und $e''$.

*) Vgl. H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, und Halphen: Théorie des fonctions elliptiques, Bd. I. Kap. 8.

Zu den so bestimmten Wurzeln $e$, $e'$, $e''$ müssen wir noch nach pag. 226 den „vierten Verzweigungspunkt" $\infty$ als gleichberechtigt hinzunehmen.

Wir wollen etwa $P > 0$ voraussetzen und dann die Bezeichnung der Wurzeln $e$, $e'$, $e''$ so wählen, daſs ihre Reihenfolge, wie in dem Schema $P > 0$ von pag. 226, diese wird:

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty.$$

Die Überführung des Integrales (1) in die Form (2') läſst sich nun allemal durch *lineare Transformation* bewirken, d. h. so, daſs wir die neue Integrationsvariable $x$ gleich einer linearen Funktion der ursprünglichen $u$ setzen. Gleichzeitig läſst sich stets erreichen, daſs die in (2') vorkommenden Gröſsen $x$ und $k$ reelle Zahlen zwischen 0 und 1 werden. Die Transformationsformeln lauten dabei verschieden, je nachdem das ursprüngliche Integrationsintervall in dem Gebiete $e e'$, $e' e''$, ... liegt.

Handelt es sich z. B. um ein Integral in dem Intervalle $e e'$ mit der unteren Grenze $e$ und der oberen Grenze $u$, so können wir unsere Transformation so einrichten, daſs die Werte $e$, $e'$, $\infty$ bez. in die Werte 0, 1, $\infty$ übergehen. Alsdann verwandelt sich der zwischen $e'$ und $\infty$ gelegene Punkt $e''$ der $u$-Axe in einen zwischen 1 und $\infty$ gelegenen Punkt der $x$-Axe, welchen wir $1/k^2$ nennen, wobei also $k^2$ einen positiven echten Bruch bedeutet. Gleichzeitig geht die zwischen $e$ und $e'$ gelegene obere Grenze $u$ des ursprünglichen Integrales in die zwischen 0 und 1 gelegene obere Grenze des neuen über.

Die hierzu erforderliche lineare Transformation lautet nun ersichtlich folgendermaſsen:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{e''-e}{e'-e} = \frac{1}{k^2}.$$

Unser Polynom $U$, welchem wir die Form geben können

$$U = c^2 (u-e)(e'-u)(e''-u),$$

unter $c^2$ den Koeffizienten von $u^3$, d. h. $\frac{2P}{A}$ verstanden, geht bei Einführung von $x$ in den folgenden Ausdruck über

$$U = c^2 (e'-e)^3 x (1-x) \left(\frac{1}{k^2} - x\right) = \frac{c^2 (e'-e)^3}{k^2} x (1-x)(1-k^2 x)$$

Das ursprüngliche Integral

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{1}{c} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}$$

nimmt daher die Gestalt an:

$$(3)\qquad t = \pm \frac{k}{c\sqrt{e'-e}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}} = \pm \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\, F(k, \varphi),$$

wo die Amplitude $\varphi$ und der Modul $k$ die folgende Bedeutung haben:

$$(3')\qquad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{u-e}{e'-e}}, \qquad k = \sqrt{\frac{e'-e}{e''-e}},$$

und wo $F(k, \varphi)$ das in (2) definierte Legendresche Integral ist. Das Vorzeichen von $t$ hängt davon ab, in welcher der in Fig. 38 von pag. 226 schematisch dargestellten Überdeckungen wir die Integration ausführen wollen.

Handelt es sich andrerseits um ein Integral, dessen obere und untere Grenze in dem Gebiete $(-\infty\, e)$ gelegen ist, so wollen wir die Transformationsgleichung zwischen $u$ und $x$ so einrichten, daſs die Punkte $-\infty$, $e$, $e''$ bez. in die Punkte $0, 1, \infty$ übergeführt werden. Wiederum entspricht dann dem zwischen $e$ und $e''$ gelegenen Punkte $e'$ ein zwischen 1 und $\infty$ gelegener Wert von $x$, welchen wir $1/k'^2$ nennen, so daſs auch $k'^2$ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Die lineare Transformation, welche die gewünschte Überführung leistet, wird jetzt offenbar:

$$\frac{e''-e}{e''-u} = x,$$

so daſs wir für $k'^2$ folgenden Wert erhalten

$$\frac{e''-e}{e''-e'} = \frac{1}{k'^2}.$$

Ersetzen wir jetzt $u$ in dem Ausdrucke $U$ durch $x$, so wird

$$U = -c^2(e-u)(e'-u)(e''-u) = -c^2(e''-e)^3 \frac{x(1-x)(1-k'^2 x)}{x^4}.$$

Infolgedessen ergiebt sich, wenn etwa $-\infty$ die untere, $u < e$ die obere Grenze des ursprünglichen Integrals ist:

$$t = \frac{\pm i}{c\sqrt{e''-e}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k'^2 x)}} = \pm i \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\, F(k', \varphi);$$

die Amplitude $\varphi$ und der Modul $k'$ sind dabei nach dem Vorstehenden folgendermaſsen bestimmt:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{e''-e}{e''-u}}, \quad k' = \sqrt{\frac{e''-e'}{e''-e}}.$$

Beide Gröſsen genügen wieder den oben gestellten Bedingungen:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k' < 1.$$

Der Modul $k'$, welcher mit dem in (3') definierten Modul $k$ durch die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

zusammenhängt, heifst übrigens „der zu $k$ komplementäre Modul".

In ähnlicher Weise gelangt man immer zum Ziele, wie auch das ursprüngliche Integrationsintervall zwischen den Punkten $e$, $e'$, $e''$, $\infty$ gelegen sei, wobei wir nur voraussetzen, dafs es keinen dieser Punkte in seinem Innern enthalte, in welchem Falle wir das Intervall in Teilintervalle zerlegen müfsten. Die allgemeine Regel zur Herstellung der jedesmal geeigneten Transformationsformeln ist folgende:

*Man setze auf der $u$-Axe einen bestimmten Durchlaufungssinn fest und ordne die beiden Verzweigungspunkte, innerhalb deren das ursprüngliche Integrationsintervall liegt, in der Reihenfolge, welche dem Durchlaufungssinn entspricht, den Punkten* 0 *und* + 1 *zu. Sodann gehe man längs der $u$-Axe, die man sich im Unendlichen geschlossen zu denken hat, im festgesetzten Sinne über das Integrationsgebiet hinaus und ordne den übernächsten Verzweigungspunkt, auf den man dieser Verabredung zufolge stöfst, dem Punkte $\infty$ zu. Es läfst sich dann immer eine lineare Transformation zwischen $u$ und $x$ angeben, welche die genannte Zuordnung leistet. Dieselbe verwandelt den vierten Verzweigungspunkt, über dessen Zuordnung wir noch nicht disponiert haben, notwendig in einen Punkt, welcher auf der $x$-Axe zwischen* + 1 *und* $+\infty$ *liegt; alle Punkte des ursprünglichen Integrationsgebietes entsprechen gleichzeitig Werten von $x$, welche zwischen* 0 *und* 1 *enthalten sind.*

Übrigens läfst sich die Zuordnung der $u$- und $x$-Axe in dieser Weise immer noch auf zwei Arten herstellen, indem ja in unserer Regel der Durchlaufungssinn der $u$-Axe willkürlich blieb.

Wir wollen noch für vier spezielle Integrale $t$, welche im sechsten Kapitel eine wesentliche Rolle spielen, die betreffende Transformation auf die Legendresche Normalform hinschreiben. Es sind dieses die folgenden Integrale:

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ia = \int_{-1}^{e} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Das erste derselben haben wir schon im dritten Paragraphen betrachtet, es giebt die Zeit an, welche die Kreiselspitze braucht, um einen Halbbogen ihrer Bahnkurve zu durchlaufen. Die übrigen haben keine mechanische Bedeutung im elementaren Sinne.

Es ergeben sich nun aus den Gleichungen (3) und (4) bez. aus unserer allgemeinen Regel die folgenden Ausdrücke für unsere vier Integrale:

$$(5)\qquad \omega = MF\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad \omega' = MF\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad a = MF(k', \varphi_a),$$
$$b = MF(k', \varphi_b),$$

wo die Zeichen $M$, $k$, $k'$, $\varphi_a$, $\varphi_b$ die folgende Bedeutung haben:

$$(5')\qquad \begin{cases} M = \sqrt{\dfrac{2A}{P(e''-e)}}, \quad k = \sqrt{\dfrac{e'-e}{e''-e}}, \quad k' = \sqrt{\dfrac{e''-e'}{e''-e}} = \sqrt{1-k^2} \\ \varphi_a = \arcsin\sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}}, \quad \varphi_b = \arcsin\sqrt{\dfrac{e''-e}{e''-e'}\cdot\dfrac{1-e'}{1-e}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe, ein beliebiges elliptisches Integral erster Gattung numerisch auszuwerten, ist somit reduziert auf die einfachere Aufgabe, den Wert des Legendreschen Integrales $F(k, \varphi)$ zu finden. Die verschiedenen Wege, welche hierzu führen, sollen in Kürze namhaft gemacht werden.

1. Der nächstliegende Weg wäre der, die Quadratwurzel unter dem Integralzeichen nach dem binomischen Lehrsatz in eine *Reihe* zu verwandeln und die Integration gliedweise auszuführen. Die Reihen, zu denen man so gelangt, sind aber bei einem von Null einigermafsen verschiedenen $k^2$ nicht hinreichend bequem. Um ihre Konvergenz zu verbessern, müfste man diese Methode mit der sogleich zu nennenden zweiten kombinieren, wie solches in der That bei Schwarz*) durchgehends geschieht.

2. Eine theoretisch und praktisch gleich schöne Methode besteht darin, die Integrationsvariable einer quadratischen Transformation von solcher Beschaffenheit zu unterwerfen, dafs das Integral erster Gattung in ein ebensolches, nur mit verändertem Modul und transformierter Amplitude, übergeht. In erster Linie ist hier die sog. *Landensche Transformation* zu nennen. Der transformierte Modul $k_1$ wird dabei einfach gleich dem Verhältnis des geometrischen zum arithmetischen Mittel aus dem Modul $k$ und der Zahl 1; man hat also: $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$. Durch fortgesetzte, geeignete Anwendung dieser Transformation wird man auf eine Serie von Moduln $k_1, k_2, k_3, \ldots$ (eine „Modulleiter") geführt, deren einzelne Terme unaufhörlich zunehmen und sich dem Werte 1 nähern. Im umgekehrten Sinne ausgeführt, liefert also die Landensche Transformation eine nach 0 abnehmende Modulleiter. Ist aber auf solche Weise der Modul des elliptischen Integrales genügend klein gemacht, so wird die Integration in einfachster Weise ausführbar. In der That haben wir, unter $k_n$ einen genügend kleinen Modul, unter $\varphi_n$ den zugehörigen transformierten Wert der Amplitude verstanden,

*) Vgl. z. B. Art. 48 der Formelsammlung.

direkt: $F(k_n, \varphi_n) = \varphi_n$. Diese Methode ist von Legendre mit grofsem Erfolge zur Berechnung seiner Tafeln gehandhabt worden.

Die sogenannte *Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels von Gaufs**) ist von der vorgenannten nicht wesentlich verschieden; sie zeichnet sich vor jener nur durch formal gröfsere Eleganz aus.

Statt der *quadratischen* kann man auch *Transformationen höherer Ordnung* zur numerischen Berechnung der elliptischen Integrale verwerten, wie solches zum erstenmale von Jacobi**) durchgeführt worden ist.

3. Eine dritte Methode beruht auf der *Umkehr der elliptischen Integrale* und auf der Einführung der *$\vartheta$-Funktionen*. Sie führt, ebenso wie die vorige Methode, sehr schnell zum Ziele, kann aber an dieser Stelle noch nicht besprochen werden.***)

4. Man könnte ferner daran denken, die elliptischen Integrale direkt durch *mechanische Quadratur*, eventuell mit Zuhülfenahme eines Integrationsapparates auszuwerten. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, auf beliebige elliptische Integrale direkt anwendbar zu sein und macht die Transformation auf die Normalform überflüssig. Andrerseits verlangt dasselbe aber die Berechnung oder Zeichnung der Gröfse $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ bez. $\frac{1}{\sqrt{U}}$ für eine gröfsere Reihe von Punkten des Integrationsintervalles. Hierdurch wird der genannte Vorteil reichlich aufgewogen, so dafs diese Methode mit den übrigen kaum wird konkurrieren können.

5. Eine letzte Methode, welche wir ganz besonders empfehlen möchten, besteht darin, überhaupt nicht zu rechnen, sondern die *Legendreschen Tafeln*†) nachzusehen. In der That werden wir uns dieses schönen Hülfsmittels ebensowenig entschlagen wollen, als wir den Logarithmus einer Zahl anders wie aus den Logarithmentafeln zu finden gewohnt sind. Der Gebrauch der Legendreschen Tafeln ist sehr bequem. Man hat nur nötig, von dem Modul $k$ zu einem Winkel $\Theta$ mittels der trigonometrischen Tafeln überzugehen, welcher sich aus der Gleichung $k = \sin\Theta$ bestimmt. Dann findet man für alle vollen

---

*) Gaufs: Ges. Werke, Bd. III, pag. 361 u. ff.

**) Jacobi: Ges. Werke, Bd. I, pag. 31; man vergl. auch Klein-Fricke, Modulfunktionen, II pag. 111.

***) Ausführlich dargestellt von Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen, Berlin 1864, namentlich zu vgl. 1. Abteilung, 4. Abschnitt.

†) Bd. II des traité des fonctions elliptiques, Paris 1826, pag. 284—363 u. pag. 222—245. Es wäre sehr zu wünschen, dafs diese heutzutage ziemlich seltenen Tafeln durch Neuabdruck leichter zugänglich gemacht würden.

Grade von $\Theta$ und $\varphi$ zwischen 0 und 90 den Wert von $F(\sin\Theta, \varphi)$ auf 9 Decimalen genau in den Tabellen. Die sogenannten vollständigen Integrale erster Gattung, d. h. die Werte von $F\left(\sin\Theta, \frac{\pi}{2}\right)$ sind von Legendre sogar noch genauer berechnet. Neben den Integralen erster Gattung geben die Tafeln auch die sogenannten Integrale zweiter Gattung $E(k, \varphi)$ an, auf deren Definition wir hier nicht einzugehen brauchen.

Hiernach wird man auf eine der vorgenannten Methoden nur dann zurückzugreifen gezwungen sein, wenn es sich um die Auswertung eines Integrales erster Gattung mit komplexen Grenzen oder mit komplexem Modul handelt.

Als Beispiel berechnen wir in diesem Sinne etwa die Zeit, welche die Kreiselspitze in den Figuren 24 bis 28 gebraucht, um von einem tiefsten Punkte ihrer Bahn bis zu dem nächstfolgenden höchsten Punkte zu gelangen, d. h. den Wert der halben Periode $\omega$.

Während wir in jenen Figuren früher $P = -1$ voraussetzten, nehmen wir, um unsere letzten Formeln direkt anwenden zu können, $P = +1$, müssen dafür aber (nach pag. 250) die auf pag. 243 angegebenen Werte der Gröſse $e'$ im Vorzeichen umkehren. Überdies würden diese Werte jetzt, da sie die kleinste der in Betracht kommenden Wurzeln von $U = 0$ darstellen, mit $e$ zu bezeichnen sein. Die zweite Wurzel entspricht dem in allen jenen Figuren als Grenzkreis auftretenden Äquator, so daſs wir haben: $e' = 0$. Die noch fehlende Wurzel $e''$ ergiebt sich darauf aus der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$, welche in unserem Falle (vgl. pag. 240) die einfache Gestalt annimmt

$$uN^2 + 2AP(1 - u^2) = 0.$$

Setzen wir hier $P = 1$ und wie früher auch $A = 1$, so ergiebt sich

$$u^2 - \frac{1}{2}uN^2 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs $e''$ einfach das Reciproke der auf pag. 243 angegebenen Wurzel wird. Hiernach sind die in Gleichung (5) vorkommenden Gröſsen $M$, sowie $k$ und der zugehörige Winkel $\Theta$ sehr leicht zu berechnen. Den Wert von $\lg F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ entnehmen wir alsdann der Tafel I von Legendre und berechnen die gesuchte Gröſse $\omega$ nach Gleichung (5). Das Resultat stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen.

$$A = 1, \quad P = -1, \quad n = 0, \quad e' = 0.$$

| Fig. | $e''$ | $\lg_{10} M$ | $k$ | $\Theta$ | $\lg_{10} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 1 | 0 | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ | 45° | 0,26813 | 1,854 |
| 25 | $\frac{100}{99}$ | 0 (circa) | $\sqrt{\frac{9801}{19801}}$ | 44,7 | 0,26709 | 1,848 |
| 26 | $\frac{10}{9}$ | 0,99879—1 | $\sqrt{\frac{81}{181}}$ | 42,0 | 0,25820 | 1,807 |
| 27 | 2 | 0,95154—1 | $\sqrt{\frac{1}{5}}$ | 26,6 | 0,22007 | 1,484 |
| 28 | $\infty$ | $-\infty$ | unbest. | unbest. | unbest. | 0 |

Wir sehen hieraus, dafs die Durchlaufungsdauer des einzelnen Halbbogens bei wachsendem $N$ fortgesetzt abnimmt, bis sie in Fig. 28 den Wert 0 erreicht. Wenn wir an der Verabredung festhalten, dafs die Werte von $A$, $P$, $n$ und $N$ im absoluten Mafssystem aufzufassen sind, so bedeutet der angegebene Wert von $\omega$ Sekunden.

Wichtiger noch als die Beziehung zwischen $t$ und $u$ ist für uns die Abhängigkeit zwischen $\psi$ und $u$, weil uns diese direkt die Gestalt der Bahnkurve liefert. Wir haben uns daher weiter über die Berechnung des elliptischen Integrales $\psi$ zu orientieren

Um auch hier an Legendre anknüpfen zu können, wollen wir $\psi$ durch die sogenannten *Normalintegrale dritter Gattung von Legendre* ausdrücken. Sein Normalintegral dritter Gattung definiert Legendre folgendermafsen:

$$\Pi(k, \varphi, p) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 - p \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Die Gröfse $p$, welche bei Legendre als reell vorausgesetzt wird und welche übrigens, damit das auf reellem Wege genommene Integral einen Sinn hat, nicht zwischen $+1$ und $+\infty$ liegen darf, heifst der *Parameter* des Integrales.

Wir wollen zeigen, dafs sich $\psi$ als lineare Kombination zweier Normalintegrale dritter Gattung darstellen läfst.

Zu dem Zwecke zerlegen wir zunächst den unter dem Integralzeichen vorkommenden Faktor $\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)}$ in Partialbrüche, d. h. wir setzen

$$\frac{n - Nu}{A(1 - u^2)} = \frac{1}{2A}\left(\frac{n + N}{1 + u} + \frac{n - N}{1 - u}\right),$$

so dafs wir erhalten:

$$\psi = \frac{n+N}{2A}\int\frac{1}{1+u}\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{n-N}{2A}\int\frac{1}{1-u}\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Ferner werden wir die Gröſse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ durch eine der oben angegebenen Transformationen auf die Form $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$ bringen. Wir können uns dabei auf den Fall beschränken, daſs die ursprüngliche Integrationsvariable in dem Gebiete $ee'$ verläuft. Alsdann haben wir diejenige Transformation anzuwenden, welche oben zu der Gleichung (3) führte, wir haben also die neue Integrationsvariable $x$ durch die Gleichung zu definieren:

$$\frac{u-e}{e'-e} = x.$$

Hieraus ergiebt sich

$$1 \pm u = (1 \pm e) \pm (e'-e)x,$$

während sich gleichzeitig die Gröſse $\frac{du}{\sqrt{U}}$ ebenso transformiert, wie in (3). Der Ausdruck von $\psi$ wird daher:

$$\psi = \frac{n+N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int\frac{1}{1+e+(e'-e)x}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$
$$+ \frac{n-N}{A}\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}}\int\frac{1}{1-e-(e'-e)x}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}.$$

Um von hier aus die Legendresche Normalform herzustellen, haben wir nur $x = \sin^2\varphi$ zu setzen und bezw. $1+e$ oder $1-e$ aus dem ersten oder zweiten Integrale herauszuziehen. *Dann ergiebt sich direkt $\psi$ als lineare Kombination zweier Normalintegrale in der Form*

$$\psi = C_1\Pi(k, \varphi, p_1) + C_2\Pi(k, \varphi, p_2),$$

wo die Gröſsen $k$, $\varphi$ durch die früheren Gleichungen (3′) definiert sind und wo die $C_1$, $C_2$, $p_1$, $p_2$ die folgende Bedeutung haben:

$$C_1 = \frac{n+N}{1+e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}}, \quad C_2 = \frac{n-N}{1-e}\sqrt{\frac{2}{AP(e''-e)}},$$
$$p_1 = \frac{e'-e}{1+e}, \qquad p_2 = -\frac{e'-e}{1-e}.$$

Es würde also des Weiteren nur noch nötig sein, die numerischen Werte der Legendreschen Normalintegrale dritter Gattung auf möglichst einfachem Wege zu finden. Leider giebt es und kann es zu diesem Zwecke keine Tafeln geben. Da nämlich der Wert des Integrales $\Pi(k, \varphi, p)$ von drei veränderlichen Gröſsen abhängt, müſsten die in Rede stehenden Tafeln Tafeln mit dreifachem Eingange sein.

Immerhin können wir auch hier aus den Legendreschen Tabellen Nutzen ziehen, wenn wir uns auf die Berechnung der sog. „vollständigen Integrale dritter Gattung“ $\Pi\left(k, \frac{\pi}{2}, p\right)$ beschränken, was für unsere Bahnkurven bedeuten würde, dafs wir nur nach der Spannweite $2\psi_\omega$ der einzelnen Teilbögen fragen und auf die Konstruktion der einzelnen Kurvenpunkte verzichten. Wie nämlich Legendre*) gezeigt hat, lassen sich seine vollständigen Integrale dritter Gattung allemal auf Integrale der ersten und zweiten Gattung reduzieren, welche in ihren oberen Grenzen den Parameter $p$ enthalten und welche zum Modul teils den Modul $k$ des Integrales $\Pi$, teils den komplementären Modul haben. Da wir nun die Werte der Integrale erster und zweiter Gattung in den Tafeln direkt nachsehen können, so gestatten diese Reduktionsformeln die vollständigen Integrale dritter Gattung und mithin auch die Gröfse von $\psi_\omega$ verhältnismäfsig schnell zu finden, von deren Wert die Gestalt der Bahnkurve in erster Linie abhängt.

Auf diesem Wege sind die Spannweiten der Teilbögen in den Figuren des ersten Paragraphen berechnet worden.**) Auf die Ausführung dieser Rechnungen, sowie auf die eigentliche Bedeutung der Reduktionsformeln wollen wir indessen an dieser Stelle nicht eingehen, da wir im sechsten Kapitel die oben unter (3) genannte Methode ausführlich behandeln werden, welche jedesmal beliebig viele Punkte der Bahnkurve auf kürzestem Wege zu finden lehrt.

## § 9. Über angenäherte Berechnung der Kreiselbahnen.

Der Gegensatz zwischen angenäherter und genauer Rechnung ist im allgemeinen kein scharfer. Jede numerische Rechnung wird, sofern es sich nicht zufällig um rationale Zahlen handelt, immer nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit durchgeführt. Der Gegensatz sollte eigentlich nicht heifsen: „*Genaue und angenäherte Berechnung*“, sondern vielmehr „*Rechnung mit beliebiger und mit begrenzter Annäherung*“. Während die Berechnung der elliptischen Integrale nach den Methoden des vorigen Paragraphen, (sofern wir nicht gerade die Legendreschen Tafeln benutzen), bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit getrieben werden kann, werden wir die jetzt auseinanderzusetzenden

*) Vgl. den ersten Band des *Traité*, Kap. 23, wo je nach dem Werte des Parameters drei verschiedene Reduktionsformeln aufgestellt werden, sowie auch das oben genannte Buch von Schellbach, Abt. 1, Abschn. 10.

**) Bei dieser Berechnung sind wir durch Hrn. Otto Blumenthal in ausgiebiger Weise unterstützt worden.

Methoden nicht soweit führen, dafs sie eine beliebige Verschärfung ohne Weiteres zulassen — ein Verfahren, welches sehr häufig in praktischen Anwendungen Platz greift.

Sollen derartige Methoden von begrenzter Genauigkeit einen wirklichen Wert haben, so müssen wir vor allem fordern, dafs wir den begangenen Fehler abschätzen können. Dieser Forderung werden wir im Folgenden genüge leisten. Zeigt es sich nun, dafs der Fehler unterhalb der für den vorliegenden Zweck zulässigen Fehlergrenze liegt, so wird uns unsere angenäherte Berechnung dieselben Dienste leisten, wie eine beliebig genau zu gestaltende. In der That werden wir später die interessantesten Fälle der Kreiselbewegung gerade mit den jetzt zu betrachtenden Methoden von begrenzter Genauigkeit behandeln.

Wir betrachten zunächst das elliptische Integral erster Gattung

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}},$$

welchem wir (vgl. pag. 261) die Form geben können

$$\sqrt{\frac{2P}{A}}\, t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)(e''-u)}}.$$

Dabei setzen wir, wie im vorigen Paragraphen, voraus

$$P > 0 \quad \text{und} \quad -1 < e < e' < +1 < e''.$$

Die Variable $u$ ist während der Integration zwischen die Grenzen $e$ und $e'$ eingeschränkt. Jedenfalls wird daher

$$e'' - e' < e'' - u < e'' - e.$$

Der Integrand ist positiv, solange sich $u$ in der oberen Überdeckung der $u$-Axe befindet. Indem wir nun für $e'' - u$ den zu kleinen Wert $e'' - e'$ oder den zu grofsen $e'' - e$ einsetzen, vergröfsern oder verkleinern wir den Wert des Integrales. Wir haben daher, solange wir die Integrationsvariable den Verzweigungspunkt $e'$ nicht überschreiten lassen:

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{e''-e}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} < \sqrt{\frac{2P}{A}}\, t < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}}$$

Die zuletzt hingeschriebenen Integrale lassen sich leicht trigonometrisch ausführen. Wir setzen etwa zu dem Zwecke:

$$(2) \qquad e' + e = 2u_0, \quad e' - e = 2\varepsilon, \quad u - u_0 = \delta.$$

Hier bedeutet $\varepsilon$ den halben Vertikalabstand der beiden Begrenzungskreise, innerhalb deren die Bahnkurve verläuft; $u_0$ bestimmt denjenigen Parallelkreis, dessen Ebene in der Mitte liegt zwischen den Ebenen der Begrenzungskreise, oder, wie wir kurz sagen wollen, den „mittleren Parallelkreis der Bahnkurve“ $\delta$ mifst den Abstand der Kreiselspitze von der Ebene dieses mittleren Parallelkreises. Wir erhalten daraufhin

$$u - e = \varepsilon + \delta, \quad e' - u = \varepsilon - \delta \tag{3}$$

und

$$\int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u-e)(e'-u)}} = \int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{d\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}} = \text{arc sin}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Mithin wird nach (1)

$$\frac{1}{\sqrt{e''-e}} \text{arc sin} \frac{\delta}{\varepsilon} < \sqrt{\frac{2P}{A}}(t - t_0) < \frac{1}{\sqrt{e''-e'}} \text{arc sin} \frac{\delta}{\varepsilon},$$

wo $t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{2P}}$ gesetzt ist. Zählen wir im Folgenden die Zeit von demjenigen Momente an, wo die Kreiselspitze durch den mittleren Parallelkreis $u_0$ hindurchgeht, so können wir statt $t - t_0$ einfacher $t$ schreiben.

Wir haben also zwei Grenzen gefunden, zwischen denen die (so gezählte) Zeit $t$ liegen mufs, nämlich die untere Grenze

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e)}} \text{arc sin} \frac{\delta}{\varepsilon}$$

und die obere

$$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-e')}} \text{arc sin} \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Die fraglichen Näherungsformeln erhalten wir nun einfach, indem wir für $t$ einen zwischen diesen beiden Grenzen gelegenen mittleren Wert substituieren.

Wir ersetzen etwa in den vorigen Formeln $\sqrt{e''-e}$ und $\sqrt{e''-e'}$ durch den mittleren Wert $\sqrt{e''-u_0}$ und schreiben:

$$t = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}} \text{arc sin} \frac{\delta}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Wir wollen vor allem den Fehler abschätzen, den wir hierbei begehen. Derselbe heifse $\tau$ und werde in Bruchteilen des ganzen Wertes von $t$ berechnet. Sicher wird $\tau$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als die Differenz unserer beiden Grenzwerte, dividiert durch den kleineren von ihnen. Wir haben also

$$|\tau| < \frac{\sqrt{\frac{1}{e''-e'}} - \sqrt{\frac{1}{e''-e}}}{\sqrt{\frac{1}{e''-e}}}$$

oder

(5) $$|\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1.$$

Die so gefundene obere Grenze für den „relativen" Fehler $|\tau|$ hängt enge mit dem Legendreschen Modul $k$ des elliptischen Integrales $t$ zusammen. Nach Gleichung (5′) des vorigen Paragraphen ist nämlich

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} = \frac{1}{k'} = \sqrt{\frac{1}{1-k^2}};$$

mithin gilt

(6) $$|\tau| < \frac{1-k'}{k'}.$$

Beispielsweise können wir unsere Näherungsformel dazu benutzen, um die Zeitdauer $\omega$ zu berechnen, welche die Kreiselspitze braucht um von dem unteren Parallelkreise $u = e$ bez. $\delta = -\varepsilon$ bis zu dem oberen $u = e'$ bez. $\delta = \varepsilon$ zu gelangen. Aus (4) ergiebt sich der Näherungswert

(7) $$\omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi.$$

Wollen wir gleichzeitig den Genauigkeitsgrad dieser Formel zum Ausdruck bringen, so können wir schreiben, unter $\vartheta$ einen unbekannten echten Bruch verstanden:

(7′) $$\sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi\left\{1 \pm \vartheta\left(\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1\right)\right\}.$$

Wir wollen uns schon hier mit einem Gedanken vertraut machen, der erst im sechsten Kapitel zur vollen Geltung kommen wird. Offenbar ist es vom analytischen Standpunkte aus bequem, in Gleichung (4) von der (unendlich vieldeutigen) Arcus-Sinus-Funktion zu der (eindeutigen) Sinus-Funktion überzugehen. Dies entspricht auch durchaus dem Sinne des mechanischen Problems, bei welchem man doch wünschen wird, die Lage des Kreisels als Funktion der Zeit, statt umgekehrt die Zeit aus der Lage der Kreiselspitze zu berechnen. Wir werden also die Gleichung (4) *umkehren*, indem wir $\delta$ bez. $u$ als explicite Funktion von $t$ ausdrücken. Wir bekommen so:

(8) $$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}$$

oder nach (2):

(8′) $$u = u_0 + \delta = u_0 + \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}.$$

Die entsprechende *Umkehrung* der ursprünglich gewonnenen unendlich vieldeutigen Integrale werden wir später auch an unseren elliptischen Formeln vornehmen.

Unter besonderen Umständen kann es eintreten, daſs der oben bestimmte Fehler $\tau$ sehr klein wird. Dann leisten uns unsere Näherungsformeln dieselben Dienste wie die früheren exakten Gleichungen. Die Umstände, unter denen dieses stattfindet, lesen wir aus der Ungleichung (5) ab: Es muſs entweder nahezu $e = e'$ oder es muſs $e''$ sehr groſs werden. Beide Möglichkeiten zusammenfassend, können wir sagen: es müssen von den vier Verzweigungspunkten $e$, $e'$, $e''$, $\infty$ entweder die beiden ersten, oder die beiden letzten einander sehr nahe rücken.

Die erste Möglichkeit tritt ein, wenn wir von der regulären Präcession, bei welcher $e'$ genau gleich $e$ wird, durch eine kleine Abänderung der Integrationskonstanten zu einer wenig davon verschiedenen Bewegung übergehen. Solche *„der regulären Präcession benachbarte Bewegungen“* sollen im ersten Paragraphen des nächsten Kapitels behandelt und durch Näherungsformeln im Sinne dieses Paragraphen dargestellt werden. Ebendahin gehört auch die *Bewegung des „aufrechten Kreisels“ im stabilen Falle,* bei genügend kleiner äuſserer Störung (vgl. § 4 und 5 des folgenden Kapitels).

Um zu entscheiden, wann die zweite Möglichkeit, der Fall eines sehr groſsen Wertes von $e''$, eintritt, wollen wir $e''$ durch unsere Integrationkonstanten $n$, $N$ u. s. w. ausdrücken.

Da $e'$ und $e''$ als Wurzeln der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$ bestimmt wurden, ergiebt sich der Wert von $e' + e''$, wenn wir den negativ genommenen Koeffizienten von $u$ in dieser Gleichung durch den von $u^2$ dividieren. Wir finden also aus Gleichung (2) von pag. 240

$$(9) \qquad e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1-e^2)} - e'.$$

Dieser Wert wächst im allgemeinen mit wachsendem $n$ und $N$, sowie mit abnehmendem $P$. Es möchte zunächst so scheinen, als ob auch im Falle $e$ gleich oder nahezu gleich $\pm 1$ der Wert von $e''$ unendlich bez. sehr groſs würde. Dem ist aber nicht so, weil alsdann gleichzeitig mit dem Nenner auch der Zähler verschwindet. Es bedeutet nämlich der Zähler geometrisch das Quadrat der Verbindungslinie zwischen dem Endpunkte der Impulskomponente $n$ und der Impulskomponente $N$ in der Anfangslage $u = e$. Ist nun $e = \pm 1$, so wird diese Verbindungsstrecke ersichtlich gleich Null.

Mithin wird $e''$ nur dann sehr groſs, wenn eine der Impulskomponenten $n$, $N$ sehr groſs wird, oder, genauer gesagt, wenn das Quadrat einer dieser Gröſsen im Verhältnis zu der gleichbenannten Gröſse $AP$

eine sehr beträchtliche Zahl darstellt. Dies war pag. 253 u. ff. bei Untersuchung der *Grenzfälle* $n = \infty$, $N = \infty$ der Fall. Wir sehen daher jetzt den Grund ein, weshalb wir in jenen Grenzfällen die Darstellung der Bewegung durch elliptische Integrale entbehren konnten; es würde nunmehr auch leicht sein, den Fehler $\tau$ in den früheren Annäherungsformeln genauer abzuschätzen.

Die von uns sogenannte „*pseudoreguläre Präcession*" können wir ebensowohl der ersten wie der zweiten der auf voriger Seite unterschiedenen Möglichkeiten zurechnen. Bei dieser Bewegung, die gleichfalls im nächsten Kapitel untersucht werden soll, wird daher die Anwendung unserer Annäherungsformeln ebenfalls nur einen sehr geringen Fehler ergeben.

Alle diese Einzelfälle sind vom Standpunkte der elliptischen Integrale dadurch charakterisiert, daſs nach (5) der komplementäre Modul $k'$ nahezu gleich 1, d. h. der Legendresche Modul $k$ selbst nahezu gleich Null wird. Daſs wir in einem solchen Falle die Theorie der elliptischen Integrale entbehren und die Bewegung mit groſser Annäherung durch elementare Funktionen darstellen können, ist nach dem vorigen Paragraphen von vornherein klar. Bei verschwindendem Modul $k$ geht nämlich das Legendresche Normalintegral $F(k, \varphi)$ (s. Gleichung (2) von pag. 260) direkt in den Wert der Amplitude $\varphi$ über, wobei sich $\varphi$ mittelst der ursprünglichen Variabeln $u$ bez. $\vartheta$ als ein Arcus-Sinus ausdrückt. Dies entspricht genau der im Vorstehenden gegebenen angenäherten Darstellung der Bewegung. Der Fortschritt der jetzigen Betrachtung besteht lediglich darin, daſs wir nunmehr bei nicht verschwindendem $k$ die Gröſse des Fehlers in unsern Annäherungsformeln nach (6) durch die Gröſse von $k$ abschätzen können.

Wir mögen hier noch einmal an die oben geschilderte Berechnung der elliptischen Integrale nach der Methode von Legendre oder Gauſs erinnern. Wie erwähnt, beruht diese Methode auf der fortgesetzten Anwendung gewisser quadratischer Transformationen, welche den Erfolg haben, den Modul des Integrales successive zu verkleinern. In einem derjenigen Fälle nun, wo unsere Annäherungsformeln nur einen geringen Fehler ergeben, wird die Anwendung jener Transformationen überflüssig, indem der Modul von vornherein so klein ist, daſs wir ohne erheblichen Fehler die Integrale direkt auf elementarem Wege auswerten können.

*Bei den oben genannten Spezialfällen der pseudoregulären Präcession, der aufrechten Kreiselbewegung u. s. w., liegt also von selbst derjenige Grenzfall vor, den Gauſs und Legendre durch genügend häufige Anwendung ihrer Transformationsmethoden zu erreichen streben.*

Außer den Näherungsformeln für $u$ werden wir solche für $\psi$ brauchen. Wir haben dabei von der Gleichung (6) von pag. 238 auszugehen:

$$\psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}. \tag{10}$$

Die rechte Seite zerlegen wir praktischer Weise in Partialbrüche, wie bereits pag. 267 geschehen und erhalten:

$$\psi' = \frac{n+N}{2A(1+u)} + \frac{n-N}{2A(1-u)}. \tag{11}$$

Hier setzen wir, wie in Gleichung (2) von pag. 270, $u = u_0 + \delta$ und nehmen mit dem Ausdrucke $(1 \pm (u_0 + \delta))^{-1}$ eine identische Umformung vor. Es gilt, wie man leicht bestätigt:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u_0} - \frac{\delta}{(1+u_0)^2} + R_+, \quad R_+ = \frac{\delta^2}{(1+u_0)^2}\,\frac{1}{1+u},$$

$$\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u_0} + \frac{\delta}{(1-u_0)^2} + R_-, \quad R_- = \frac{\delta^2}{(1-u_0)^2}\,\frac{1}{1-u}.$$

Gleichung (11) geht daher über in

$$\begin{aligned}\psi' = {} & \frac{n+N}{2A(1+u_0)} + \frac{n-N}{2A(1-u_0)} - \delta\left(\frac{n+N}{2A(1+u_0)^2} - \frac{n-N}{2A(1-u_0)^2}\right) \\ & + \left(\frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_-\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Sodann führen wir für $\delta$ den Näherungswert aus Gleichung (8) ein. Wir haben, wenn wir die Genauigkeitsgrenze $\tau$ in unserer Formel zum Ausdruck bringen:

$$\delta = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta\tau)\,t\right\}.$$

Hierfür schreiben wir auf Grund des Mittelwertsatzes bez. der mit dem ersten Gliede abgebrochenen Taylorschen Entwicklung:

$$\begin{aligned}\delta &= \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + r, \\ r &= \varepsilon\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,\vartheta\cdot\tau\cdot t\cdot\cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,(1 \pm \vartheta'\tau)\,t\right\},\end{aligned} \tag{13}$$

wobei $\vartheta'$ ebenso wie vorher $\vartheta$ einen echten Bruch bedeutet.

Die Gleichung (12) nimmt daraufhin, wenn wir die Glieder passend zusammenfassen, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{n - Nu_0}{A(1-u_0^2)} + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,\varepsilon\sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\} + R, \\ R &= \frac{n+N}{2A}R_+ + \frac{n-N}{2A}R_- + \frac{2nu_0 - N(1+u_0^2)}{A(1-u_0^2)^2}\,r.\end{aligned} \tag{14}$$

Jetzt führen wir die Integration nach $t$ aus; wir erhalten, wenn wir von einer unwesentlichen Integrationskonstanten absehen, welche den Wert von $\psi$ für $t=0$ bestimmt, ein Glied, welches proportional mit $t$ anwächst, ein zweites, welches periodisch veränderlich ist, und endlich ein Restglied.

Die in Rede stehende angenäherte Darstellung von $\psi$ soll nun einfach darin bestehen, dafs wir in der so erhaltenen Gleichung das Restglied zunächst unterdrücken und setzen:

$$(14') \quad \psi = \frac{n - N u_0}{A(1-u_0^2)}\,t + \frac{N(1+u_0^2) - 2 n u_0}{(1-u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e''-u_0)}}\,\varepsilon \cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}.$$

Den Grad der Annäherung würden wir nachträglich durch Diskussion des Restgliedes festzustellen haben.

*Die Gleichungen (8′) und (14′) zusammengenommen liefern eine angenäherte Darstellung für die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche im allgemeinen zwar mit erheblichen Fehlern behaftet sein wird, unter Umständen aber die exakten Formeln mit Vorteil zu ersetzen vermag.*

Diese Darstellung läfst eine sehr anschauliche Deutung zu. Wir wollen zunächst die beiden Teilbewegungen einzeln betrachten, welche bez. durch die beiden ersten oder die beiden zweiten Terme besagter Gleichungen dargestellt werden. Die beiden ersten Terme sind:

$$u_1 = u_0, \quad \psi_1 = \frac{n - N u_0}{A(1-u_0^2)}\,t.$$

Sie definieren eine *reguläre Präcession,* bei welcher der mittlere Parallelkreis $u_0$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{n - N u_0}{A(1-u_0^2)}$ durchlaufen wird. Die beiden zweiten Terme:

$$u_2 = \varepsilon \sin\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\},$$

$$\psi_2 = \frac{N(1+u_0^2) - 2 n u_0}{(1-u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e''-u_0)}}\,\varepsilon \cos\left\{\sqrt{\frac{2P(e''-u_0)}{A}}\,t\right\}$$

sind harmonisch veränderliche Gröfsen von derselben Periode und ungleicher Amplitude; sie stellen, für sich betrachtet, eine *elliptische Schwingung* dar. Die letztere bezeichnen wir auch, indem wir einen in der Astronomie gebräuchlichen Ausdruck aufnehmen, als *Nutation* der Kreiselspitze.

Die Gesamtbewegung, wie sie durch unsere Näherungsformeln beschrieben wird, entsteht aus der Überlagerung der soeben beschriebenen Teilbewegungen. *Unsere Formeln stellen also die Bewegung der Kreiselspitze dar als Überlagerung einer regulären Präcession mit einer periodisch sich wiederholenden Nutation.* Wir haben uns zu denken, dafs die Kreisel-

spitze auf dem mittleren Parallelkreise $u_0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entlang geführt wird und gleichzeitig relativ zu diesem ihre Nutationsschwingung ausführt. Man wolle in diesem Sinne die Figuren des § 2 einer nochmaligen Betrachtung unterziehen und sich die Beschaffenheit der in jedem Falle erforderlichen Präcession und Nutation vorstellen. Besonders naheliegend und fruchtbar wird diese Vorstellung bei der die pseudoreguläre Präcession darstellenden Fig. 28.

Die Hauptfrage, die nach dem *Genauigkeitsgrad unserer Näherungsformeln*, bleibt nun zu besprechen. Der Genauigkeitsgrad unserer Formel für $u$ ist oben in durchaus befriedigender Weise bestimmt worden. In jedem einzelnen numerisch bestimmten Falle hat auch die Fehlerbestimmung in unserer Formel für $\psi$ keine Schwierigkeit. Unter allgemeinen Voraussetzungen läfst sich aber dieser Fehler nicht so glatt abschätzen. Wir müfsten sonst eine Reihe von Spezialfällen je nach dem Vorzeichen der Gröfsen $n$, $N$, $u_0$ u. s. w. unterscheiden. Es mögen daher hierüber einige wenige Bemerkungen genügen.

Bei der Fehlerbestimmung in (14′) haben wir an den in (14) angegebenen Wert des Restes $R$ anzuknüpfen, durch welchen sich der Fehler $f$ folgendermafsen berechnet

$$f = \int R\,dt;$$

$f$ bedeutet dabei (im Gegensatz zu dem obigen Fehler $\tau$) nicht den relativen, sondern den absoluten Fehler.

Wir werden wesentlich den speziellen Fall betrachten, wo die beiden Parallelkreise $e$ und $e'$ hinreichend nahe aneinanderliegen, wo also $2\varepsilon = e' - e$ eine kleine Gröfse ist. In diesem Falle wurde auch der Fehler $\tau$ bei unserer obigen Fehlerabschätzung sehr klein und zwar verschwindet er nach (5) bei verschwindendem $\varepsilon$ von der ersten Ordnung. Von den drei Termen nun, aus denen sich $R$ in Gleichung (14) zusammensetzt, enthalten zwei, nämlich die mit $R_+$ und $R_-$ multiplizierten, den Faktor $\varepsilon^2$, weil $\delta$ den Faktor $\varepsilon$ enthält; der dritte Term (vgl. den obigen Ausdruck für $r$) besitzt den Faktor $\varepsilon\tau$. Wir können daher sagen, dafs $R$ bei verschwindendem $\varepsilon$ von der zweiten Ordnung verschwindet, während die in unseren Näherungsformeln beibehaltenen Glieder höchstens von der ersten Ordnung in $\varepsilon$ Null werden. *Mithin stellt bei hinreichend kleinem $\varepsilon$ unser Fehler $f$ einen beliebig kleinen Bruchteil der rechten Seite von Gleichung* (14′) *dar. In diesem Falle geht also die begrenzte Annäherung unserer Formeln* (8′) *und* (14′) *in eine beliebige Annäherung über.*

Eine Ausnahme ist dabei wohl zu beachten. Im Nenner von $R$ kommt der Term $1 - u_0^2$ bez. $1 \pm u$ vor. Nimmt einer dieser

Faktoren in demselben Maſse ab, wie die Parallelkreise $e$ und $e'$ zusammenrücken, so kann die Kleinheit des Zählers in $R$ durch die des Nenners aufgewogen werden. Die vorstehende Aussage gilt daher nur dann, wenn die Bahn der Kreiselspitze nicht in unmittelbarer Nähe des Nord- oder Südpols der Einheitskugel verläuft. In einem solchen Falle könnten, selbst bei beliebig kleinem $\varepsilon$, unsere Näherungsformeln ein ganz falsches Bild der Bewegung liefern. Wir werden daher im folgenden Kapitel (vgl. § 5) die in der Nähe der Pole stattfindenden Bewegungen einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Zum Schlusse ein Wort über das Verhältnis unserer jetzigen Berechnungsweise des elliptischen Integrals erster Gattung zu den Methoden des vorigen Paragraphen.

Wenn wir den Faktor $(e''-u)^{-\frac{1}{2}}$ bei der Aufstellung von Formel (4) durch die konstante Gröſse $(e''-u_0)^{-\frac{1}{2}}$ ersetzen, so kommt dies auf dasselbe hinaus, wie wenn wir jenen Term nach aufsteigenden Potenzen von $u-u_0$ entwickeln und die Entwickelung mit dem konstanten Gliede abbrechen. Es liegt nun nahe, statt des ersten mehrere Glieder bez. die ganze Entwickelung zur Berechnung von $t$ beizubehalten. Im letzteren Falle entsteht eine konvergente unendliche Reihe von Termen, welche sich sämtlich durch cyklometrische Funktionen ausdrücken lassen. Berücksichtigen wir eine genügende Anzahl von ihnen, so können wir ganz allgemein den Grad der Annäherung nach Belieben verbessern. Man sieht also: *Unser Näherungsverfahren von begrenzter Genauigkeit kommt, in dieser Weise ausgestaltet, auf die pag.* 264 *unter* (1) *genannte Reihenmethode von beliebiger Genauigkeit zurück.*

---

## Kapitel V.

# Über besondere Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels, namentlich über die pseudoreguläre Präcession sowie über die Stabilität der Bewegungen.

### § 1. Die reguläre Präcession und ihr benachbarte Bewegungsformen.

In diesem Kapitel wollen wir einige spezielle Bewegungen des Kreisels, z. B. die reguläre Präcession und namentlich die von uns als pseudoreguläre Präcession bezeichnete Bewegung genauer untersuchen. Dabei wird die heikle Frage nach der *Stabilität der Bewegungen* im Vordergrunde unseres Interesses stehen, eine Frage, die auf allen Gebieten der Mechanik eine grundsätzliche Rolle spielt, nicht minder auf den verwandten Gebieten der Physik und Chemie.

Wir beginnen mit der Untersuchung der regulären Präcession des Kugelkreisels vom Trägheitsmomente $A$. Als Grenzfall aus der allgemeinen Bewegung des Kreisels erhalten wir sie, wenn wir die beiden Parallelkreise $u = e$ und $u = e'$, zwischen welche die Bahnkurve der Kreiselspitze eingeschlossen ist, zusammenrücken lassen. Berücksichtigen wir noch, dafs $e$ und $e'$ Wurzeln der kubischen Gleichung $U = 0$ sind, so können wir sagen: *Analytisch ist die reguläre Präcession dadurch charakterisiert, dafs die Gleichung $U = 0$ eine zwischen $-1$ und $+1$ gelegene Doppelwurzel erhält.* Es mufs daher neben $U$ auch der Differentialquotient $\frac{dU}{du}$ für $u = e$ verschwinden. Bilden wir diesen nach den Gleichungen (1) und (2) von pag. 240, so erhalten wir die Bedingung:

$$A\,\frac{n - Ne}{A\,(1 - e^2)}\,\frac{N - ne}{A\,(1 - e^2)} = P, \tag{1}$$

welche, wie schon pag. 252 bemerkt wurde, mit der aus der Theorie des Deviationswiderstandes gefolgerten Gleichung $A\mu\nu = P$ identisch ist.

Eigentümlicher Weise versagt in diesem einfachsten Falle der Kreiselbewegung unsere allgemeine Integrationsmethode. Wenn nämlich $e = e'$ wird, so zieht sich der Integrationsweg für $u$ in den Ausdrücken von

$t$, $\psi$ und $\varphi$ auf einen einzelnen Punkt zusammen und unsere Integrale verlieren zunächst ihren Sinn. Wir gehen daher lieber auf die nicht-integrierten Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{N - nu}{A(1-u^2)}$$

zurück und verifizieren direkt, dafs sie erfüllt sind, wenn wir

$$(3)\qquad \cos\vartheta = u = e, \quad \psi = \nu t, \quad \varphi = \mu t$$

machen. In der That geht die erste Gleichung für $u = e = \text{const}$ über in $0 = 0$; die beiden letzten Gleichungen werden ebenfalls befriedigt, wenn wir die Gröfsen $\nu$ und $\mu$ mittelst der Integrationskonstanten $n$, $N$ und $e$ folgendermafsen bestimmen:

$$(4)\qquad \nu = \frac{n - Ne}{A(1-e^2)}, \quad \mu = \frac{N - ne}{A(1-e^2)}.$$

Hierbei haben wir auf einen merkwürdigen Widerspruch mit dem Vorhergehenden aufmerksam zu machen, der aber nur formaler Natur ist. Unsere letzte Betrachtung zeigt, dafs die Gleichungen (2) bei ganz beliebiger Wahl der Integrationskonstanten $e$, $n$ und $N$ und entsprechender Bestimmung der Konstanten $\vartheta$, $\mu$ und $\nu$ durch die Gleichungen (3) erfüllt werden. Es möchte daher scheinen, als ob die reguläre Präcession bei beliebigen Anfangsbedingungen eine mögliche Bewegung darstellt, während doch oben behauptet wurde und aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht, dafs sie es nur dann ist, wenn zwischen den Integrationskonstanten die Bedingung (1) besteht.

Um die Notwendigkeit dieser letzteren Bedingung direkt zu erhärten, gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung zurück, welche wir etwa in der Lagrangeschen Form zu Grunde legen. Dieselben lauten nach pag. 154, wenn wir für die Komponenten $\Theta$, $\Phi$, $\Psi$ der äufseren Kraft die pag. 220 angegebenen Werte eintragen und für $T$ den Ausdruck (6) von pag. 156 mit $C = A$ benutzen:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\Theta]}{dt} = -A\varphi'\psi'\sin\vartheta + P\sin\vartheta, & \dfrac{d[\Psi]}{dt} = 0, \quad \dfrac{d[\Phi]}{dt} = 0. \\ [\Theta] = A\vartheta', \quad [\Psi] = A(\psi' + \varphi'\cos\vartheta), & [\Phi] = A(\varphi' + \psi'\cos\vartheta). \end{cases}$$

Setzen wir hier den Gleichungen (3) entsprechend $\vartheta' = 0$, $\psi' = \nu$, $\varphi' = \mu$, so folgt aus der zweiten Reihe $[\Theta] = 0$, $[\Psi] = \text{const.}$, $[\Phi] = \text{const.}$; in der ersten Reihe werden alsdann die beiden letzten Gleichungen identisch befriedigt, während die erste Gleichung unsere frühere Bedingung (1) liefert:

$$A\mu\nu = P.$$

*Infolgedessen kann nach unseren ursprünglichen Gleichungen in der That nur eine gewisse Klasse von regulären Präcessionsbewegungen, welche eben durch die Gleichung* (1) *charakterisiert wird, auftreten.*

Wir werden aber weiter dem Grunde nachzugehen wünschen, weshalb die Gleichungen (2) Integrale besitzen, welche in den allgemeinen Differentialgleichungen (5) nicht enthalten sind. Zu dem Zwecke müssen wir uns ein wenig über die Bedeutung unserer Differentialgleichungen in geometrischer Auffassung verbreiten.

Dabei möge es der kürzeren Ausdrucksweise wegen gestattet sein, nur von den Differentialgleichungen für $u$ und $\psi$ zu sprechen.

Die Differentialgleichungen (2) bestimmen für jeden Punkt $(u, \psi)$ der Bahnkurve eine gewisse Fortschreitungsrichtung $\left(\frac{d\psi}{du}\right)$ oder auch, wenn wir wollen, eine gewisse Geschwindigkeit $\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right)$. Wir wollen uns in jedem Punkte des stereographischen Bildes der Einheitskugel die betreffende Fortschreitungsrichtung als eine Art Wegweiser markiert denken. Den Inbegriff des einzelnen Punktes und des zugehörigen Wegweisers bezeichnen wir im Anschlufs an eine heute übliche Ausdrucksweise als *Linienelement.*

*Die Differentialgleichungen integrieren heifst nun, eine Kurve angeben, welche aus lauter solchen Linienelementen zusammengesetzt ist, oder einen Weg beschreiben, welcher überall in Richtung der Wegweiser verläuft.*

Auf Grund dieser Definition sieht man unmittelbar, dafs jede beliebige reguläre Präcession $(n, N, e)$, welche wir erhalten, wenn wir $N$ und $n$ irgendwie und $e$ so wählen, dafs die Gleichung $U = 0$ erfüllt ist, den Differentialgleichungen (2) genügen mufs. Betrachten wir nämlich zunächst diejenige allgemeine Bahnkurve vom Charakter der im vorigen Kapitel beschriebenen Kurven, welche den Integrationskonstanten $n$, $N$ und $e$ entspricht, und konstruieren wir uns die ganze Schaar von Bahnkurven hinzu, welche

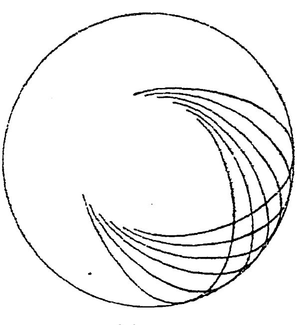


Fig. 46.

entsteht, wenn wir jene erste Kurve um den Mittelpunkt der Figur (um das Bild des Nordpols) drehen (vgl. Fig. 46). Alle diese Kurven sind natürlich Integralkurven von (2); sie berühren überdies alle den Parallelkreis $u = e$. Infolgedessen stellt jedes kleinste Stück des Parallelkreises $u = e$ ein Linienelement dar, welches unseren Differentialgleichungen entspricht. Dieser Parallelkreis selbst ist daher eine Inte-

gralkurve der Gleichungen (2), gleichviel ob die Bedingung (1) zwischen $e$, $n$ und $N$ erfüllt ist oder nicht.

Unsere Betrachtung läſst sich sofort auf beliebige Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern: Wenn wir eine Schaar von Integralkurven solcher Gleichungen kennen und die Enveloppe der Schaar konstruieren, so genügt diese gleichfalls den Differentialgleichungen. Man bezeichnet diese besondere Art von Integralkurven als *singuläre Lösungen*, weil sie sich aus den allgemeinen Lösungen durch Spezialisierung der Konstanten nicht ergeben.

Mit Benutzung dieses terminus können wir daher sagen: *Die reguläre Präcession ist allerdings bei beliebiger Wahl der Konstanten* $e$, $n$ *und* $N$ *eine Lösung der Differentialgleichungen* (2), *aber eine singuläre Lösung.*

Man begreift nun leicht, daſs die singulären Lösungen von (2) nicht auch Lösungen der Differentialgleichungen (5) zu sein brauchen. Machen wir nämlich bei letzteren eine der obigen ähnliche Betrachtung, so haben wir hier nicht von Linienelementen schlechtweg, sondern etwa von *Linienelementen zweiter Ordnung* zu sprechen. Es werden jetzt, nachdem ein Punkt und eine hindurchgehende Fortschreitungsrichtung irgendwie ausgewählt sind, durch die Differentialgleichungen zugehörige Werte der zweiten Differentialquotienten bestimmt. Unsere Wegweiser sind jetzt sozusagen bedingungsweise Wegweiser, welche vorschreiben: Wenn wir von einem Punkte in einer gewissen Richtung vorwärts gehen, so sollen wir uns mit einer gewissen Krümmung der Bahn weiter bewegen. Um die Gleichungen (5) zu integrieren, haben wir also jetzt diese Linienelemente zweiter Ordnung zu einer Kurve zusammenzusetzen bez. die Krümmung der Bahn so einzurichten, wie es durch unsere bedingungsweisen Wegweiser vorgeschrieben wird. Die Integralkurven, zu denen wir so gelangen, müssen jedenfalls unter den Integralkurven von (2) enthalten sein. Letztere Gleichungen können aber möglicherweise noch andere Integrale zulassen. Denn wir können aus der Thatsache allein, daſs die Fortschreitungsrichtungen einer Kurve den Gleichungen (2) genügen, nicht schlieſsen, daſs ihre Krümmungen mit den Gleichungen (5) in Übereinstimmung sind. Bei den singulären Lösungen ist, wie wir sahen, dieses in der That nicht der Fall.

Wir können aber weiter behaupten, daſs die allgemeinen Lösungen von (2) sämtlich auch den Gleichungen (5) genügen müssen. Denn diese Lösungen bilden eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Bahnkurven, und da eine genügende Anzahl sicherlich Integralkurven von (5) sein müssen, so werden es alle sein. *Es haben also die allgemeinen Lösungen von* (2) *die durch* (5) *vorgeschriebene Krümmung, nicht aber die singulären.*

**Des näheren beachte man folgendes: Die Gleichungen (5) entstehen aus den Gleichungen (2) durch Differentiation und Elimination der Konstanten $n$, $N$ und $k$, aber in der Nähe der singulären Lösung $U = 0$ nur durch einen Grenzprozeſs, der für die singuläre Lösung selbst nicht gültig ist.** —

Wir gehen nun zu einer neuen Bewegungsart des Kreisels über, zu den schon pag. 273 erwähnten „*der regulären Präcession benachbarten Bewegungen*". Wir erteilen dem Kreisel zu dem Ende, während er in einer regulären Präcessionsbewegung begriffen ist, einen kleinen Anstoſs. Die Richtung des Anstoſses soll beliebig, die Gröſse desselben aber beliebig klein gewählt werden dürfen. Unser Anstoſs setzt sich mit dem zur regulären Präcession gehörigen Impulse nach der Parallelogrammregel zusammen. Die Komponenten des ursprünglichen Impulses werden also in einem gewissen Zeitpunkte, den wir als „Anfangszeit" bezeichnen können, um beliebig kleine Zuwächse, die Komponenten unseres Anstoſses, vermehrt. Die Frage ist, welche Bewegung dem so veränderten Anfangsimpulse entspricht.

Am bequemsten zerlegen wir den Impuls in seine Komponenten nach den drei durch unser Problem ausgezeichneten Axen, der Figurenaxe, der Vertikalen und der Knotenlinie, d. i. in die senkrechten Projektionen $[\Psi]$, $[\Phi]$, $[\Theta]$ des Impulsvektors auf jene Axen. Von diesen sind die beiden ersten während jeder natürlichen Bewegung des schweren Kreisels unveränderlich und mit den Integrationskonstanten $N$ und $n$ identisch. Die letzteren Buchstaben mögen speziell die für die reguläre Präcession charakteristischen Werte der Komponenten $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bezeichnen; die Zuwächse, welche sie durch unsern Anstoſs erfahren, mögen $N'$ und $n'$ heiſsen. Die dritte Impulskomponente $[\Theta]$ ist im allgemeinen während der Bewegung variabel. Nur bei der regulären Präcession haben wir speziell $[\Theta] = 0$, weil nach (5) $[\Theta] = A\vartheta'$ und $\vartheta' = 0$ ist. Der Zuwachs, welcher durch den Anstoſs hinzugefügt wird, bedeutet daher den Gesamtwert der $[\Theta]$-Komponente zu Beginn der Bewegung. Wir bezeichnen ihn mit $[\Theta_0]$, um anzudeuten, daſs dieser Wert die $[\Theta]$-Komponente nur zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Im Übrigen werden wir den Effekt der Impulszuwächse $n'$, $N'$ und $[\Theta_0]$ einzeln untersuchen. In diesem Sinne fragen wir zunächst nach der Verschiebung der beiden Parallelkreise $e$ und $e'$ bei ausschlieſslicher Vermehrung der Impulskomponente $[\Psi]$ um $n'$.

Zunächst ist klar, daſs einer der Parallelkreise $e$, $e'$ mit dem Präcessionskreise $e$ zusammenfällt. Da nämlich $[\Theta_0] = 0$ sein sollte, so wird zu Beginn der Bewegung, wo $u = e$ ist, $\vartheta' = 0$, also auch $u' = 0$. Eine Wurzel der Gleichung $U = 0$ ist also nach wie vor gleich $e$. Die zweite Wurzel $e'$, welche im Falle $n' = 0$ mit $e$ zusammenfällt,

wird durch unsern Anstofs einen Zuwachs erfahren. Wir bezeichnen diesen mit $2\varepsilon$, setzen also, wie pag. 270, $e' - e = 2\varepsilon$. Dabei ist $\varepsilon$ eine mit $n'$ verschwindende Zahl, wie unmittelbar aus der Stetigkeit unserer $C_3$ von pag. 250 folgt. Nehmen wir $n'$ hinreichend klein, so können wir auch $\varepsilon$ beliebig klein machen.

Die Gröfse von $e'$ bez. die von $2\varepsilon$ berechnet sich darauf aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240 oder, wie wir ausführlicher schreiben wollen,

$$U_1(u, v) = 0.$$

Diese Gleichung mufs erfüllt sein einerseits im Falle der regulären Präcession, d. h. für $u = e$, $v = n$, andrerseits im Falle unserer zur regulären Präcession benachbarten Bewegung, also für $u = e + 2\varepsilon$, $v = n + n'$. Entwickeln wir daher $U_1(e + 2\varepsilon, n + n')$ nach dem Taylorschen Lehrsatze in der Nähe des Wertepaares $(e, n)$, so ergiebt sich wegen $U_1(e, n) = 0$:

$$U_1(e + 2\varepsilon, u + n') = 2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} + \cdots;$$

hier verschwindet die linke Seite; auf der rechten vernachlässigen wir wegen der Kleinheit von $\varepsilon$ und $n'$ alle nicht hingeschriebenen höheren Potenzen. Alsdann ergiebt sich:

$$2\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial u} + n' \frac{\partial U_1}{\partial v} = 0$$

oder

$$2\varepsilon = -n' \frac{\partial U_1}{\partial v} \Big/ \frac{\partial U_1}{\partial u},$$

wobei wir rechts $v = n$, $u = e$ einzutragen haben. Ohne die rechte Seite genauer auszurechnen, begnügen wir uns gezeigt zu haben, dafs $\varepsilon$ auf diese Weise als eine mit $n'$ verschwindende Gröfse in jedem Falle bestimmt werden kann.

Nicht anders liegt die Sache, wenn wir $N$ um $N'$ vermehren, dafür aber die ursprünglichen Werte $[\Psi] = n$, $[\Theta_0] = 0$ festhalten. Der eine Parallelkreis ist wiederum $e$; die Verschiebung $2\varepsilon$ des anderen Parallelkreises berechnet sich wie vorher; da nämlich die Gleichung $U_1 = 0$ in $n$ und $N$ symmetrisch gebaut ist, haben wir in der Endformel für $\varepsilon$ nur $n$ und $N$ zu vertauschen und $N'$ statt $n'$ zu schreiben.

Im dritten Falle, wo wir den Anstofs $[\Theta_0]$ hinzufügen und $n' = N' = 0$ nehmen, verschieben sich beide Parallelkreise $e$ und $e'$. Es ist nämlich jetzt zu Beginn der Bewegung nicht mehr $\vartheta_0' = 0$, sondern $A\vartheta_0' = [\Theta_0]$, mithin ist auch der Anfangswert von $u$, den wir mit $u_0$ bezeichnen, nicht mehr Wurzel von $U = 0$. Bei der Bestimmung von $e$ und $e'$ haben wir daher von dieser kubischen Gleichung und nicht von der

quadratischen $U_1 = 0$ auszugehen. Es soll gezeigt werden, daſs die beiden Parallelkreise $e$ und $e'$ von dem ursprünglichen Präcessionskreise $u_0$ in erster Annäherung beide gleichweit abstehen, so daſs $u_0$ wie im vorigen Paragraphen den mittleren Parallelkreis bedeutet:

$$u_0 = \frac{e + e'}{2}.$$

Die ursprüngliche Form des Ausdruckes $U$ war pag. 238 in Gleichung (7′) angegeben:

$$(6) \qquad A^2 U = -(Nu - n)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1 - u^2).$$

Zu Beginn der Bewegung ($u = u_0 = \cos \vartheta_0$) ist die linke Seite dieser Gleichung bekannt. Da nämlich allgemein

$$U = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \sin^2 \vartheta \cdot \vartheta'^2,$$

so wird für $u = u_0$

$$A^2 U = \sin^2 \vartheta_0 (A\vartheta_0')^2 = (1 - u_0^2)[\Theta_0]^2.$$

Somit folgt die Gleichung

$$(7) \quad (1 - u_0^2)[\Theta_0]^2 = -(Nu_0 - n)^2 + (k - N^2 - 2APu_0)(1 - u_0^2).$$

Aus (6) und (7) wollen wir $k$ eliminieren, nachdem wir in (6) $U = 0$ gesetzt haben. Wir finden so für die gesuchten Werte $u = e$ und $u = e'$ die Gleichung:

$$(8) \qquad (1 - u^2)[\Theta_0]^2 = (Nu - n)^2 - (Nu_0 - n)^2 \frac{1 - u^2}{1 - u_0^2} + 2AP(u - u_0)(1 - u^2).$$

Das Polynom dritten Grades, welches auf der rechten Seite steht, kann leicht in Linearfaktoren aufgelöst werden. Setzen wir nämlich die rechte Seite gleich Null, so müssen wir die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ im Falle der regulären Präcession wiederfinden, weil $[\Theta_0] = 0$ diese Bewegung ergiebt. Die Linearfaktoren der rechten Seite lauten daher $u - u_0$, $u - u_0$ und $u - e''$. Der hinzutretende von $u$ unabhängige Faktor wird gleich dem Koeffizienten von $u^3$ in Gleichung (8) und die rechte Seite dieser Gleichung gleich

$$-2AP(u - u_0)^2 (u - e'').$$

Mithin können wir statt (8) einfacher schreiben:

$$(1 - u^2)[\Theta_0]^2 = 2AP(u - u_0)^2 (e'' - u).$$

Nun dürfen wir $[\Theta_0]$ beliebig klein voraussetzen, so daſs auch die rechte Seite auſserordentlich klein wird. Die gesuchten Wurzeln $e$ und $e'$ liegen daher auſserordentlich nahe an $u_0$. Wir setzen $u = u_0 + \varepsilon$ und erhalten zur Bestimmung von $\varepsilon$ die Gleichung

$$(9) \qquad \varepsilon^2 = \frac{(1 - (u_0 + \varepsilon)^2)[\Theta_0]^2}{2AP(e'' - u_0 - \varepsilon)}.$$

Die rechte Seite könnten wir nach Potenzen von $\varepsilon$ in eine konvergente Reihe entwickeln. Da wir aber $\varepsilon$ ebenso wie $[\Theta_0]$ als beliebig klein voraussetzen können, brauchen wir nur das erste Glied. Aus diesem ergeben sich zwei entgegengesetzt gleiche Werte für $\varepsilon$, nämlich

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1 - u_0^2}{2AP(e'' - u_0)}}\,[\Theta_0].$$

Hiernach werden die gesuchten Werte

$$e = u_0 - \varepsilon \quad \text{und} \quad e' = u_0 + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ mit $[\Theta_0]$ verschwindet.

Die Parallelkreise $e$ und $e'$ stehen also in erster Annäherung gleichweit ab von dem Ausgangskreise $u_0$, dieser stellt, wie behauptet wurde, den „mittleren Parallelkreis der Bewegung" im Sinne des vorigen Paragraphen dar.

Wir kommen nach diesen Vorbereitungen auf unsere pag. 283 getroffene Unterscheidung der drei Fälle zurück, welche bez. durch die drei Werte des Zusatzimpulses $n'$, $N'$, $[\Theta_0]$ charakterisiert waren. Allen drei Fällen ist, wie wir sahen, gemeinsam, dafs die Parallelkreise $e$ und $e'$ einander um so näher liegen, je kleiner der Anstofs gewählt war. *Die fraglichen Bahnkurven sind also ihrem Verlaufe nach dem ursprünglichen Präcessionskreise beliebig benachbart,* wie schon in ihrer Benennung ausgedrückt wurde.

Sodann erinnern wir uns der Ergebnisse des vorigen Paragraphen. Die dortigen Näherungsformeln (8′) und (14′), welche im allgemeinen nur eine begrenzte Annäherung lieferten, geben gerade in dem jetzt vorliegenden Spezialfalle eine beliebig gute Annäherung; der Fehler wird sowohl in der Formel für $u$ wie in der für $\psi$ bei hinreichend kleinem $\varepsilon$ beliebig klein. Wir werden daher jene Formeln ohne Bedenken*) auf die vorliegenden drei Fälle anwenden und schreiben dürfen:

$$(10)\qquad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \dfrac{\pi t}{\omega}, \\[2ex] \psi = \nu t + \nu_1 \varepsilon \cos \dfrac{\pi t}{\omega}; \end{cases}$$

die hierbei benutzten Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

$$(11)\qquad \omega = \pi \sqrt{\frac{A}{2P(e'' - u_0)}}, \quad \nu = \frac{n - N u_0}{A(1 - u_0^2)},$$

$$\nu_1 = \frac{N(1 + u_0^2) - 2 n u_0}{\pi A (1 - u_0^2)^2}\,\omega,$$

---

*) Man beachte jedoch die Bedingung von pag. 277, wonach $u_0$ nicht, und auch nicht nahezu, gleich $\pm 1$ sein darf. Über diese Präcessionsfälle folgen im § 5 einige Bemerkungen.

wobei $n$ und $N$ die Gesamtwerte der Impulskomponenten $[\Psi]$ und $[\Phi]$, d. h. die eventuell um $n'$ und $N'$ vermehrten Werte dieser Komponenten bei der ursprünglichen regulären Präcession bezeichnen.

Um eine klare Vorstellung von unsern benachbarten Bahnkurven zu bekommen, betrachten wir die *Teilbewegungen der regulären Präcession und der Nutation*, in welche die Bewegung der Kreiselspitze durch (10) zerlegt erscheint, für sich.

Die Bahnkurve der ersten Teilbewegung ist der Präcessionskreis $u = u_0$. *Dieser fällt mit dem ursprünglichen Präcessionskreise nur in dem Falle zusammen, wo der Anstofs die Knotenlinie zur Axe hat* ($n' = N' = 0$, $[\Theta_0] \neq 0$). In den beiden anderen Fällen dagegen ist er im Vergleich zu dem ursprünglichen Präcessionskreise um das Stückchen $\varepsilon$ im vertikalen Sinne verschoben. Genauer könnten wir so sagen: Bei dem Anstofse $[\Theta_0]$ verschwindet die Abweichung zwischen dem mittleren Parallelkreise $u_0$ und dem Kreise der ursprünglichen Präcession bei verschwindender Gröfse des Anstofses von höherer als der ersten Ordnung, bei den Anstöfsen $n'$ und $N'$ dagegen nur von der ersten Ordnung.

Die Präcessionsgeschwindigkeit unserer ersten Teilbewegung ist in allen Fällen durch die Gröfse $\nu$ aus Gleichung (11) gegeben. *Diese Gröfse stimmt mit der ursprünglichen Präcessionsgeschwindigkeit wieder nur im Falle des Anstofses* $[\Theta_0]$ *überein*, weil alsdann die Impulskomponenten $n$ und $N$ ungeändert bleiben und der Wert von $u_0$ mit dem ursprünglichen Werte von $u$ bei der regulären Präcession in dem eben präcisierten Sinne zusammenfällt. In den beiden anderen Fällen weicht der Wert der Präcessionsgeschwindigkeit von dem ursprünglichen Werte um Gröfsen ab, welche von derselben Gröfsenordnung wie $n'$ und $N'$ sind.

Die zweite Teilbewegung, die Nutation, ist nach Früherem eine harmonische Schwingung mit ungleichen Amplituden in den Koordinaten $u$ und $\psi$ oder, wie wir kürzer sagen, eine elliptische Schwingung relativ zum Kreise der Präcession. Die durch (11) bestimmte Gröfse $\omega$ giebt die halbe Schwingungsdauer, d. h. diejenige Zeit an, während der die Kreiselspitze von $e$ zu $e'$ gelangt. Die vertikale Schwingungsamplitude wird durch $\varepsilon$, die horizontale durch $\nu_1 \varepsilon$ gemessen. Man sieht ohne weiteres, *dafs bei verschwindendem Anstofs die Schwingungsperiode im allgemeinen endlich bleibt, während die beiden Schwingungsamplituden ihrerseits verschwinden.* Drücken wir nämlich $\omega$ durch unsere gewöhnlichen Integrationskonstanten $n$, $N$ u. s. w. aus, indem wir für $e''$ den Wert aus Gleichung (9) von pag. 273 eintragen, so folgt in der Grenze für verschwindende Gröfse des Anstofses:

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{A^2(1-e^2)}{n^2+N^2-2nNe-4APe(1-e^2)}};$$

hier bedeuten $n$, $N$ und $e$ die Konstanten der ursprünglichen regulären Präcession. Der so gefundene Grenzwert von $\omega$ ist offenbar von Null verschieden. Dasselbe gilt von dem Grenzwerte des Winkels $\psi_\omega$, um welchen das Azimuth der Kreiselspitze während einer Nutation zunimmt. Nach Gleichung (11) wird nämlich einfach

$$\psi_\omega = \nu\omega.$$

Wir können hiernach mit leichter Mühe die Figurenserie des vorigen Kapitels durch eine Figur vervollständigen, indem wir neben Fig. 31 („langsame Präcession") eine Nachbarfigur einschalten. In 31 war vorausgesetzt $A = -P = 1$, $e = 0$, $N = 0,2$, $n = -5$. Geben wir beispielsweise $n$ einen von $-5$ etwas verschiedenen Wert, so überlagert sich der regulären Präcession eine Schwingung von der halben Periode

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{1}{n^2+N^2}} = \frac{\pi}{5} \text{ circa};$$

gleichzeitig wird der Azimuthalausschlag während der Zeit $\omega$

$$\psi_\omega = \dot{n}\omega = -\pi \text{ circa}.$$

Die neben Fig. 31 einzuschaltende Nachbarfigur würde daher folgendermaſsen schematisch zu zeichnen sein (vgl. Fig. 47). Man beachte die eigentümliche Thatsache, daſs unsere Nutation, welche, wie wir wissen, für sich genommen, verschwindende Dimensionen hat, durch Überlagerung mit der endlichen Präcessionsgeschwindigkeit zu einer nahezu vollständigen Umkreisung der Vertikalen aus einander gezogen wird.

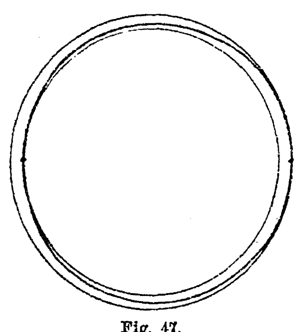


Fig. 47.

Ganz dieselbe Figur kann uns auch als Darstellung der zu der unendlich schnellen Präcession (Fig. 35) benachbarten Bahnkurven dienen. Nur wird hier (wegen des besonderen Wertes $n = \infty$) $\omega$ gleich 0 und $\psi_\omega$ genau gleich $\pm\pi$. —

Die wesentliche Absicht, welche wir bei der Heranziehung der zur regulären Präcession benachbarten Lösungen verfolgen, besteht jedoch nicht sowohl in der Erkenntnis dieser Bewegungen selbst, als vielmehr darin, daſs wir von hieraus auf die *Stabilität der regulären Präcession* Schlüsse machen können. Wir behaupten nämlich auf Grund unserer Untersuchung der benachbarten Bewegungen: *Die reguläre Präcession ist sicher eine stabile Bewegung des Kreisels.*

Was wir unter dem Worte Stabilität verstehen wollen, haben wir bereits pag. 219, wenn auch noch nicht mit hinlänglicher Schärfe, erklärt. Eine eingehendere Definition sparen wir bis zu dem sechsten Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels auf; für den vorliegenden Fall genügt unsere frühere Erklärung. Wir wiederholen daher: Eine Bewegung soll stabil heifsen, wenn sich bei Hinzufügung eines hinreichend kleinen Anstofses von beliebiger Richtung der Charakter der Bewegung *stetig* ändert.

Wollen wir dieses Kriterium auf unseren Fall anwenden, so müssen wir die vorhergehenden Betrachtungen noch erst nach zwei Richtungen vervollständigen.

Unter der „Bewegung" werden wir nämlich nicht nur die Bewegung der Kreiselspitze längs ihrer Bahnkurve, sondern die Gesamtheit der Lagen des Kreisels, d. h. den Inbegriff der Werte verstehen müssen, welchen etwa die Koordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ während des Ablaufs der Zeit annehmen. Nun wissen wir aber, dafs die Werte der $\varphi$-Koordinate aus denen der $\psi$-Koordinate durch Vertauschung von $n$ und $N$ mit $-N$ und $-n$ erhalten werden können (vgl. das Reciprocitätsgesetz des Kugelkreisels in § 5 des vorigen Kapitels). Wir haben daher, um die „Bewegung" vollständig zu beherrschen, nicht nötig, für die $\varphi$-Koordinate neue Entwicklungen zu machen, sondern können uns darauf berufen, dafs diese sich qualitativ ebenso verhält wie die $\psi$-Koordinate.

Ferner spricht unsere Stabilitätsdefinition von einem beliebigen Anstofse, d. h. von einer gleichzeitigen Vermehrung der Impulskomponenten $[\Phi]$, $[\Psi]$, $[\Theta]$ um kleine Zuwächse. Es ist aber klar, dafs der Effekt eines beliebigen Anstofses sich durch direkte Superposition aus den Wirkungen der oben betrachteten speziellen Anstöfse $n'$, $N'$, $[\Theta_0]$ zusammensetzen lassen mufs, falls nur jene Zuwächse hinreichend klein sind. Die hierbei entstehenden Formeln für $u$, $\psi$ und $\varphi$ sind daher vom gleichen Charakter, wie die obigen für $u$ und $\psi$.

Nun zeigt der Anblick der Gleichungen (10), dafs diese Formeln stetig in die Gleichungen der regulären Präcession übergehen, wenn wir die Gröfse der Impulszuwächse stetig verkleinern. Dasselbe gilt daher für eine ganz beliebige Störung hinsichtlich des Gesamtcharakters der Bewegung. Auch dieser wird stetig in die reguläre Präcession übergehen, wenn wir die Störung stetig zu Null abnehmen lassen.

*Hiernach ist die Stabilität der regulären Präcession sichergestellt.*

Unsere hier benutzte Definition der Stabilität ist von der gewöhnlich gegebenen Definition (vgl. hierzu § 6 dieses Kapitels) verschieden. Während wir nur verlangen, dafs die Abänderung der Bewegung eine stetige sei,

d. h. um so kleiner ausfalle, je kleiner der Anstofs genommen wird, bezeichnet man sonst vielfach eine Bewegung nur dann als stabil, wenn die Abweichung der gestörten Bewegung von der ursprünglichen *dauernd* sehr klein (oder beliebig klein) bleibt. Wir möchten uns im allgemeinen diesem Sprachgebrauch nicht anschliefsen, weil er, wie später gezeigt werden wird, eine ungebührliche Beschränkung des Stabilitätsbegriffes mit sich bringt. Wir bemerken aber, dafs speziell die reguläre Präcession auch nach diesem engeren Stabilitätsbegriffe als stabil zu bezeichnen ist, sofern wir nämlich unser Augenmerk lediglich auf die geometrische Gestalt der Kreiselspitzenbahn richten und von ihrer zeitlichen Durchlaufung absehen. In der That ist die durch einen Zusatzstofs abgeänderte Bahnkurve ganz in einer Kugelzone von der (in vertikaler Richtung gemessenen) Breite $2\varepsilon$ eingeschlossen und kann durch Verkleinerung von $\varepsilon$ und mittelbar durch Verkleinerung der Störung dem Präcessionskreise $e$ ihrer ganzen Erstreckung nach beliebig nahe gebracht werden. Dafs etwas Analoges nicht bei jeder Bewegung der Fall ist, zeigt unter anderem das Beispiel der kräftefreien Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Bei Hinzufügung eines Anstofses verwandelt sich die ursprüngliche geradlinige Bahn in eine andere gerade Linie, welche sich von der ersteren im Laufe der Zeit beliebig weit entfernt, wie klein auch der Anstofs gewählt sein möge. Wir werden also insofern der Bahnkurve der regulären Präcession einen *besonders hohen Grad von Stabilität* zusprechen müssen.

Die Sache liegt schon anders, wenn wir aufser der Gestalt der Bahnkurve auch ihre zeitliche Durchlaufung oder den Gesamtcharakter der Bewegung mit Einschlufs der $\varphi$-Koordinaten in Betracht ziehen.

Wir können nämlich nicht behaupten, dafs die Entfernung der Kreiselspitze bei der durch einen kleinen Anstofs abgeänderten Bewegung von ihrer Lage in entsprechenden Zeiten bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen dauernd klein bleibt. In der That sahen wir, dafs durch Hinzufügung des Anstofses $n'$ oder $N'$ der mittlere Wert der Winkelgeschwindigkeit $\psi'$ abgeändert wird, so dafs die Kreiselspitze nach der Störung ihre Bahn mit einer anderen Geschwindigkeit durchläuft wie vor derselben. Im Laufe der Zeit wird daher die Lage der Kreiselspitze bei den verglichenen Bewegungen um beliebige endliche Stücke differieren. Entsprechendes gilt nach unserem Reciprocitätsgesetz von der Koordinate $\varphi$, sofern durch den Anstofs die Werte von $n$ und $N$ abgeändert werden.

Lediglich in dem speziellen Falle, wo der Anstofs keine Veränderung von $[\Phi]$ und $[\Psi]$ bewirkt und nur aus der einen Komponente

$[\Theta_0]$ besteht, bleibt, wie wir sahen, der ursprüngliche Betrag der Präcessionsgeschwindigkeit $\psi'$ und daher auch der ursprüngliche Wert von $\varphi'$ erhalten. Die abgeänderte Bahnkurve oscilliert dann mit gleichem Ausschlag nach oben und unten um den ursprünglichen Präcessionskreis herum. Also würde nur bei Beschränkung auf so spezielle Anstöfse die Abweichung in der Lage der Kreiselspitze und den Kreisellagen überhaupt bei den verglichenen Bewegungen dauernd klein bleiben, und die reguläre Präcession im gewöhnlichen Sinne nur unter dieser Einschränkung stabil zu nennen sein. Die letzten Bemerkungen fassen wir noch einmal, wie folgt, zusammen:

*Im Sinne der gewöhnlichen Stabilitätsdefinition müfste man konsequenter Weise die reguläre Präcession als instabil bezeichnen. Stabil könnte man sie nur nennen, wenn man eine von zwei Einschränkungen hinzufügt. Entweder: Man beachte nur die geometrische Gestalt der Bahnkurve, nicht die Bewegung auf der Bahnkurve bez. die Bewegung des Kreisels überhaupt; oder: Man richte die Störung so ein, dafs sie lediglich eine Veränderung von $\vartheta'$ bewirkt, dagegen $\varphi'$ und $\psi'$ ungeändert läfst. Vom Standpunkte unseres Stabilitätsbegriffes hingegen haben wir die reguläre Präcession ohne Einschränkung für stabil zu erklären. Dabei können wir konstatieren, dafs der geometrischen Gestalt der Bahnkurve, und bei den zuletzt genannten speziellen Störungen der Bewegung überhaupt, ein besonders hoher Grad von Stabilität zukommt.*

## § 2. Die pseudoreguläre Präcession, Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung.

Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Punkte der gesamten Kreiseltheorie, zur Erklärung derjenigen Bewegung, welche wegen ihrer paradoxen Eigenschaften und wegen der Häufigkeit ihres thatsächlichen Vorkommens vor allen anderen das Interesse der erklärenden und beobachtenden Naturforscher auf sich gezogen hat. Wir meinen diejenige Bewegung des Kreisels, welche wir als *pseudoreguläre Präcession* bezeichnet haben.

Die Eigenart dieser Bewegung wollen wir zunächst durch Vergleich mit der *regulären Präcession* schildern.

Wie wir gesehen haben, tritt die reguläre Präcession nur unter besonderen Umständen auf, welche im vorigen Paragraphen sowie im sechsten Paragraphen des dritten Kapitels ausführlich angegeben sind. Wenn man sich aber auf den Standpunkt des Experimentes stellt, könnte man leicht zu der Auffassung kommen, dafs die reguläre Präcession die allgemeine Bewegung des schweren Kreisels wäre und dafs sie bei willkürlicher Wahl der Anfangsbedingungen zustande käme. In der That,

wenn wir den Kreisel, wie es gewöhnlich geschieht, mit einer Schnur aufziehen und ihn dann, ohne Hinzufügung eines sonstigen erheblichen Anstofses, dem Einflufs der Schwere überlassen, so scheint die Figurenaxe einen Kreiskegel um die Vertikale mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit zu beschreiben. Dies Ergebnis müfste natürlich im höchsten Grade paradox erscheinen. Denn es ist nicht zu begreifen, wie die nach unten wirkende Schwere im allgemeinen eine Bewegung hervorrufen sollte, bei der z. B. sämtliche Punkte der Figurenaxe dauernd in horizontaler Richtung, also genau senkrecht gegen die Richtung der äufseren Kraft, fortschreiten.

Hiergegen ist nun zu bemerken: *Erstens* ist das genannte Beobachtungsergebnis nicht exakt. Die Bewegung hat nur eine äufserliche Ähnlichkeit mit der regulären Präcession. Wenn wir genauer hinsehen, bemerken wir, dafs die Figurenaxe kleine periodische Schwingungen um den Kreiskegel der regulären Präcession ausführt, welche allerdings bei sehr grofser Rotationsgeschwindigkeit kaum merklich sind und sich am ehesten noch in einem periodischen Erzittern der Unterlage kundgeben. Aus diesem Grunde haben wir die in Rede stehende Bewegung mit dem Namen der *pseudoregulären Präcession* belegt.

Die Täuschung wird noch dadurch verstärkt, dafs die Abweichungen von der regulären Präcession durch allerlei Nebenumstände, welche in der abstrakten Mechanik gewöhnlich nicht berücksichtigt werden, wie Reibung, Elasticität der Unterlage, schnell absorbiert werden. Diese Nebenumstände sollen indessen vorläufig aufser Betracht bleiben.

*Zweitens* sind die Verhältnisse, wie sie im Experimente gewöhnlich vorliegen, nicht die allgemeinen, sondern in gewisser Weise spezialisiert. Denn wir schaffen durch das Aufziehen allemal einen Impulsvektor, welcher genau oder nahezu in die Richtung der Figurenaxe fällt und welcher überdies stets eine sehr beträchtliche Länge hat.

Wir werden so, zunächst vom experimentellen Standpunkte aus, dazu geführt, die Bedingungen für die Möglichkeit der pseudoregulären Präcession folgendermafsen zu formulieren:

*Die Bewegung wird dann eine pseudoreguläre Präcession sein, wenn der Impulsvektor anfangs nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt und eine beträchtliche Länge hat.*

Die Worte „nahezu“ und „beträchtlich“ müssen dabei natürlich genauer präcisiert werden. Wir wollen etwa sagen, zwei Richtungen fallen „nahezu“ zusammen, wenn wir ihre Durchstofsungspunkte auf der Einheitskugel mit blofsem Auge nicht mehr unterscheiden können.

Um sodann mit dem Worte „beträchtlich“ eine genaue Vorstellung zu verbinden, müssen wir die Länge des Impulsvektors mit der Gröfse

der Schwerkraft vergleichen. Eine direkte Vergleichung der beiden Gröfsen ist deshalb mifslich, weil sie verschiedene Dimensionen haben, ihr Quotient also keine absolute Zahl ist. In der That hat $|i|$ die Dimension $\left[\frac{m l^2}{t}\right]$, $P$ dagegen die Dimension $\left[\frac{m l^2}{t^2}\right]$ (vgl. pag. 88 u. 84). Dagegen sind $|i|^2$ und etwa $AP$ zwei gleichbenannte Gröfsen, indem beiden die Dimension $\left[\frac{m^2 l^4}{t^2}\right]$ zukommt. Infolgedessen können wir diese beiden Gröfsen direkt numerisch vergleichen. Wir wollen nun etwa festsetzen: Die Länge des Impulses soll als beträchtlich gelten, wenn ihr Quadrat mindestens das 100-fache des (in gleichen Einheiten gemessenen) Produktes $AP$ beträgt. Da der Hauptbestandteil von $|i|$ nach der vorhergehenden Festsetzung von dem Eigenimpulse $N$ gebildet wird und da sicher $|i| \geqq N$ ist, so können wir unsere Erklärung des Wortes „beträchtlich" auch so fassen: Die Länge des Impulsvektors soll als beträchtlich gelten, wenn

$$N^2 > 100\, AP.$$

Die obige Bedingung für das Eintreten der pseudoregulären Präcession unterscheidet sich offenbar wesentlich von der im vorigen Paragraphen für die reguläre Präcession angegebenen. Während diese eine quantitative Bedingung war und ein ganz bestimmtes numerisches Verhältnis der Integrationskonstanten verlangte, ist unsere jetzige Bedingung qualitativer Natur; sie legt den Konstanten nur gewisse Ungleichungen auf. Dementsprechend ist die pseudoreguläre Präcession auch nur ein qualitativer Begriff; je nachdem wir den Ton auf die ersten oder letzten Silben des Wortes legen, postulieren wir eine geringere oder gröfsere Ähnlichkeit mit der regulären Präcession.

Übrigens bemerken wir, dafs im vorigen Kapitel, wo wir von der pseudoregulären Präcession sprachen (vgl. Fig. 28), die soeben angegebenen Bedingungen erfüllt waren. Dort war nämlich die Anfangslage des Impulses wie die der Figurenaxe horizontal ($n = 0$, $e = 0$), aufserdem war die Länge des Impulses als unendlich vorausgesetzt ($N = \infty$).

Wegen der Wichtigkeit unserer Bewegung wird es gut sein, die Behandlung möglichst elementar zu gestalten, wie solches auch von anderer Seite vielfach versucht worden ist, worauf wir im nächsten Paragraphen zurückkommen. Wir wollen also für das Folgende von unserer Kenntnis der allgemeinen Bewegungsformen zunächst absehen und unsere Resultate erst nachträglich mit der Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Integrale in Beziehung setzen.

Eine rein elementare Behandlung ist in unserem Falle natürlich nur auf Grund von mehr oder minder plausibeln Vernachlässigungen möglich,

welche sich streng nur aus der strengen Theorie und auf analytischem Wege rechtfertigen lassen. Trotzdem ist eine solche Behandlung lehrreich, da sie uns zwingt, auf die einfachsten Erklärungsgründe zurückzugehen, welche in den fertigen Formeln nur versteckt enthalten sind.

Nehmen wir für den Augenblick an, dafs die Schwere überhaupt nicht wirksam wäre. Dann rotiert unser Kreisel, den wir als Kugelkreisel voraussetzen, wie wir wissen, um die im Raume feste Impulsaxe mit konstanter Geschwindigkeit herum. Die Figurenaxe beschreibt einen Kreiskegel, welcher sehr eng sein wird, da nach Voraussetzung bei unserer Bewegung der anfängliche Richtungsunterschied zwischen Figuren- und Impulsaxe sehr gering ist. Die Kreiselspitze durchläuft auf der Einheitskugel fortgesetzt einen kleinen Kreis. *Wir setzen überdies voraus, dafs die Impulsaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfalle;* alsdann wird die durch die Figurenaxe gelegte Meridianebene von der durch die Impulsaxe gehenden Meridianebene bei unserer Rotation dauernd nur wenig abweichen und in erster Annäherung als mit jener zusammenfallend behandelt werden können. Ferner wird sich der Winkel $\vartheta$ zwischen der Vertikalen und der Figurenaxe bei unserer Drehung nur sehr wenig ändern und in erster Annäherung konstant gesetzt werden können.

Hierauf berücksichtigen wir die Wirkung der Schwere. Der Impuls bleibt unter ihrem Einflufs nicht konstant, sondern setzt sich mit dem Drehstofse der Schwere $P \sin \vartheta$ in jedem Momente zusammen. Es mufs unsere nächste Aufgabe sein, uns von der Bahn des Impuls-Endpunktes ein Bild zu verschaffen.

Die Bewegung des Kreisels besteht natürlich nach wie vor aus einer Drehung um die (jetzt nicht mehr feste) Axe des Impulses. Betrachten wir nur einen genügend kurzen Zeitraum, etwa den einer einmaligen Umdrehung der Figurenaxe um den Impulsvektor, so können wir bei unserer jetzigen Bewegung dieselben Vernachlässigungen eintreten lassen, welche soeben für die Drehung um die im Raume feste Impulsaxe vorgeschlagen wurden. Wir können nämlich sagen: *Die Änderung des Impulses steht auf der durch die Impulsaxe gelegten Meridianebene* (statt auf der durch die Figurenaxe gelegten) *senkrecht.* Und: *Die Änderungsgeschwindigkeit hat die konstante Gröfse* $P \sin \vartheta_0$, *wo* $\vartheta_0$ *irgend einen mittleren Wert des Winkels* $\vartheta$ *bedeutet* (anstatt der variabeln Gröfse $P \sin \vartheta$). Durch diese Angaben ist aber die Bahn des Impuls-Endpunktes in einfachster Weise bestimmt. *Sie ist einfach ein Kreisbogen um die Vertikale und wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.* Der Durchstofsungspunkt des Impulsvektors mit der Einheitskugel, den wir durch $J$ bezeichnen wollen, bewegt sich daher *auf einem*

*Parallelkreise* oder, wenn wir nur einen genügend kleinen Teil der Einheitskugel betrachten und diese an der betreffenden Stelle durch ihre Tangentialebene ersetzen, *auf einer geraden Linie.*

Wir können leicht die Fortschreitungsgeschwindigkeit $v$ des Punktes $J$ angeben. Diese verhält sich ersichtlich zu der Fortschreitungsgeschwindigkeit $P \sin \vartheta_0$ des Impuls-Endpunktes wie 1 zu $|i|$, unter $|i|$ die Länge des Impulsvektors verstanden. In dieser Proportion mögen wir $|i|$ einfach ersetzen durch die Projektion $N$ des Impulsvektors auf die Figurenaxe, weil diese nach Voraussetzung den Hauptbestandteil des Impulses ausmacht. Wir finden so für die Geschwindigkeit $v$ den Wert

$$v = \frac{P \sin \vartheta_0}{N}. \tag{1}$$

Die Bewegung der Figurenaxe und die Bahnkurve der Kreiselspitze sind jetzt leicht zu bestimmen. Die Kreiselspitze $F$, d. h. der Durchstofsungspunkt der Figurenaxe mit der Einheitskugel, mufs nämlich, da die instantane Bewegung aus einer Drehung um den Impulsvektor besteht, ständig senkrecht gegen die Verbindungslinie $JF$ fortschreiten. Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit $w$, mit welcher sich $F$ um $J$ dreht, einfach gleich $\frac{|i|}{A}$. Ersetzen wir, wie oben, $|i|$ durch den Hauptbestandteil $N$ des Impulses, so ergiebt sich für $w$ der konstante Wert

$$w = \frac{N}{A}. \tag{2}$$

*Durch die letzten Angaben ist aber die Bahnkurve der Kreiselspitze als Cykloide charakterisiert.*

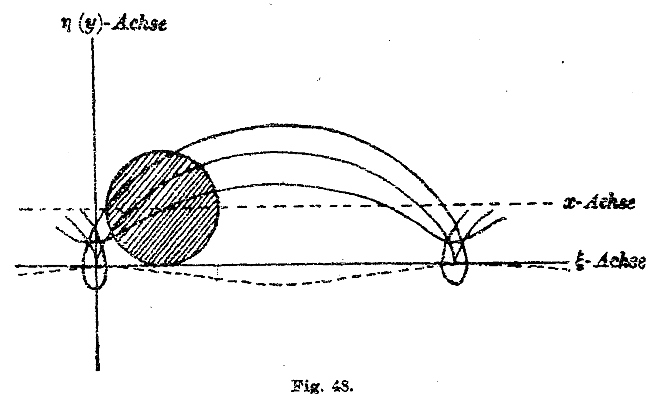



Fig. 48.

In der That, erzeugen wir uns eine Cykloide in gewöhnlicher Weise (vgl. Fig. 48) durch Abrollen eines Rades auf einer Geraden, so dreht sich jeder mit dem Rade festverbundene Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den jeweiligen Berührungspunkt des Rades

und schreitet beständig senkrecht gegen die Verbindungslinie mit diesem fort, während der Berührungspunkt selbst mit konstanter Geschwindigkeit an seiner Geraden hinwandert. Wir können daher direkt die Bahn der Kreiselspitze $F$ mit der Bahnkurve eines Punktes an einem rollenden Rade, d. h. mit einer Cykloide, und die Bahn des Impulspunktes $J$ mit der geradlinigen Bahn des Berührungspunktes identifizieren.

Hiernach läſst sich die Gleichung der Bahnkurve sofort hinschreiben. Wir benutzen rechtwinklige Koordinaten $\xi$, $\eta$, indem wir die Gerade, an der unser Rad abrollt, zur $\xi$-Axe nehmen. Sei $r$ der Radius des Rades, $a$ der Abstand des die Cykloide aufzeichnenden Punktes $F$ vom Mittelpunkt des Rades und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Abrollens, wobei wir $\omega$ der Gleichung (2) entsprechend zu wählen haben. Wir nehmen noch an, daſs für $t = 0$ der Punkt $F$ senkrecht über dem Berührungspunkte $J$ des Rades und auf der $\eta$-Axe liegen möge, so daſs seine Entfernung von derselben $\eta_0 = r + a$ wird. Dann lauten die Gleichungen der Cykloide:

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = rwt + a \sin wt, \\ \eta = \quad r + a \cos wt. \end{cases}$$

Die Gröſsen $r$ und $a$ sind hierin durch die Konstanten des Kreisels folgendermaſsen zu bestimmen. Da $rw$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher der Berührungspunkt $J$ auf der $\xi$-Axe fortschreitet, so müssen wir $rw = v$ haben und also mit Rücksicht auf (1) und (2):

$$(4)\qquad r = \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}.$$

Die Gröſse $a$ bestimmt sich dann aus der anfänglichen Entfernung $\eta_0$ der Punkte $J$ und $F$ durch die Gleichung

$$a = \eta_0 - r.$$

Nun miſst $\eta_0$ die Abweichung des Impulsvektors von der Figurenaxe in der Anfangslage. Bezeichnen wir das von dem Endpunkt des Impulsvektors auf die Figurenaxe gefällte Lot mit $p$ und seine Projektion auf die Vertikale mit $n'$, so haben wir (vgl. die Fig. 49)

$$(5)\qquad \eta_0 = \frac{p}{N} = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0}.$$

Dabei ist noch, wie aus der Figur hervorgeht:

$$(5')\qquad n' = n - N \cos \vartheta_0.$$

Aus (4) und (5) folgt also als Wert von $a$

$$(6)\qquad a = \frac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \frac{AP \sin \vartheta_0}{N^2}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte von $r$ und $a$ in die Gleichungen (3) ein und drücken wir auch $w$ nach (2) aus, so erhalten wir *die Gleichung der Bahnkurve in der definitiven Form*

$$(7)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{P \sin \vartheta_0}{N}\, t + \left(\dfrac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \dfrac{A P \sin \vartheta_0}{N^2}\right) \sin \dfrac{N}{A}\, t, \\ \eta = \dfrac{A P \sin \vartheta_0}{N^2} + \left(\dfrac{n'}{N \sin \vartheta_0} - \dfrac{A P \sin \vartheta_0}{N^2}\right) \cos \dfrac{N}{A}\, t. \end{cases}$$

Je nachdem der Abstand $a$ gröfser, gleich oder kleiner als der Radius $r$ des Kreises ist, haben wir eine *verschlungene*, eine *gemeine* oder eine *gestreckte Cykloide*, welche drei Typen in der Fig. 48 angegeben sind.

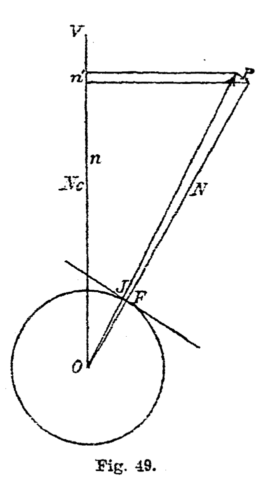


Fig. 49.

Wir haben noch einen Punkt besonders hervorzuheben. Bei der Bestimmung der Impulskurve nahmen wir an, dafs die Figurenaxe sich dauernd nur wenig von der Impulsaxe entfernt. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist unmittelbar nur für den Anfang der Bewegung einleuchtend; sie ergiebt sich für diesen aus den Anfangsbedingungen. Nun folgt aber aus dem periodischen Verhalten unserer Bahnkurven überhaupt, dafs die anfangs vorhandenen Bedingungen jedesmal nach Durchlaufung eines vollen Cykloidenbogens genau wieder vorliegen. Infolgedessen gelten unsere Überlegungen für alle folgenden Phasen der Bewegung ebenso wie für die erste.

Natürlich erhalten wir durch das Vorstehende nur eine angenäherte Darstellung der Bewegung. Genau genommen müfsten wir nicht sagen: *Die Bahnkurve der Kreiselspitze unter den vorliegenden Anfangsbedingungen ist eine Cykloide,* sondern: *Dieselbe weicht von einer Cykloide um so weniger ab, je gröfser der Anfangsimpuls ist und je genauer er der Richtung nach mit der Figurenaxe zusammenfällt.*

Von welcher Art die Abweichung sein wird, ist leicht zu sehen. Da die Meridianebene durch die Impulsaxe nicht genau mit der Meridianebene durch die Figurenaxe zusammenfällt, wird auch die Impulskurve nicht genau ein Parallelkreis bez. eine Gerade sein; sie wird vielmehr, je nachdem sich bei der Rotation der Figurenaxe die eine Meridianebene auf der einen oder anderen Seite der anderen befindet, sich selbst nach oben oder unten bewegen, wie solches in der Fig. 48 durch die punktierte Linie angedeutet ist. Dementsprechend wird auch die Bahnkurve der Kreiselspitze, welche zu dieser gewellten Impulskurve gehört, kleine periodisch wiederkehrende Verzerrungen gegenüber der Cykloidengestalt aufweisen. Dieselben sind jedoch in

der Figur und auch in unseren Formeln nicht enthalten; sie würden in letzteren den fortgelassenen Gliedern höherer Ordnung entsprechen.

Übrigens könnten wir unsere Cykloidenbewegung so erweitern, dafs sie auch diese Glieder zweiter und höherer Ordnung richtig wiedergiebt. Wir müfsten zu dem Zwecke auf dem rollenden Kreise abermals einen Kreis abrollen lassen, auf diesem eventuell einen nächsten u. s. f. Durch freie Wahl der Radien und der Umlaufsgeschwindigkeiten erhalten wir ein hinreichend allgemeines Schema, um beliebige Bewegungen mit beliebiger Genauigkeit wiederzugeben. Unsere obige näherungsweise Darstellung der Bahnkurve erscheint unter diesem Gesichtspunkte als erstes Glied einer unendlichen Reihe von Approximationen.*)

Die Fig. 48 müssen wir auffassen als eine aufserordentlich vergröfserte Wiedergabe der wirklichen Verhältnisse Im Experiment werden die einzelnen Cykloidenbögen so klein und folgen so schnell aufeinander, dafs das Auge sie nicht mehr wahrnimmt und den Eindruck einer gewöhnlichen Präcession erhält. Zum Belege dessen berechnen wir etwa die Durchlaufungsdauer und die Spannweite des einzelnen Cykloidenbogens. Die Zeit, während welcher der einzelne Teilbogen zurückgelegt wird, heifse $2\omega$; sie beträgt nach unsern Formeln

$$2\omega = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\frac{A}{N};$$

sie wird also mit wachsendem $N$ zu Null. Die Spannweite des Cykloidenbogens, d. h. die Strecke, um welche die Figurenaxe während einer Periode in horizontaler Richtung fortschreitet, ist gleich

$$\frac{P\sin\vartheta_0}{N}\,2\omega = \frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0\cdot 2\pi;$$

diese Gröfse enthält den Faktor $\frac{AP}{N^2}$, welchen wir oben als klein $\left(<\frac{1}{100}\right)$ voraussetzten. Gleichzeitig mit der Spannweite wird auch die Höhe der Cykloidenbögen bei wachsendem $N$ verschwindend klein entsprechend der Formel

$$\alpha = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}.$$

*Die sämtlichen Dimensionen der Cykloidenkurve werden also sozusagen mikroskopisch klein. Das Auge nimmt von dem ganzen Spiel der Kreisel-*

*) Das im Texte angedeutete „*Prinzip der cykloidischen Annäherung*" liefert auch die mathematische Grundlage, auf welcher die Auffassung der Himmelsmechanik im *Ptolemäischen Weltsysteme* beruht. Vgl. hierzu Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels, 1843, Kap. III, Theorie der epicykloidischen Bewegung. Ges. W. Bd. IV.

*spitze nur ein unbestimmtes Mittel wahr, welches in einer scheinbar regulären Präcession besteht.*

Ein numerisches Beispiel möge dieses veranschaulichen. Wir betrachten ein Schwungrad, dessen Masse einen Wulst von quadratischem Querschnitt bilden möge. Die Seite des Querschnittquadrates sei 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm. Der Unterstützungspunkt habe den Abstand von 2,5 cm vom Schwerpunkt des Rades. Zur Berechnung der Trägheitsmomente wollen wir uns gestatten, die Masse des einzelnen Querschnittes in dem Mittelpunkt desselben konzentriert zu denken. Dann findet man leicht für das absolute Maſssystem:

$$C = 1000\,\varrho\,\pi, \quad A = 750\,\varrho\,\pi, \quad P = 100\,\varrho\,\pi\,g,$$

unter $\varrho$ die Dichtigkeit des Materiales verstanden.

Die Eigenrotation des Schwungrades betrage etwa (wie pag. 135) 20 Umdrehungen in der Sekunde. Dann ist seine Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe $40\,\pi$; mithin wird

$$N = 40\,000\,\varrho\,\pi^2 \quad \text{und} \quad \frac{N^2}{AP} = \frac{(40\,000\,\varrho\,\pi^2)^2}{75\,000\,(\varrho\,\pi)^2\,g} = \frac{64\,000\,\pi^2}{3\,g}.$$

Der Bruch $\frac{\pi^2}{g}$ kann näherungsweise gleich $\frac{1}{100}$ gesetzt werden; es wird also

$$\frac{N^2}{AP} = \frac{640}{3} > 200.$$

Der hier betrachtete Kreisel ist allerdings kein Kugelkreisel. Wir wissen aber, daſs ein Kreisel von ungleichen Trägheitsmomenten $A$ und $C$ dieselbe Bahnkurve der Kreiselspitze in demselben Tempo beschreibt, wie ein Kugelkreisel vom Trägheitsmomente $A$ und denselben Impulskonstanten $n$, $N$ u. s. w. Infolgedessen dürfen die obigen Formeln auf unseren Fall übertragen werden.

Beträgt nun etwa die Anfangsneigung $\vartheta_0$ der Figurenaxe gegen die Vertikale $30^0$ und überlassen wir unseren Kreisel, ohne einen erheblichen seitlichen Anstoſs hinzuzufügen, dem Einfluſs der Schwere, so ergiebt sich nach dem Vorstehenden die Durchlaufungszeit des einzelnen Cykloidenbogens

$$2\,\omega = \frac{1500\,\varrho\,\pi^2}{40000\,\varrho\,\pi^2} < 0{,}04 \text{ sec.}$$

Die Höhe desselben wird gleichzeitig, wenn wir etwa $n'$ direkt gleich Null nehmen:

$$|\,2\,a\,| = 2\,\frac{AP}{N^2}\sin\vartheta_0 = \frac{AP}{N^2} < 0{,}05 \text{ mm.}$$

Es ist klar, daſs sich diese kleinen Gröſsen der Beobachtung so gut wie vollständig entziehen.

Wie wir sehen, macht die Erklärung der pseudoregulären Präcession auf dem von uns eingeschlagenen Wege gar keine Schwierigkeit. Wenn man sonst diese Bewegung überraschend und paradox findet, so beruht das zum guten Teil darin, dafs man bei der Auffassung der mechanischen Vorgänge gewöhnlich von der Punktmechanik ausgeht und also in unserem Falle ausschliefslich an die nach unten gerichtete Wirkung der Schwere auf den frei beweglichen Massenpunkt denkt. Natürlich ist eine Erklärung der pseudoregulären Präcession auch vom Boden der Punktmechanik möglich, wie wir im folgenden Paragraphen noch ausführlicher entwickeln werden. Der Weg aber, welcher von da aus zum Verständnis unserer Kreiselbewegung führt, ist naturgemäfs ziemlich lang. Er wird wesentlich abgekürzt, wenn wir von vornherein mit den Begriffen des Trägheitsmomentes, der instantanen Drehung und namentlich mit dem Begriffe des Impulses operieren, wenn wir also, wie es hier geschah, von der Auffassung des starren Körpers als eines einheitlichen mechanischen Systems ausgehen. Natürlich sind jene Begriffe auch bei uns letzten Endes aus der Punktmechanik abgeleitet, aber diese Ableitung ist eben vorweg genommen und braucht darum nicht hinterher zwischengeschoben zu werden.

Teils um die vorhergehenden Betrachtungen zu kontrollieren, teils um sie in Zusammenhang zu bringen mit der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung, wollen wir nun unser Problem noch einmal analytisch anfassen. Wir sind dabei in der angenehmen Lage, mit den Näherungsformeln vom Schlufs des vorigen Kapitels auszukommen, deren begrenzte Genauigkeit in dem Grenzfalle $N = \infty$ in eine beliebige Genauigkeit übergeht. Zunächst haben wir uns ein Urteil über die Gröfse des Fehlers bei Anwendung jener Näherungsformeln zu bilden.

Unter der Annahme, dafs der Impulsvektor nahezu in Richtung der Figurenaxe fällt, wird die Impulskomponente $n$ (vgl. die Fig. 49) nahezu gleich $Ne$. Die Differenz $n - Ne$ bezeichnen wir, wie in Gleichung (5') mit $n'$, wobei $n' : N$ als eine kleine Zahl vorausgesetzt wird. Daneben werden wir unsere Annahme, dafs $AP : N^2$ eine kleine Zahl ist, zu benutzen haben.

Den Ausgangsparallelkreis $e$ sehen wir wie früher als bekannt an; der zweite Parallelkreis $e'$ läfst sich alsdann leicht näherungsweise aus der Gleichung $U_1 = 0$ bestimmen. Setzen wir nämlich in dieser Gleichung $n = Ne + n'$ und vernachlässigen wir das Quadrat von $n'$ gegen das von $N$, so erhalten wir nach Gleichung (2) von pag. 240, indem wir zusammenziehen:

$$U_1 = N^2(1 - e^2)(e - u) + 2n'N(1 - e^2) - 2AP(1 - e^2)(1 - u^2).$$

Wir nehmen ebenso wie bei der obigen geometrischen Betrachtung an, dafs die Anfangslage der Figurenaxe nicht und auch nicht nahezu mit der Vertikalen zusammenfällt ($e \neq \pm 1$), worauf wir mit $N^2(1-e^2)$ dividieren können, und erhalten zur Bestimmung von $e'$ die Gleichung:

$$(8) \qquad e - u + \frac{2n'}{N} - \frac{2AP}{N^2}(1-u^2) = 0.$$

Da die beiden letzten Terme dieser Gleichung nach Voraussetzung kleine Zahlen sind, sehen wir bereits, dafs die eine Wurzel ($e'$) nahezu gleich $e$, die zweite ($e''$) sehr grofs werden mufs. Einen genaueren Wert von $e'$ erhalten wir, wenn wir in dem an sich kleinen letzten Gliede $u$ durch $e$ oder lieber noch durch $u_0 = \frac{e+e'}{2}$ ersetzen; so ergiebt sich

$$(9) \qquad e' = e + 2\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1-u_0^2).$$

Wir haben pag. 273 zwei Fälle unterschieden, in denen die dort behandelten Näherungsformeln zur Berechnung von $u$ einen beliebig kleinen Fehler ergeben. Der erste Fall war der, dafs $e$ und $e'$ hinreichend wenig verschieden, der zweite der, dafs $e''$ hinreichend grofs wird. Der erste dieser Fälle liegt bei der pseudoregulären Präcession, wie wir sehen, vor. In der That beträgt der Vertikalabstand der beiden begrenzenden Parallelkreise $e$ und $e'$ nur die sehr kleine Gröfse $2\varepsilon$. Zum Überflufs trifft aber in unserem Falle auch noch das zweite Kriterium zu: $e''$ wird, wie bereits erwähnt, eine sehr grofse Zahl. In der That, berechnen wir $e''$ nach Gleichung (9) von pag. 273, indem wir $n = Ne + n'$ setzen und $n'^2$ gegen $N^2$ vernachlässigen, so folgt

$$e'' = \frac{N^2}{2AP} - e'.$$

Dieser Wert ist nach unserer Voraussetzung über das Verhältnis $N^2 : AP$ eine sehr grofse Zahl; wir werden sogar den echten Bruch $e'$ im Verhältnis zum ersten Gliede fortlassen können. Wir setzen also:

$$e'' = \frac{N^2}{2AP},$$

und mit demselben Grade der Annäherung:

$$(10) \qquad \begin{cases} e'' - u_0 = \dfrac{N^2}{2AP}, \\[2ex] \dfrac{2P(e''-u_0)}{A} = \dfrac{N^2}{A^2}. \end{cases}$$

Ein etwas genauerer Wert für die letztere Gröfse wäre dieser:

$$(10') \qquad \frac{2P(e''-u_0)}{A} = \frac{N^2 - 4APu_0}{A^2};$$

wir begnügen uns im Folgenden aber lieber mit dem einfacheren Werte aus Gleichung (10).

Sowohl wegen der Kleinheit von $\varepsilon$ wie wegen der Gröſse von $e''$ wird der pag. 272 abgeschätzte Fehler $\tau$ in unserem Falle sehr klein und zwar um so kleiner, je vollständiger die unserer Bewegung zu Grunde liegenden Bedingungen erfüllt sind. Wir können daher $u$ mit beliebiger Annäherung durch die Gleichung (8') von pag. 272 darstellen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (10) der vorigen Seite ergiebt sich

$$u = u_0 + \left(\frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}(1 - u_0^2)\right) \sin \frac{N}{A} t.$$

Die Kleinheit von $\varepsilon$ berechtigt uns ferner, auch $\psi$ durch die Näherungsformel (14') von pag. 276 darzustellen. Wir sahen nämlich, daſs der Fehler in dieser Darstellung mit verschwindendem $\varepsilon$ selbst verschwindet.

Die Koeffizienten jener Gleichung lassen sich dabei in unserem Falle vereinfachen. Es wird nämlich, wenn wir $n = Ne + n'$ setzen:

$$n - Nu_0 = N(e - u_0) + n' = N\frac{e - e'}{2} + n' = -N\varepsilon + n',$$

also mit Rücksicht auf (9) direkt

$$\frac{n - Nu_0}{A(1 - u_0^2)} = \frac{P}{N}.$$

Ähnlicher Weise vereinfacht sich der zweite Koeffizient

$$\frac{N(1 + u_0^2) - 2nu_0}{(1 - u_0^2)^2 \sqrt{2AP(e'' - u_0)}}$$

Nach (10) können wir hierfür schreiben:

$$\frac{N(1 - u_0^2) - 2(n' - N\varepsilon)u_0}{N(1 - u_0^2)^2};$$

da dieser Ausdruck in Gleichung (14') von pag. 276 noch mit der kleinen Gröſse $\varepsilon$ multipliziert erscheint, können wir ihn weiter vereinfachen, indem wir $(n' - N\varepsilon)$ gegen $N$ vernachlässigen; die hierdurch bewirkte Ungenauigkeit ist im Resultate von der Ordnung $\varepsilon^2$, würde also nur die Form des Restgliedes beeinflussen. Unser zweiter Koeffizient kann daher gleich gesetzt werden:

$$\frac{1}{1 - u_0^2}.$$

Daraufhin erhalten wir aus der angezogenen Gleichung folgenden einfachen Näherungswert für $\psi$:

$$\psi = \frac{P}{N} t + \frac{\varepsilon}{1 - u_0^2} \cos \frac{N}{A} t.$$

Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird daher jetzt, wenn wir noch $u = \cos\vartheta$, $u_0 = \cos\vartheta_0$ setzen und für $\varepsilon$ den Wert aus (9) eintragen,

durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt:

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 + \left(\frac{n'}{N} - \frac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0\right)\sin\frac{N}{A}t, \\ \psi = \frac{P}{N}t \quad + \left(\frac{n'}{N\sin^2\vartheta_0} - \frac{AP}{N^2}\right)\cos\frac{N}{A}t, \end{cases}$$

in genauer Übereinstimmung mit der Cykloidentheorie, wie wir sogleich noch näher ausführen werden.

Das Verhältnis dieser Formeln zu der allgemeinen Darstellung der Kreiselbewegung durch die elliptischen Integrale ist nach den Auseinandersetzungen von pag. 274 und 277 klar. Die Kleinheit des Moduls $k$ bez., was dasselbe bedeutet, des Fehlers $\tau$ erklärt zur genüge, weshalb die elliptischen Integrale in unserem Falle durch trigonometrische Funktionen mit guter Annäherung ersetzt werden können.

Diese Bemerkungen werden teilweise hinfällig, wenn unsere ursprünglichen Voraussetzungen nur teilweise erfüllt sind. Wenn z. B. der Anfangsimpuls nahe mit der Figurenaxe zusammenfällt und außerordentlich groß, aber nicht groß gegen die Schwerewirkung ist, d. h. wenn $n'/N$, aber nicht $AP/N^2$ eine kleine Zahl ist, so wird die Bewegung von der pseudoregulären Präcession wesentlich verschieden; die Fehler in unseren Näherungsformeln können sehr beträchtlich sein. In der That wird sich ein Kreisel mit großem $N$ und $P$ ebenso verhalten, wie ein Kreisel mit entsprechend verkleinerten Werten von $N$ und $P$; er kann daher die im vorigen Kapitel geschilderten allgemeinen Bewegungen beschreiben, welche mit beliebiger Genauigkeit nur durch die elliptischen Integrale dargestellt werden können. Wenn andrerseits der Eigenimpuls sehr groß, das Schweremoment nicht sehr groß ist und die Impulsaxe in der Anfangslage wesentlich von der Figurenaxe abweicht, d. h. wenn $AP/N^2$ aber nicht $n'/N$ klein ist, so werden die Parallelkreise $e$ und $e'$ nicht mehr benachbart zu sein brauchen. Immerhin ist dann noch der Wert von $e''$ (s. Gleichung (9) von pag. 273) sehr groß, so daß der Fehler in der trigonometrischen Darstellung von $u$ auch dann noch sehr klein wird. In diesem Falle, können wir sagen, liegt ein Kreisel vor, welcher einem kräftefreien Kreisel (von mäßigem $N$ und verschwindendem $P$) benachbart ist. So wie die Bewegung des letzteren genau, so kann die des ersteren angenähert durch trigonometrische Terme beschrieben werden.

Daß unsere Gleichungen (11) mit den früheren Formeln (7) identisch sind, erkennt man folgendermaßen: Wir ersetzen zunächst die Kugeloberfläche wieder durch ihre Tangentialebene an der betrachteten Stelle der Bahnkurve, was wegen der außerordentlich kleinen Dimensionen der letzteren gestattet sein wird. Die mittlere Fortschreitungsrichtung

$u = u_0$ der Kreiselspitze machen wir zur $x$-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems $(xy)$, dessen Anfangspunkt mit dem Orte der Kreiselspitze zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen möge. Alsdann drücken sich die rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$ der Kreiselspitze leicht durch ihre früheren Koordinaten $\psi$, $u$ aus. Da nämlich $\psi$ (von einer additiven Konstanten abgesehen) das Azimuth ist, um welches die Projektion der Figurenaxe in der Äquatorebene von ihrer Anfangslage aus bis zur Zeit $t$ fortgeschritten ist und da andrerseits $x$ die horizontale Verrückung der Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche (bez. in deren Tangentialebene) während derselben Zeit bedeutet, so verhält sich $\psi$ zu $x$, wie der Radius des Äquators zu dem Radius des durch die Kreiselspitze hindurchlaufenden Parallelkreises, d. h. angenähert wie 1 zu $\sin\vartheta_0$. Es wird also

$$x = \psi \sin\vartheta_0 .$$

Ferner bedeutet $u - u_0 = \cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ die vertikale Projektion der meridionalen Abweichung der Kreiselspitze von dem mittleren Parallelkreise $u_0$. Diese meridionale Abweichung selbst ist aber unsere Koordinate $y$. Wir haben daher

$$y = \frac{u - u_0}{\sin\vartheta_0} = \frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} .$$

Infolgedessen gehen die Gleichungen (9) über in:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{P\sin\vartheta_0}{N}\,t + \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\cos\dfrac{N}{A}t, \\[2ex] y = \phantom{\dfrac{P\sin\vartheta_0}{N}\,t +{}} \left(\dfrac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \dfrac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}\right)\sin\dfrac{N}{A}t. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich nun von den Gleichungen (7) nur durch eine Verschiebung des Koordinatensystems. Während unsere $\xi$-Axe früher mit der Impulskurve zusammenfiel und (vgl. Fig. 48) unsymmetrisch gegen die Bahnkurve der Kreiselspitze lag, haben wir unsere $x$-Axe so gewählt, dafs sie mit dem mittleren Orte $u_0$ der Kreiselspitze identisch ist. Wir bringen die Gleichungen (7) und (12) auch zur formalen Übereinstimmung, wenn wir setzen:

$$x = \xi, \quad y = \eta - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2},$$

und wenn wir überdies den Anfangspunkt der Zeitmessung um $\frac{\pi A}{2N}$ verschieben.

Unsere Bahnkurve (12) können wir daher wieder geometrisch als *Cykloide* durch Abrollung eines Kreises auf einer Geraden erzeugen oder wir können auch, was im vorliegenden Fall auf dasselbe herauskommt, unsere Bewegung als *Überlagerung einer regulären Präcession und einer Nutation* im Sinne von pag. 276 auffassen.

Die Gleichungen der regulären Präcession entnehmen wir den ersten Gliedern der rechten Seiten von (11); sie lauten

$$(13)\qquad \cos\vartheta = \cos\vartheta_0, \quad \psi = \frac{P}{N}\,t.$$

Die Nutation beschreiben wir am besten durch ihre Gleichung in den $x, y$-Koordinaten, welche wir den zweiten Termen der rechten Seiten von (12) entnehmen. Wir haben

$$(14)\quad x = \varepsilon\cos\frac{Nt}{A}, \quad y = \varepsilon\sin\frac{Nt}{A}, \quad \varepsilon = \frac{n'}{N\sin\vartheta_0} - \frac{AP\sin\vartheta_0}{N^2}.$$

Unter den speziellen Voraussetzungen, welche der pseudoregulären Präcession zu Grunde liegen, wird also die Nutation eine *kreisförmige Schwingung*; ihre horizontale und ihre meridionale Amplitude sind beide gleich $\varepsilon$. Dagegen sahen wir, daſs unter den allgemeinen Voraussetzungen am Schlusse des vorigen Kapitels sowie bei den der regulären Präcession benachbarten Bahnen die Nutation eine *elliptische Schwingung* war. Ferner wird die *Nutationsperiode*, d. h. die Gröſse

$$(15)\qquad 2\omega = \frac{2\pi A}{N}$$

bez., wenn wir statt (10) die etwas genauere Gleichung (10′) zu Grunde legen, die Gröſse

$$(15')\qquad 2\omega = \frac{2\pi A}{\sqrt{N^2 - 4APu_0}},$$

bei der pseudoregulären Präcession mit wachsendem $N$ unendlich klein, während sie beispielsweise bei den Nachbarkurven der regulären Präcession endlich blieb. Schlieſslich wird jetzt auch die *Präcessionsgeschwindigkeit* $\frac{P}{N}$ unendlich klein, während sie im allgemeinen gleichfalls einen endlichen Wert hatte.

Von den beiden Teilbewegungen, in welche wir die pseudoreguläre Präcession zerlegt haben, nimmt nun das Auge bei der Beobachtung nur die erste deutlich wahr. Allerdings ist diese Bewegung, wie wir eben hervorhoben, bei genügend groſsem $N$ äuſserst langsam. Dafür geht in ihre Gleichungen aber der Faktor $t$ explicite ein. *Trotz des äuſserst geringen Wertes der Winkelgeschwindigkeit werden wir daher, wenn wir die Beobachtungszeit nur lange genug ausdehnen, eine deutliche Präcession der Figurenaxe bemerken können.* In den Gleichungen unserer zweiten Teilbewegung dagegen tritt $t$ nur als Argument der trigonometrischen Funktionen auf. *Diese schnell veränderlichen Terme von geringer absoluter Gröſse entziehen sich daher dauernd der Beobachtung.* Den hierdurch bezeichneten Unterschied können wir auch mit Be-

nutzung einer in der Astronomie üblichen Terminologie folgendermaſsen formulieren:

*Unsere erste Teilbewegung stellt eine säculare, unsere zweite eine periodische Störung der Ruhelage dar.*

Während aber unsere erste Teilbewegung für die Beschreibung der Bahnkurve bez. für die Schilderung des Beobachtungsergebnisses die ausschlaggebende ist, wird die zweite Teilbewegung für die mechanische Erklärung des Vorganges die wichtigere.

Die mechanische Erklärung hat nämlich, nach den Grundgesetzen der Dynamik, nicht sowohl an den Ort, als an die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Massenteilchen anzuknüpfen. Differentiieren wir nun aber die Gleichungen unserer Bahnkurve nach $t$, so verschiebt sich das Gröſsenverhältnis der einzelnen Terme. Die periodischen Glieder multiplizieren sich nämlich jedesmal mit dem (sehr groſsen) Faktor $\frac{N}{A}$, während das säculare Glied den Faktor $t$ verliert bez. (bei zweimaliger Differentiation) überhaupt verschwindet. Infolgedessen wird die Erklärung des Bewegungsvorganges wesentlich auch auf die zweite Teilbewegung Rücksicht nehmen müssen. Wollten wir, gestützt auf ein ungenaues Beobachtungsergebnis, die Bewegung als eine wirkliche reguläre Präcession behandeln, so müſste sie uns in der That unverständlich und paradox erscheinen. *Die mechanische Erklärung muſs sich vielmehr in unserem Falle gerade auf diejenigen Momente der Bewegung gründen, welche in der Beobachtung so gut wie gänzlich verloren gehen.*

In diesen Ausführungen sehen wir die vollständige Auflösung des Paradoxons der Kreiselbewegung. Wir erkennen insbesondere, *warum die Beschreibung der unter den üblichen experimentellen Bedingungen vor sich gehenden Kreiselbewegung als einer regulären Präcession zwar die Beobachtungen sehr gut wiedergeben, aber dennoch für die mechanische Erklärung unzureichend sein kann.*

In historischer Hinsicht bemerken wir schlieſslich, daſs die pseudoreguläre Präcession, wenn auch nicht unter diesem Namen, zum ersten Male von Poisson*) aus den allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet worden ist. Nur ist bei Poisson ebenso wie bei den späteren Analytikern**) das in geometrischer und mechanischer Hinsicht Wesentliche nicht so ausführlich wie hier aus den Formeln herausgeschält. Der Leser läuft bei der Lektüre dieser rein analytischen Darstellungen Gefahr, gerade das Wichtige zu übersehen oder mangelhaft aufzufassen.

---

*) Vgl. Traité de Mécanique, t. II, Nr. 432, pag. 175 der zweiten Ausgabe.

**) Z. B. Kirchhoff, Mechanik, 7. Vorlesung, § 5.

## § 3. Die in der Litteratur vorkommenden populären Erklärungen des Kreiselphänomens.*)

Die elementaren Darstellungen der Kreiseltheorie befassen sich nahezu ausschliefslich mit der pseudoregulären Präcession, weil diese für das Experiment hauptsächlich in Betracht kommt und weil die allgemeine Kreiselbewegung sich mit elementaren Hülfsmitteln überhaupt nicht darstellen läfst. Wir geben daher an dieser Stelle eine Übersicht der wichtigeren populären Erklärungen, ohne dabei irgend auf Vollständigkeit Anspruch zu machen. Das Gesamtbild, welches sich hier ergiebt, ist kein sehr erfreuliches. Wir werden auf mancherlei unhaltbare oder unvollständige Erklärungsversuche stofsen. Übrigens war gerade dieser Umstand die ursprüngliche Veranlassung zur Abfassung der vorliegenden ausführlichen Monographie.

1. Eine erste Kategorie von Darstellungen begnügt sich mit einer blofsen Schilderung der Vorgänge. Vor allen Dingen ist es folgendes Experiment, welches betont wird: Wenn man den Kreisel in starke Rotation versetzt und alsdann auf die Figurenaxe einen Zug wirken läfst, etwa dadurch, dafs man die Kreiselspitze durch einen herumgeschlungenen Faden zur Seite zieht, so weicht die Axe scheinbar senkrecht gegen die Richtung des Fadens aus. Diese und ähnliche Dinge werden besonders lebhaft in dem früher citierten**) interessanten Schriftchen von Perry vorgetragen, wo der Kreisel geradezu mit einem eigensinnigen Tier verglichen wird, welches immer in anderer Richtung läuft, als es angetrieben wird.

Das genannte Experiment kann dazu dienen, das Verhalten der Figurenaxe unter dem Einflufs der Schwere zu erläutern. In der That können wir die Schwerkraft mit einem Zuge vergleichen, welche den Schwerpunkt und also auch die Figurenaxe in jedem Augenblicke nach unten zu bewegen strebt. Dem Experiment entsprechend werden wir also erwarten, dafs die Spitze des schweren Kreisels scheinbar senkrecht gegen die Schwerkraft, d. h. in horizontaler Richtung ausweicht.

Als blofses Beobachtungsergebnis mufs man eine solche Darstellung der Verhältnisse gelten lassen. Sie hat ihre Richtigkeit aber nur innerhalb der Ungenauigkeitsgrenzen der Beobachtung. Thatsächlich wissen wir, dafs die anfängliche Bewegungsrichtung der Kreiselspitze, falls wir sie ohne Hinzufügung eines seitlichen Anstofses dem Zuge des Fadens bez. dem Einflufs der Schwere überlassen, nicht senkrecht gegen den Zug, sondern in die Richtung des Zuges fällt (vgl. die nebenstehende

*) Neben den nachfolgend besprochenen mehr populären Darstellungen ist auch noch die englische Monographie von H. Crabtree zu erwähnen. Vgl. Zusätze zu Heft IV dieses Buches pag. 937. **) pag. 134.

Zackenkurve [gemeine Cykloide]) und dafs nur die Kleinheit der Bögen, aus denen sich die Bahnkurve bei sehr grofsem Eigenimpuls zusammensetzt, den genannten Eindruck im Experimente hervorruft.

2. Die beschriebene ungenaue Beobachtung sucht man nun gelegentlich durch einen unrichtigen Schlufs aus den Prinzipien der Mechanik, wie folgt, zu erklären: Der Kreisel rotiere anfänglich um die Figurenaxe, welche irgendwie gegen die Vertikale geneigt sei. Die Figurenaxe stellt dann gleichzeitig die Rotations- und die Impulsaxe dar. Nun kommt der kontinuierliche Zug der Schwerkraft zur Wirkung. Diesem entspricht ein Drehimpuls, welcher senkrecht gegen die durch Figurenaxe und Vertikale gelegte Meridianebene gerichtet ist und welcher sich mit dem ursprünglichen Drehimpulse nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammensetzt. Man sagt nun: Die Diagonale des Parallelogramms giebt die veränderte Lage der „Axe". Das ist richtig bezüglich der Impulsaxe und beim Kugelkreisel auch bezüglich der Rotationsaxe. In den Erklärungen, die wir im Auge haben, wird aber unter „Axe" fernerhin stillschweigend die Figurenaxe verstanden, für die das Gesagte keineswegs zutrifft; es wird also geschlossen, dafs die Figurenaxe beständig senkrecht gegen die genannte Meridianebene, d. h. auf einem Kreiskegel um die Vertikale fortschreiten müsse! — In Wirklichkeit bewegt sich die Figurenaxe natürlich auf einem Kreiskegel um die jeweils veränderliche Drehungsaxe, welche ihrerseits durch die Lage des Impulses bestimmt ist. Die Folge ist, dafs die Figurenaxe anfangs keineswegs senkrecht gegen die Richtung des Zuges ausweicht, sondern sich vertikal nach unten bewegt. Fällt, wie hier vorausgesetzt wurde, die Impuls- und Figurenaxe anfangs zusammen, so ist eine wirkliche reguläre Präcession schlechterdings unmöglich. Die Bedingung für die letztere besteht vielmehr, wie wir früher sahen, darin, dafs Impuls- und Figurenaxe in gewisser Weise auseinanderfallen, d. h. dafs der Kreiselspitze aufser dem Zuge der Schwerkraft ein ganz bestimmter seitlicher Anstofs erteilt werde.

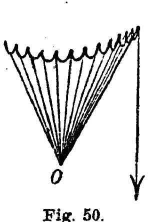


Fig. 50.

Das ganze Verfahren, welches wir im Vorstehenden besprochen haben, kann als ein vorzügliches Beispiel einer „quaternio terminorum" gelten. Der Irrtum rührt einfach daher, dafs das Wort Axe in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht wurde; derselbe ist um so merkwürdiger, als man notwendiger Weise fragen mufs: Was wird aus der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der Anfangsrotation nachläfst, in welchem Falle auch die Beobachtung eine Abweichung von der regulären Präcession deutlich erkennen läfst?

Der genannte Irrthum ist keinem geringeren, wie dem berühmten

französischen Experimentator Foucault und seinem Konkurrenten Sire passiert und findet sich seitdem häufig in der Litteratur. Wir verweisen bezüglich genauerer Angaben auf eine verdienstvolle Arbeit von Gilbert*): Etude historique et critique sur le problème de la rotation.

3. Wir gehen nun auf die sogenannte *Airysche Erklärung* ein, die gleichfalls in einem wesentlichen Punkte bedenklich ist. Als Astronom interresiert sich Airy**) namentlich für das Problem der Präcession und Nutation des Erdkörpers; diesem schickt er seine elementare Theorie der Kreiselbewegung als Einleitung voraus.

Airy leitet zunächst den Satz von dem Parallelogramm der Drehungsvektoren ab, hebt aber nicht hervor, dafs dieser Satz lediglich eine kinematische Bedeutung hat. Den Begriff des Impulsvektors und das Parallelogramm der Impulsvektoren, welches in kinetischer Hinsicht allein mafsgebend ist und den Ablauf der Bewegung reguliert, hat Airy nicht. Die Massenverteilung des Körpers bleibt angeblich ganz allgemein.

Airy behandelt nun ein Rotationsproblem, welches mit dem des schweren Kreisels nur eine entfernte Ähnlichkeit hat. Er setzt nämlich voraus, dafs auf den Körper eine Kraft wirkt, welche ihn beständig um eine zur *Drehungsaxe* $OD$ senkrechte und in einer festen Ebene $\Delta OD$ gelegenen Axe $O\Delta$ zu drehen strebt. Die Gröfse der Kraft soll unveränderlich sein. (Hiergegen ist zu bemerken, dafs bei dem wirklichen Rotationsproblem des schweren Kreisels die Axe der Zusatzdrehung (die Knotenlinie) nicht auf der Drehungsaxe sondern auf der Figurenaxe senkrecht steht und im allgemeinen auch nicht konstant ist, ein Umstand, dessen sich Airy selbstverständlich vollkommen bewufst ist. Es handelt sich bei Airy zunächst eben nur um ein fingiertes Problem.) Durch successive Anwendung des Satzes vom Parallelogramm der Drehungsvektoren schliefst Airy, dafs der Drehungsvektor der Gröfse nach konstant bleibt und der Richtung nach in der Ebene $\Delta OD$ mit konstanter Geschwindigkeit umläuft.

In diesem Schlusse liegt aber, wenn wir zunächst jenes fingierte Gesetz über Richtung und Gröfse der Zusatzdrehung einmal acceptieren, ein prinzipieller Fehler. Es wird nämlich dabei auf die Möglichkeit der „Eigenbewegung" des Drehungsvektors keine Rücksicht genommen. Auch wenn die äufsere Drehkraft, welche bei Airy die Rotation um $O\Delta$ hervorbringt, nicht wirken würde, wird die Drehungsaxe $OD$

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles, 1878. Auf einen ähnlichen Fehler macht gelegentlich Herr Franke aufmerksam: Ztschr. f. d. mathem. u. naturw. Unterricht, Bd. 17, 1886.

**) Airy, Mathematical Tracts, Cambridge 1831. Vgl. das Kapitel: Precession of the equinoxes Nr. 1—15.

im allgemeinen im Körper und im Raume wechseln. In der That beschreibt ja der kräftefreie Kreisel im allgemeinen eine reguläre Präcession, bei welcher der Rotationsvektor auf einem Kreiskegel um die Impulsaxe herumgeführt wird. Airy dagegen nimmt stillschweigend an, dafs, wenn die äufsere Kraft plötzlich zu wirken aufhören würde, die Drehungsaxe in der augenblicklichen Lage verbleiben würde.

Die genannte Voraussetzung ist nur in dem besonderen Falle des Kugelkreisels erfüllt, wo, wie wir betonten, jede Axe als permanente Drehungsaxe angesprochen werden kann. Infolgedessen müssen wir sagen: *Die Airyschen Sätze gelten nicht für den allgemeinen Fall eines rotierenden Körpers, sondern im Gegenteil nur für den speziellsten Fall, den Fall des Kugelkreisels.*

Überhaupt möchten wir bei dieser Gelegenheit vor einer Überschätzung der kinetischen Bedeutung des Drehungsvektors warnen. *Der Drehungsvektor lehrt im Grunde nur den augenblicklichen kinematischen Bewegungszustand kennen. In kinetischer Hinsicht kommt es nicht auf den Drehungs-, sondern auf den Impulsvektor an.* Dieser setzt sich mit dem Drehmomente der äufseren Kräfte in einfachster Weise (nach dem Parallelogrammgesetze) zusammen und bestimmt so zusammen mit der Massenverteilung des Körpers den Verlauf der Bewegung. Der Drehungsvektor folgt darauf der Lage des Impulsvektors und bewegt sich gerade so, wie es ihm durch die Lage des Impulsvektors und die Massenverteilung des Körpers vorgeschrieben wird. Das Parallelogramm der Drehungsvektoren ist zwar kinematisch richtig, aber kinetisch nichtssagend, weil der Drehungsvektor auch ohne Hinzufügung einer „äufseren", d. h. einer durch äufsere Kräfte hervorgerufenen Drehung, im Körper und im Raume fortwandern kann.

(Ein einfaches Beispiel, auf welches Herr K o p p e (vgl. p. 315, Anm.)).**) aufmerksam gemacht hat, möge zeigen, wie man in kinetischen Fragen durch das Parallelogramm der Drehungen zu falschen Resultaten geführt werden kann.

Wir fragen nach dem Drehmoment, welches bei einem (symmetrischen) Kreisel zum Verdrehen seiner Figurenaxe erforderlich ist. Genauer wollen wir die Frage folgendermafsen formulieren: Der Kreisel rotiere anfangs um seine Figurenaxe $OF$ und sei dem Einflufs äufserer Kräfte entzogen. Seine Rotationsgeschwindigkeit sei $r$, sein Impuls $Cr = N$. Darauf drehen wir die Figurenaxe zwangsmäfsig um den kleinen Winkel $d\vartheta$, so zwar, dafs, wenn wir die Axe loslassen, der Kreisel mit der ursprünglichen Geschwindigkeit $r$ um die abgeänderte und von jetzt ab im Raume stillestehende Axe $OF_1$ permanent rotiere (vgl. Fig. 51). Gesucht wird das hierzu erforderliche Drehmoment.

Zur Herbeiführung des genannten Sachverhaltes ist nach der Impulstheorie zweierlei nötig: (1) Man mufs der Figurenaxe eine Drehgeschwindigkeit um die auf $OF$ und $OF_1$ senkrechte Axe $OH$ erteilen und mufs diese Geschwindigkeit aufheben, wenn die Lage $OF_1$ erreicht ist. Die zugehörigen Impulse, welche gleichfalls um die gemeinsame Senkrechte von $OF$ und $OF_1$ erfolgen, heben sich gegenseitig auf ($OH = - OH_1$). (2) Man mufs aufserdem für die Umlagerung des Impulsvektors aus der Lage $OF$ in die Lage $OF_1$ sorgen. Thäte man dieses nämlich nicht, so würde die Figurenaxe, nachdem sie die Lage $OF_1$ erreicht hat, um die unveränderte Lage $OF$ des Impulsvektors eine reguläre Präcession beginnen, anstatt, wie wir verlangten, im Raume stille zu stehen. Der zur Umlagerung erforderliche Zusatzimpuls ist $di = N d\vartheta$; seine Axe $OG$ liegt in der Ebene $OFF_1$ senkrecht zu den unendlich wenig verschiedenen Axen $OF$ und $OF_1$. Die Änderungsgeschwindigkeit des Impulses $\frac{di}{dt}$ giebt nach Axe und Gröfse das Drehmoment an, welches wir bei Verdrehung der Figurenaxe aufwenden müssen. Die richtige Antwort auf unsere Frage, wie sie sich aus dem Parallelogramm der Impulsvektoren ergiebt, lautet also:

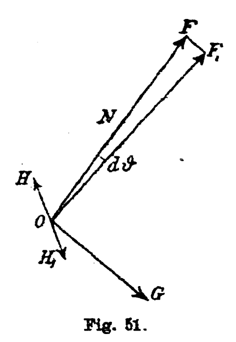


Fig. 51.

$$N\vartheta' = Cr\vartheta'.$$

Dieselbe Frage möge nun nach dem Parallelogramm der Rotationsvektoren beantwortet werden. Zur Umlagerung und nachherigen Fixierung der Figurenaxe ist wieder im Ganzen kein Drehmoment erforderlich. Zur Umlagerung der Drehungsaxe mufs man nach dem Parallelogramm der Rotationen die Drehung $r\vartheta'$ um die Axe $OG$ hinzufügen. Das dieser Drehung entsprechende Drehmoment findet man in bekannter Weise durch Multiplikation der genannten Winkelgeschwindigkeit mit dem zu $OG$ gehörigen Trägheitsmomente $A$. Das Drehmoment, nach welchem gefragt ist, wäre hiernach

$$Ar\vartheta'.$$

*Der falsche und der richtige Wert stimmen, wie man sieht, nur im Falle des Kugelkreisels überein. In jedem anderen Falle kann die Anwendung des Parallelogramms der Rotationen in der Kinetik irreführend werden.*)

Dementsprechend ist die Airysche Betrachtung für den Fall des allgemeinen oder des symmetrischen Kreisels dahin zu ergänzen, dafs man überall statt Rotationsvektor Impulsvektor sagt. So macht es

Poinsot in seiner *Théorie des équinoxes.**) Er betrachtet übrigens einen etwas allgemeineren Fall wie Airy, indem er den Zusatzimpuls senkrecht zu dem vorhandenen Impulse und überdies in einer festen Ebene annimmt, welche nicht durch den vorhandenen Impuls hindurchzugehen braucht (während Airy, wie erwähnt, eine Zusatzdrehung in einer durch die jeweilige Drehungsaxe hindurchgehenden Ebene voraussetzt). Führt man in diesem Falle die successiven Parallelogrammkonstruktionen mit dem Impulsvektor aus, so sieht man, daſs dieser einen Kreiskegel um die Normale der festen Ebene beschreibt, also im Speziellen einen vertikal gestellten Kreiskegel, wenn man die feste Ebene als Horizontalebene denkt. Natürlich deckt sich auch das Poinsotsche Problem wegen der angegebenen Voraussetzung über die Richtung des Zusatzimpulses mit dem Problem des schweren Kreisels nicht vollständig, wie Poinsot selbst ausdrücklich hervorhebt. Dementsprechend ist auch das angegebene Resultat, daſs der Impulskegel ein Kreiskegel wird, für den schweren Kreisel nur angenähert richtig.

Unsere eigene populäre Erklärung der pseudoregulären Präcession im Anfange des vorigen Kapitels stellt geradezu eine Weiterführung der Poinsotschen Darstellung vor. Wir haben dort auf Grund der Poinsotschen Impulsprinzipien die successiven Lagen der Figurenaxe im Raum ermittelt und haben auch den Sinn der Abweichungen festgestellt, welche die wirkliche Bewegung gegenüber unseren immerhin nur angenäherten Konstruktionen aufweisen wird.

Nach einer anderen Richtung wie Poinsot (nämlich durch Berücksichtigung der Nutationen) vervollständigt Herr A. Schmidt die Airysche Erklärung in seiner anregenden Arbeit**) „Die elementare Behandlung des Kreiselproblems“. Indessen müſste man auch hier die Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen, weil der Verfasser durchweg mit dem Parallelogramm der Rotationen operiert, statt, wie es für kinetische Fragen im allgemeinen unerläſslich ist, mit dem Parallelogramm der Impulsvektoren.

Wie hervorgehoben, werden weder die Airyschen noch die Poinsotschen Voraussetzungen bei der allgemeinen Bewegung des schweren Kreisels realisiert. Der Zusatzimpuls bez. die Zusatzdrehung steht hier weder senkrecht auf der Drehungsaxe noch auf dem Impulsvektor, sondern auf der Figurenaxe. Nur bei der genauen regulären Präcession sind wegen der besonderen gegenseitigen Lage von Vertikalen, Rotations-Figuren- und Impulsaxe die Voraussetzungen der Airyschen bez. der Poinsotschen Betrachtungen genau erfüllt.

*) Connaissance des temps, Paris 1857, Einleitung, Nr. 1—10.

**) Mathem.-naturw.-Mitteilungen von Böklen, 1886, Heft III.

Die Nutzanwendung der Airyschen Betrachtung auf den Fall des schweren Kreisels wird in der theoretischen Physik von Hrn. v. Lang*) versucht. Um ein den Airyschen Voraussetzungen analoges Problem zu haben, nimmt v. Lang als Anfangszustand eine einfache Rotation um die Figurenaxe an, so daſs anfangs die der Schwere entsprechende Zusatzdrehung auf der Drehungsaxe senkrecht steht. Dieser Sachverhalt muſs sich aber eben wegen der Schwerewirkung sofort ändern. Wenn trotzdem vorausgesetzt wird, daſs die hinzukommende Drehung (besser der Drehungsimpuls) auf der instantanen Drehungsaxe (besser Impulsaxe) dauernd senkrecht steht, so scheint eine abermalige Zweideutigkeit in der Verwendung des Wortes „Axe" vorzuliegen. Dementsprechend ist auch das Resultat, zu welchem v. Lang kommt, nicht richtig. Nach seiner Ableitung müſste die Drehungsaxe *genau* einen Kreiskegel um die Vertikale beschreiben, was, wie wir wissen, bei dem vorausgesetzten Anfangszustande *nur angenähert* und *auch dies nur bei sehr groſsen Rotationsgeschwindigkeiten* richtig ist. Überdies müſste man, wenn man die v. Langsche Benutzung des Drehungsvektors aufrecht halten will, die ausdrückliche Beschränkung auf den Kugelkreisel hinzufügen.

Eine korrekte Darstellung giebt im Anschlusse an Poinsot De Jonquières**), welcher das Auftreten der Spitzenkurve ableitet.

4. Auf wesentlich anderen Prinzipien wie die zuletzt genannte oder wie unsere eigene elementare Betrachtung am Anfange des vorigen Paragraphen beruht die bekannte *Poggendorffsche Erklärung.****) Während wir den Kreisel als ein einheitliches mechanisches System behandelten, geht Poggendorff auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte zurück. Bei der Kürze und dem ganz elementaren Charakter der Darlegungen ist die Poggendorffsche Erklärung keine vollständige und giebt leicht zu Irrtümern Anlaſs. Wir reproduzieren dieselbe in etwas freier Weise, ohne mit Sicherheit behaupten zu können, daſs wir im Folgenden die Meinung des Verfassers, die aus seinen Worten nicht ganz eindeutig festzustellen ist, genau wiedergeben.

Wir betrachten mit Poggendorff ein Schwungrad von horizontal gestellter Figurenaxe, welches um einen Punkt $O$ der Axe frei drehbar ist und welchem eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit um die Axe erteilt worden ist. Wir denken uns das freie Ende der Axe in der Vertikalebene ein Stückchen nach unten bewegt, was dem Anscheine

*) § 55.

**) Théorie élémentaire du mouvement de la toupie, Revue maritime et coloniale, 1886.

***) „Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine." Poggendorffs Annalen, Bd. 90, pag. 348.

nach der Einwirkung der Schwere auf das Schwungrad entspricht. Diese Bewegung bezeichnen wir kurz als Bewegung I. Offenbar werden durch diese Bewegung die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Massenpunkte teils parallel mit sich verschoben, teils aus ihrer Richtung abgelenkt. Letzteres erfordert für jeden Punkt eine Kraft, deren Gröfse und Richtung gleich ist der Änderungsgeschwindigkeit des Impulses in dem betreffenden Massenpunkte. Setzt man alle diese Kräfte zu einer Drehkraft zusammen, so findet man leicht eine Drehkraft von vertikaler Axe. Letztere müfsten wir ausüben, wenn wir die Bewegung I erzwingen wollen. Üben wir sie nicht aus, denken uns aber trotzdem dem Schwungrade die Bewegung I erteilt, so bleibt eine der genannten entgegengesetzt gleiche Drehkraft übrig, welche, wenn sie allein wirksam wäre, eine Bewegung der Figurenaxe in horizontaler Richtung bewirken würde. Letztere werde als Bewegung II bezeichnet. Die Bewegung II würde nun ihrerseits eine Richtungsänderung in den Einzelimpulsen der Massenpunkte bewirken. Die hierzu erforderlichen Kräfte setzen sich zu einer Drehkraft von horizontaler Axe zusammen. Diese müfste wiederum von aufsen hinzugefügt werden, wenn die Bewegung II für sich möglich sein soll. Im anderen Falle bleibt eine entgegengesetzt gleiche Drehkraft von horizontaler Axe übrig, welche eine Bewegung III bewirkt, der zufolge die Figurenaxe vertikal nach oben, also der Bewegung I entgegen gedreht wird. Das Auftreten der Bewegung III erklärt nun, warum die durch die Schwerkraft gegebene Bewegungstendenz I auf die Dauer nicht anhält, sondern durch die allmählich wachsende Bewegungstendenz III überwunden werden kann. Das Auftreten von II zeigt gleichzeitig, dafs die Punkte der Figurenaxe unterdessen eine horizontale Geschwindigkeitskomponente erhalten können. Die wirkliche Bewegung, müssen wir uns vorstellen, besteht in einer Kombination der Bewegungen I, II und III (und zwar, wie wir nach Früherem hinzufügen können, in einer derartigen Kombination, dafs sich die zur Hervorbringung dieser Bewegungen erforderlichen Drehkräfte jederzeit zu einer dem Schweremoment genau gleichen Drehkraft zusammensetzen).

Wie man sieht, wird durch die vorstehende ziemlich rohe Betrachtung nur ein sehr ungefähres Bild der resultierenden Bewegung gewonnen. In welcher Stärke die unterschiedenen Bestandteile I, II, III der Bewegung jeweils auftreten, bleibt völlig unentschieden. Über die Gestalt der Bahnkurve, welche die Kreiselspitze auf der Kugeloberfläche beschreibt, kann daher lediglich auf Grund der obigen Überlegung nichts Näheres angegeben werden.

Die Poggendorffsche Ausdrucksweise ist, wie gesagt, von der vorstehenden etwas verschieden. Sie legt den Irrtum nahe, als ob die

Bewegungen I und III sich gegenseitig kompensieren könnten, so dafs eine rein horizontale Bewegung der Kreiselspitze übrig bleiben würde. Dies ist natürlich gänzlich unmöglich, sofern das Schwungrad in der Anfangslage keine horizontale Fortschreitungskomponente besitzt.

In den Lehrbüchern*), welche die Poggendorffsche Erklärung wiedergeben, wird besagter Irrtum vielfach explicite begangen.

Die Poggendorffsche Erklärung ist von Hrn. M. Koppe**) vervollständigt und bis zur quantitativen Bestimmung der Bewegung durchgeführt. Koppe berechnet die auch in der Poggendorffschen Erklärung grundlegende Drehkraft zu $Cr\vartheta'$, im Einklang mit unserer Berechnung auf S. 311 und unserem früheren Deviationswiderstand (Kap. III, § 5) und zeigt, dafs die Bewegung der Kreiselspitze so erfolgt, wie die Bewegung eines Massenpunktes auf der Kugeloberfläche, auf den aufser den elementaren Kräften, der Schwere und Centrifugalkraft, noch diese „inducierte Kraft“ jeweils senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt. Er gelangt so durchaus richtig zur Beschreibung der Bahnkurve dieses Massenpunktes als Cykloide. Die Einzelkräfte, aus denen sich die inducierte Kraft zusammensetzt, lassen sich, wie Koppe hervorhebt, als Corioliskräfte der aus Rotation um die Figurenachse und Bewegung der letzteren zusammengesetzten Bewegung auffassen. Wir heben insbesondere die wertvollen kritischen Bemerkungen über elementare Erklärungen des Kreiselphänomens zu Beginn seiner Arbeit hervor, welche uns bei der Abfassung des Vorstehenden vielfach nützlich waren.

Gleichfalls mit der Coriolisschen Kraft operiert die oben***) citierte, im Wesentlichen richtige Arbeit von Jouffret.

An Poggendorff knüpft auch F. Heinen in der Beschreibung seines Rotationsapparates an.†) Die Heinensche Darstellung ist aber viel umständlicher wie die Poggendorffsche und giebt auch nicht mehr als eine allgemeine qualitative Vorstellung der zu erwartenden Bewegung.

Alles in allem möchten wir das Zurückgehen auf die Punktmechanik, welches der zuletzt betrachteten Gruppe von Erklärungen gemeinsam ist, aus den pag. 300 genannten Gründen im Allgemeinen, nicht empfehlen.

5. Als besonders verfehlt müssen solche Erklärungen††) gelten, welche das im Experiment zu beobachtende Aufrichten der Kreiselaxe

---

*) Z. B. Müller-Pouillet, Bd. I, § 74.

**) Über die Bewegung des Kreisels. Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 4. Jahrg., 1890 und 9. Jahrg., 1896.

***) pag. 190.

†) Braunschweig 1857.

††) Vgl. z. B. Munter, Ztschr. f. d. mathem. u. phys. Unterricht, Bd. 26, pag. 565.

aus den Prinzipien der abstrakten Dynamik herleiten wollen. Wir wissen, daſs der bisher betrachtete ideale, reibungslose Kreisel sich keineswegs aufrichtet, sondern dauernd dieselbe mittlere Neigung gegen die Vertikale behauptet. Das Aufrichten der Kreiselaxe erfolgt, wenn überhaupt, nur durch die Reibung im Unterstützungspunkte, worüber wir uns später verbreiten werden.

## § 4. Über die Stabilität des aufrechten Kreisels. Geometrische Diskussion.

Ein besonderer Fall der regulären Präcession ist derjenige, wo sich die Bahnkurve auf einen Punkt, den höchsten oder tiefsten Punkt der Einheitskugel zusammenzieht. Der Kreisel rotiert dann mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die vertikal gestellte Figurenaxe. Wir wollen diese interessante Bewegung ausführlich behandeln, um daran unsere Begriffe über die Stabilität der Bewegungen zu bilden und so die allgemeineren Untersuchungen des sechsten Paragraphen vorbereiten.

Die Figurenaxe kann bei dieser Bewegung sowohl vertikal nach oben wie vertikal nach unten gerichtet sein. Wir werden uns auf die erstere Annahme beschränken, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, wenn wir nur nötigenfalls den als Figurenaxe bezeichneten Halbstrahl mit dem entgegengesetzten vertauschen.

Wir werden also $\vartheta = 0$ rechnen und haben dabei zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$ ist. Auch hier sprechen wir vom Kugelkreisel mit dem Trägheitsmomente $A$.

Die zu besprechende Bewegung bezeichnen wir kurz als *die Bewegung des aufrechten Kreisels.*

Zunächst bemerken wir, daſs unsere Koordinaten $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ zur Behandlung des vorliegenden Falles ungeeignet sind. Offenbar wird nämlich bei aufrechter Figurenaxe die Knotenlinie in der Äquatorebene unbestimmt. Mithin haben auch die Winkel $\varphi$ und $\psi$ (die Winkel der $X$- bez. der $x$-Axe gegen die Knotenlinie) keine selbständige Bedeutung. Wohl aber kommt eine solche dem Winkel $\varphi + \psi = \chi$ zu, welcher direkt den Winkel zwischen $X$- und $x$-Axe darstellt, also die Drehung des Kreisels gegen den Raum miſst. Mit Benutzung dieser Koordinate ist unsere Bewegung einfach durch die folgenden beiden Gleichungen charakterisiert

$$(1) \qquad \vartheta = 0, \quad \chi' = \text{const.}$$

Wir überzeugen uns nun leicht, *daſs die Bewegung des aufrechten Kreisels bei beliebigen Werten der Rotationsgeschwindigkeit $\chi'$ eine mögliche, mit den fundamentalen Impulsgesetzen verträgliche Bewegung ist.* Bei

der durch (1) dargestellten Bewegung fällt nämlich der Impuls dauernd mit der Vertikalen zusammen und hat eine konstante Länge. Die Änderung des Impulsvektors ist also jederzeit gleich Null. Außerdem ist bei vertikaler Stellung der Figurenaxe die Schwerewirkung $P \sin \vartheta$ fortgesetzt gleich Null. Es besteht mithin die durch unsern Impulssatz geforderte Gleichheit zwischen den Änderungen des Impulses und den Zusatzimpulsen der äußeren Kraft. Durch die Gleichungen (1) wird also in der That eine mögliche Bewegung des schweren Kreisels dargestellt, welchen Wert auch immer die Rotationsgeschwindigkeit $\chi'$ haben möge.

Offenbar gilt für die aufrechte Bewegung die Beziehung

$$n = N. \tag{2}$$

Da nämlich Impuls, Figurenaxe und Vertikale beständig zusammenfallen, so ist die Vertikalprojektion des Impulses mit der Projektion auf die Figurenaxe sowie direkt mit der Länge des Impulsvektors identisch.

Die Bedingung (2) ist übrigens nicht nur für die gleichmäßige Rotation des aufrechten Kreisels charakteristisch, sondern überhaupt für jede Bahnkurve, welche durch den höchsten Punkt der Kugel hindurchzieht. In der That wird allemal beim Passieren des Nordpols die Projektion des Impulses auf die Figurenaxe identisch mit der Projektion auf die Vertikale, weil ja beide Richtungen in einem solchen Momente zusammenfallen. Da überdies die Impulskomponenten $n$ und $N$, wie wir wissen, konstant sind, so besteht die angegebene Relation für solche Bewegungen allgemein.

Wir gehen nun zu den Stabilitätsfragen über und erteilen zu dem Zwecke dem Kreisel während seiner Rotation um die Vertikale einen Anstoß. Diesen charakterisieren wir durch den zugehörigen Drehstoß hinsichtlich des Unterstützungspunktes und repräsentieren ihn durch einen Vektor. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Länge des so erhaltenen Vektors eine beliebig vorgegebene Größe nicht übersteigt. Über die Richtung des Drehstoßvektors dürfen wir der Allgemeinheit wegen zunächst nichts voraussetzen. Indessen zeigt es sich, daß wir diese Richtung als horizontal annehmen dürfen. Wenn nämlich ein schiefgerichteter Drehstoßvektor vorliegt, so zerlegen wir diesen in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Die vertikale Komponente bewirkt lediglich eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels und läßt den Charakter der Bewegung ungeändert. Wir können daher von der vertikalen Komponente absehen und einen Drehstoß von horizontaler Axe voraussetzen.

Der ursprünglich vorhandene Impuls setzt sich natürlich mit diesem Drehstofs nach dem Parallelogrammsatze zusammen. Wir bezeichnen den Zusatzimpuls mit $[\Theta_0]$, da er uns die gleichzeitig zur Figurenaxe und zur Vertikalen senkrechte Komponente des Gesamtimpulses zur Zeit $t = 0$ angiebt. Die Beziehung zwischen unserer Impulskomponente $[\Theta_0]$ und der durch sie hervorgerufenen Rotationskomponente wird dabei nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen Impuls- und Drehungsvektor:

$$[\Theta_0] = A\vartheta_0', \tag{3}$$

wo $\vartheta_0'$ den Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit $\vartheta'$ bedeutet. Die Länge $|i|$ des Gesamtimpulses, welche bei der ungestörten Bewegung konstant und gleich $N$ war, wird jetzt variabel. Speziell ergiebt sich für den Anfangswert $|i_0|$ nach dem Pythagoras die Gleichung:

$$|i_0|^2 = N^2 + [\Theta_0]^2.$$

Schliefslich berechnen wir noch die Impulskonstante $k$ mittels der Gleichung (3) von pag. 219. Da für $t = 0$ auch $\vartheta = 0$ ist, so ergiebt sich

$$k = |i_0|^2 + 2AP = N^2 + [\Theta_0]^2 + 2AP. \tag{4}$$

Um den Charakter der durch unseren Anstofs ausgelösten Bewegung zu überblicken, fragen wir vor allem, wie tief die Kreiselspitze auf der Einheitskugel heruntersinkt. Wir sehen deshalb zu, in welcher Weise die Wurzel $e'$ der Gleichung $U = 0$ von $[\Theta_0]$ abhängt. Dabei müssen wir auf die ursprüngliche Form dieser Gleichung auf pag. 238 zurückgehen, weil die hieraus abgeleitete Gleichung $U_1 = 0$ wegen des vorgezogenen Faktors $1:(1-e^2)$, welcher in unserem Falle $(e = 1)$ unendlich grofs wird, für das Folgende unbrauchbar ist. Wir haben nach der angezogenen Stelle mit Rücksicht auf die Beziehung $n = N$:

$$A^2 U = -N^2(1-u)^2 + (k - N^2 - 2APu)(1-u^2), \tag{5}$$

oder, wenn wir $k$ der Gleichung (4) entsprechend ausdrücken:

$$A^2 U = -N^2(1-u)^2 + \big([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\big)(1-u^2). \tag{5'}$$

Auf der rechten Seite steht, wie es sein mufs, der Faktor $1-u$, welcher der bekannten Wurzel $e = 1$ entspricht. Wir sondern diesen ab und bekommen für die beiden übrigen Wurzeln die quadratische Gleichung:

$$-N^2(1-u) + \big([\Theta_0]^2 + 2AP(1-u)\big)(1+u) = 0.$$

Hier mögen wir $[\Theta_0] = v$ setzen und die so entstehende Gleichung

$$v^2(1+u) - (1-u)\big(N^2 - 2AP(1+u)\big) = 0 \tag{6}$$

in einer $u, v$-Ebene geometrisch deuten.

Die entstehende Kurve wird wieder von der dritten Ordnung. Sie liegt symmetrisch gegen die Abscissenaxe ($u$-Axe) und besteht aus einem paaren und einem unpaaren Zuge. Die Gestalt der Kurve untersuchen wir auf Grund ihrer vertikalen Tangenten, welche hier besonders leicht zu bestimmen sind.

Die Gleichungen der vertikalen Tangenten, sowie die Lage ihrer Berührungspunkte stellen wir wie folgt zusammen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gleichung: | $u = +1$ | Berührungspunkt: | $v = 0$ |
| „ | $u = -1$ | „ | $v = \infty$ |
| „ | $u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$ | „ | $v = 0.$ |

Die an zweiter Stelle genannte Tangente ist hiernach Asymptote. Für uns kommt es wesentlich darauf an, wie die dritte Tangente gegen die übrigen liegt. Wir unterscheiden in der Hinsicht vor allem zwei Fälle, je nachdem $P < 0$ oder $P > 0$.

*Erster Fall:* $P < 0$.

Die dritte Tangente liegt links von der Asymptote. Reelle Werte von $v$ ergeben sich für die Gebiete

$$-1 < u < +1 \quad \text{und} \quad -\infty < u < -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Der unpaare Zug verläuft in dem Streifen zwischen $u = -1$ und $u = +1$, der paare Zug erstreckt sich von der Tangente $u = -1 + \frac{N^2}{2AP}$ nach links ins Unendliche (vgl. Fig. 52). Wir ziehen in beliebiger Nähe der Abscissenaxe die Parallele $v = [\Theta_0]$ und bringen sie zum Schnitt mit dem unpaaren Zuge. Die Abscisse dieses Schnittpunktes liefert uns den Parallelkreis $u = e'$. Wie man sieht, kommt die Gröfse $e'$ der Einheit um so näher, je kleiner wir $[\Theta_0]$ nehmen. (Dabei wird, wie wir des Folgenden wegen bemerken, die Differenz $1 - e'$ von der Ordnung $[\Theta_0]^2$, sie stellt also „eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung" dar, wenn wir den

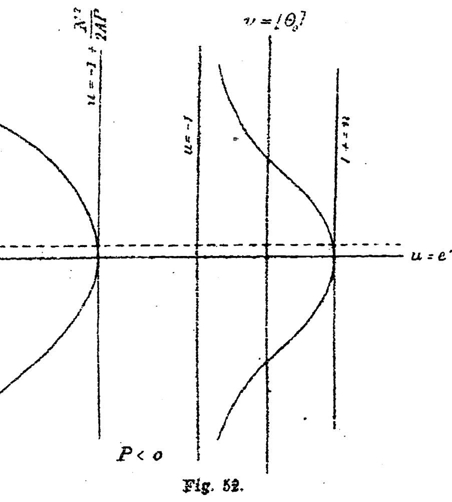


Fig. 52.

Anstofs $[\Theta_0]$ „unendlich klein von der ersten Ordnung" werden lassen.) Infolgedessen können wir durch Wahl von $[\Theta_0]$ erreichen, dafs die Bahnkurve des ursprünglich aufrechten Kreisels nach Hinzufügung

unseres Anstoſses in einer beliebig engen Nachbarschaft zur ursprünglichen Bahnkurve, dem Nordpole, verläuft. *Hinsichtlich der Bahnkurve findet also im Falle $P < 0$ sicher ein stetiger Übergang von der ursprünglichen zu der abgeänderten Bewegung statt.*

Die Bahnkurve der Kreiselspitze bringt indessen, wie wir wissen, die Bewegung nicht vollständig zum Ausdruck, indem sie über die Rotation des Kreisels um die Figurenaxe keinen Aufschluſs giebt.

Bei der ungestörten Bewegung wird diese gemessen durch den Winkel $\chi$; da sich die Winkelgeschwindigkeit $\chi'$ durch den Impuls $N$ bei der aufrechten Bewegung folgendermaſsen ausdrückt:

$$\chi' = \frac{N}{A},$$

so haben wir einfach (bei spezieller Wahl der Anfangszeit)

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

Nach Hinzufügung des Anstoſses $[\Theta_0]$ wollen wir, um vergleichbare Gröſsen zu haben, die Rotation um die Figurenaxe durch den entsprechenden Winkel $\chi$ messen. Wir haben dann mit Rücksicht auf (2):

$$\chi' = \varphi' + \psi' = \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} + \frac{N - nu}{A(1-u^2)} = \frac{2N}{A(1+u)}.$$

Da nun $u$ in beliebiger Nähe von 1 bleibt, entwickeln wir nach Potenzen von $u - 1$ und vernachlässigen alle höheren Potenzen. So ergiebt sich

$$\chi' = \frac{N}{A} - \frac{N}{A} \frac{u-1}{2}.$$

Hier ist der zweite Term der rechten Seite, wie aus einer obigen Bemerkung hervorgeht, im Verhältnis zu dem Anstoſse $[\Theta_0]$ von der zweiten Ordnung unendlich klein. Solche Gröſsen pflegt man aber bei der in der Litteratur üblichen Handhabung der Stabilitätsbetrachtungen nicht mitzunehmen. Auch bei den Nachbarbewegungen der regulären Präcession im ersten Paragraphen dieses Kapitels haben wir, indem wir den Rest $R$ in dem Ausdrucke von $\psi$ vernachlässigten, die Glieder zweiter Ordnung (mit dem Faktor $\varepsilon^2$) unterdrückt. Beschränken wir uns also auch jetzt auf die Glieder erster Ordnung, so werden wir, indem wir die Integration nach $t$ ausführen, wieder auf die ursprüngliche Formel zurückgeführt:

$$\chi = \frac{N}{A} t.$$

(Man bemerke übrigens, daſs die jedenfalls nicht unbedenkliche Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung nur eine vorläufige ist und daſs sie für die in § 6 zu entwickelnde definitive Auffassung der Stabilitätskriterien gar nicht in Frage kommt.)

Unsere Betrachtung zeigt, dafs der Winkel $\chi$ der abgeänderten Bewegung dem Winkel $\chi$ der ursprünglichen bis auf Glieder zweiter Ordnung dauernd benachbart bleibt. Diese Aussage bezieht sich jedoch nur auf den Fall, wo der hinzugefügte Drehstofs eine rein horizontale **Axe hat.** Bei allgemeinerem Anstofs, durch welchen nicht nur ein gewisser Wert von $[\Theta_0]$ hinzugefügt, sondern auch die ursprüngliche Impulskomponente $N$ abgeändert wird, liegt die Sache natürlich anders.

Betrachten wir z. B. den einfachsten Fall, wo $[\Theta_0] = 0$ genommen und $N$ um die kleine Gröfse $N'$ vermehrt wird. Die Bewegung bleibt dann nach wie vor die des aufrechten Kreisels. Der Winkel $\chi$ bei der abgeänderten Bewegung bestimmt sich durch die Gleichung

$$\chi = \frac{N + N'}{A} t.$$

Wie man sieht, weicht derselbe von dem Winkel $\chi$ der ungestörten Bewegung um ein Glied ab, welches der ersten Potenz des Anstofses $N'$ proportional ist. Nichtsdestoweniger können wir zwischen die ursprüngliche und die abgeänderte Bewegung durch Verkleinerung von $N'$ solche Bewegungen einschalten, welche einen stetigen Übergang von dem $\chi$ der einen zu dem der anderen Bewegung vermitteln.

Nach alledem werden wir zweifellos und zwar unabhängig davon, ob wir die soeben gemachte Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung zulassen wollen oder nicht, sagen können:

*Die Bewegung des aufrechten Kreisels im Falle $P < 0$ ist sicher eine stabile Bewegung.*

Dieses Resultat stimmt natürlich vollkommen mit der bekannten Thatsache überein, dafs die Gleichgewichtslage des nicht aufgezogenen Kreisels ($N = 0$) eine stabile ist, wenn der Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt ($P < 0$).

*Zweiter Fall: $P > 0$.*

Sehr viel interessanter ist der zweite Fall $P > 0$. Die dritte der pag. 319 genannten vertikalen Tangenten liegt alsdann rechts von der Asymptote $u = -1$. Je nachdem sich dieselbe auch rechts von der Tangente $u = +1$ oder links von derselben befindet, ergeben sich zwei Unterfälle a) und b).

*Der erste Unterfall* tritt ein, wenn

$$\text{(a)} \qquad +1 < -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 > 4AP,$$

*der zweite*, wenn

$$\text{(b)} \qquad +1 > -1 + \frac{N^2}{2AP}, \quad \text{d. h.} \quad N^2 < 4AP.$$

Wir vergleichen hiermit unsere frühere Unterscheidung zwischen

dem starken und dem schwachen Kreisel. Da wir $P > 0$ vorausgesetzt haben, müssen wir das Kriterium (3′) von pag. 249 heranziehen.

Tragen wir hier, der aufrechten Anfangslage der Figurenaxe entsprechend, für $e$ den Wert $+1$ ein, so gehen die Ungleichungen jenes Kriteriums gerade in die Ungleichungen (a) und (b) über. *Der Unterfall* (a) *entspricht also einem starken, der Unterfall* (b) *einem schwachen Kreisel.* (Nebenbei bemerkt, ist der Fall eines negativen $P$ stets den *starken* Kreiseln zuzurechnen, weil hier die Ungleichung (a) selbstverständlicher Weise befriedigt wird.)

Wir setzen zunächst wieder unsere Kurven dritter Ordnung für unsere beiden Fälle $P > 0$ her, wie sie der Gleichung (5) entsprechen. Bei dem starken Kreisel, Fall (a), zieht sich der unpaare Zug durch den Streifen $-1$ bis $+1$ hindurch, indem er $u = -1$ im Unendlichen und $u = +1$ auf der Abscissenaxe berührt. Bei dem schwachen Kreisel dagegen ist der unpaare Zug in den Streifen $-1$ bis $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ eingeschlossen. Der paare Zug liegt beidemal rechts von dem unpaaren und berührt entweder die Tangente $-1 + \frac{N^2}{2AP}$ oder die Tangente $+1$ in ihrem Schnittpunkte mit der Abscissenaxe.

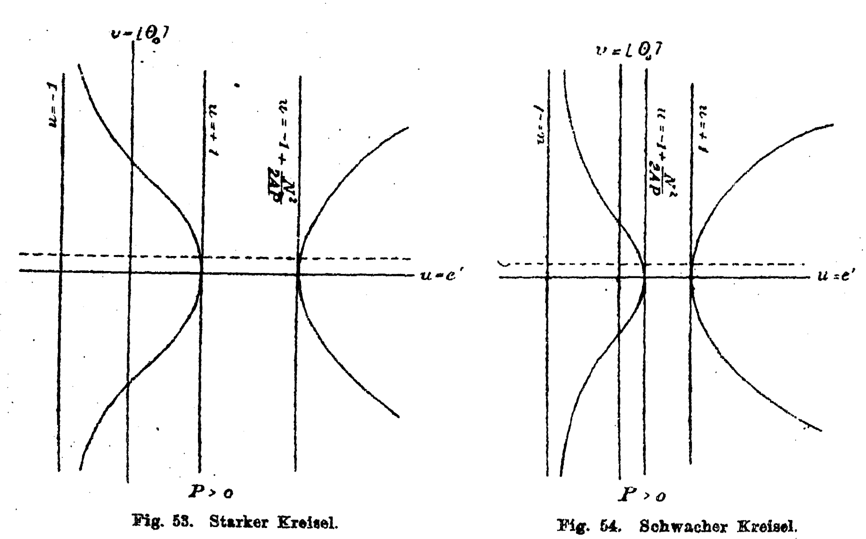



Fig. 53. Starker Kreisel. Fig. 54. Schwacher Kreisel.

Es kommt nun darauf an, aus der Gestalt dieser Kurven den Charakter der Bahn bei einer Störung $[\Theta_0]$ zu erschliefsen.*) Wir ziehen zu dem Zweck wieder die Parallele $v = [\Theta_0]$ zu der Abscissenaxe, deren Schnittpunkt mit dem unpaaren Zuge durch seine Abscisse die Gröfse

*) Vgl. hierzu: F. Klein, On the stability of the sleeping top. American Bulletin, 1896.

des zweiten Parallelkreises bestimmt. Hierbei ergiebt sich nun ein sehr interessanter Gegensatz zwischen dem starken und schwachen Kreisel.

In Fig. 53 liegt nämlich der genannte Schnittpunkt in unmittelbarer Nähe des Punktes $u = 1$, $v = 0$.

*Bei dem starken Kreisel fällt also der Parallelkreis $e'$ um so kleiner aus, je kleiner wir den Anstofs $[\Theta_0]$ wählen, und geht bei verschwindendem $[\Theta_0]$ in den Nordpol $e = 1$ stetig über. Die Bahnkurve der Kreiselspitze verharrt in unmittelbarer Nähe der ursprünglichen punktförmigen Bahnkurve; ihre Dimensionen können durch Verkleinerung des Anstofses beliebig verkleinert werden.*

In Fig. 54 dagegen unterscheidet sich die Abscisse des soeben konstruierten Schnittpunktes von der Einheit stets um eine endliche Gröfse, welche nicht unter $1 + 1 - \frac{N^2}{2AP}$ herabgedrückt werden kann.

*Bei dem schwachen Kreisel ändert sich also die Lage des zweiten Parallelkreises in unstetiger Weise. Bei der geringsten Störung springt dieser Parallelkreis, welcher sich bei der ungestörten Bewegung auf den Nordpol reduziert, sogleich in einen Kreis über, dessen $e'$ kleiner ist als $-1 + \frac{N^2}{2AP}$. Die Dimensionen der Bahnkurve können daher durch Verkleinerung von $[\Theta_0]$ nicht beliebig verkleinert werden. Die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels nimmt also im System der Bahnkurven eine isolierte Stellung ein.*

Die letzten Bemerkungen zeigen bereits, dafs der schwache Kreisel in aufrechter Stellung instabil ist. Was den starken Kreisel im Falle $P > 0$ betrifft, so können wir bei ihm dieselben Überlegungen anstellen, wie oben im Falle $P < 0$. Wir sprechen daraufhin den allgemeinen Satz aus:

*Der starke Kreisel ist in aufrechter Stellung stabil, der schwache Kreisel labil.*

Den Grenzfall zwischen dem starken und schwachen Kreisel, d. h. den Kreisel mit $N^2 = 4AP$ haben wir ersichtlich den stabilen Fällen zuzurechnen. Alsdann können wir nämlich den Anstofs $[\Theta_0]$ noch gerade so klein bemessen, dafs sich $e'$ beliebig wenig von

$$-1 + \frac{N^2}{2AP} = -1 + 2 = +1$$

unterscheidet. Wir fügen daher hinzu:

*Der Kreisel, welcher auf der Grenze zwischen dem starken und dem schwachen Kreisel steht, ist in aufrechter Lage gleichfalls stabil.*

Übrigens wird die Bahnkurve im stabilen wie im labilen Falle die Gestalt einer *Rosette* haben, welche sich (wegen der allgemeinen Periodicitätseigenschaften der Bewegung) in regelmäfsigen Zeitintervallen fortgesetzt durch den Nordpol der Kugel hindurchzieht und aus lauter

kongruenten Schleifen besteht. Der Unterschied zwischen beiden Fällen offenbart sich nur in der *Gröfse dieser Rosette*, oder, genauer gesagt, in der *Veränderung ihrer Gröfse bei Verkleinerung des Anstofses.* Die Rosette im labilen Falle ist eine nicht minder reguläre, periodisch sich reproduzierende Kurve, wie im stabilen Falle, welche sogar, unter besonderen sogleich näher anzugebenden Umständen, von der Rosette des stabilen Falles für das Auge durch nichts verschieden ist. Wir betonen diesen Punkt besonders, weil hierüber vielfach irrige Vorstellungen verbreitet sein dürften.

Die Engländer bezeichnen in höchst anschaulicher Weise die aufrechte Kreiselbewegung als Bewegung des „sleeping top“. Wenn nämlich, wie wir annehmen wollen, nicht nur mechanische, sondern auch geometrische Rotationssymmetrie um die Figurenaxe vorhanden ist, so scheint der Kreisel bei aufrechter Stellung dem Auge zu ruhen. Dafs diese Ruhe aber nur eine scheinbare ist, zeigt sich, wenn wir ihn durch einen Anstofs gewissermafsen aufwecken. Alsdann wird seine ursprünglich verborgene Bewegung auch äufserlich sichtbar. Nach seinem Verhalten beim Aufwachen beurteilen wir die Stabilität oder Labilität. Wenn sein Aufwachen ein sanftes ist, nennen wir die aufrechte Bewegung stabil; wenn dagegen die leiseste Störung hinreicht, um unverhältnismäfsig grofse Elongationen hervorzurufen, heifst die Bewegung labil.

Dafs überhaupt im Falle $P > 0$ bei aufrechter Stellung Stabilität möglich ist, stellt eine Thatsache von ganz eigenartigem Interesse dar, welche zunächst wieder paradox erscheinen möchte. Während der nicht aufgezogene Kreisel im Falle $P > 0$ in aufrechter Stellung natürlich gänzlich instabil ist und auf jeden kleinsten Anstofs mit einer vollen Pendelschwingung reagiert, wird er, in genügend starke Rotation versetzt ($N^2 > 4AP$), befähigt, dem Einflufs der Schwere bis zu einem gewissen Grade Widerstand zu leisten. Der schwache Kreisel vermittelt dabei den Übergang zwischen dem Kreisel von der Eigenrotation Null und dem starken Kreisel.

Die Lage des Parallelkreises $e'$, bis zu welchem die Figurenaxe bei irgend einem Anstofs mindestens herabsinkt, kann als ein Mafs für die gröfsere oder geringere Schwäche des Kreisels angesehen werden. Die Lage dieses dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechenden Parallelkreises ist, wie wir sahen, gegeben durch

$$e' = -1 + \frac{N^2}{2AP}.$$

Für den Kreisel von der Eigenrotation Null wird dieser Wert gleich $-1$; die Figurenaxe beschreibt alsdann, wie soeben erwähnt,

im Nordpole angestofsen einen gröfsten Kreis, welcher durch den Südpol hindurchgeht. Die im allgemeinen eintretende Rosette ist hier ausgeartet. Bei wachsendem $N$ wächst der Wert von $e'$ kontinuierlich und nähert sich für $N^2 = 4AP$ dem Werte $e = +1$.

Der Übergang zwischen dem labilen und dem stabilen Falle der aufrechten Kreiselbewegung ist auf diese Weise gewissermafsen selbst ein stetiger. Wenn nämlich $N^2$ zwar kleiner als $4AP$ aber doch von $4AP$ sehr wenig verschieden ist, wird die Elongation der Bahnkurve bei beliebig kleinem Anstofse zwar von Null verschieden aber doch unbeträchtlich; sie kann sogar durch geeignete Annahme von $N$ unter jeden gegebenen Wert herabgedrückt werden. Immerhin bleibt auch dann die charakteristische Eigenschaft des labilen Falles bestehen, dafs, nachdem wir einmal über $N$ verfügt haben, die Dimensionen der Bahnkurve durch Abänderung von $[\Theta_0]$ nicht beliebig verkleinert werden können.

Theoretisch ist also in diesem Falle (wo $\frac{4AP}{N^2} - 1$ eine absolut genommen kleine negative Zahl ist) die Bewegung jedenfalls labil; im Experiment dagegen würde sich eine derartige Bewegung von einer theoretisch stabilen nicht merklich unterscheiden. Beidemal haben wir eine Rosette von qualitativ ähnlichem Verlauf und aufserordentlich kleinen Dimensionen. Wir mögen daher etwa von einer *theoretischen und praktischen Labilität und Stabilität* sprechen und sagen: *Im Falle, wo $N^2$ nur sehr wenig kleiner ist als $4AP$, ist die Bewegung theoretisch labil, praktisch aber immer noch stabil.*

Im sechsten Paragraphen dieses Kapitels werden wir noch andere einfachere Beispiele von theoretischer Labilität und praktischer Stabilität, sowie von theoretischer Stabilität und praktischer Labilität kennen lernen. —

Wir mögen schliefslich allgemein nach solchen Bewegungen des schweren *symmetrischen* Kreisels fragen, welche aus einer blofsen Rotation um eine im Raum feste Axe bestehen.

Aus Symmetriegründen geht hervor, dafs eine solche Axe keine andere, als die Vertikale sein kann und dafs die Drehung um diese Axe gleichförmig erfolgen mufs. Die Bewegung gehört alsdann zur Klasse der regulären Präcessionen, und zwar handelt es sich hier speziell um eine solche Präcession, bei welcher der Herpolhodiekegel unendlich dünn ist, bei welcher also $\mu$ den Wert Null hat. Die andere Präcessionskonstante $\nu$, welche uns hier direkt die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit angiebt, ist daraufhin bestimmt. Die Theorie des Deviationswiderstandes liefert nämlich (s. Gl. (3) von pag. 77) für $\nu$ die Gleichung:

$$P = (C - A)\nu^2 \cos\vartheta. \qquad (15)$$

Nur in dem Falle $\vartheta = 0$ verliert diese Gleichung ihre Gültigkeit, weil wir an der angezogenen Stelle aus der zunächst in Betracht kommenden Gleichung den Faktor $\sin\vartheta$ herausgehoben haben, vermöge dessen diese Gleichung im Falle $\vartheta = 0$ identisch erfüllt ist. *Mithin ist die aufrechte Figurenaxe die einzige Gerade, um welche sich der Körper mit jeder beliebigen Geschwiudigkeit permanent drehen kann. Jede andere Axe erfordert, falls sie als permanente Axe auftreten soll, einen (bis auf das Vorzeichen) bestimmten Wert der Winkelgeschwindigkeit.*

Je nachdem dieser Wert reell oder imaginär ausfällt, werden wir die betreffende Axe als „zulässige“ oder „unzulässige Drehungsaxe“ bezeichnen. Um die Entscheidung hierüber zu treffen, wollen wir das Gesamtbündel der von $O$ auslaufenden Halbstrahlen durch die Äquatorebene des Kreisels in zwei Halbbündel zerlegen. Indem wir uns die Figurenaxe so gewählt denken, dafs der Schwerpunkt bei vertikal aufgerichteter Figurenaxe über den Unterstützungspunkt zu liegen kommt ($P > 0$), wollen wir dasjenige Halbbündel, welches den Schwerpunkt enthält, als oberes, das andere als unteres bezeichnen. Alsdann zeigt die Gleichung (15):

*Bei dem verlängerten Kreisel ($C < A$) sind alle Halbstrahlen des unteren, bei dem abgeplatteten alle des oberen Halbbündels zulässige permanente Drehungsaxen. Jeder dieser Axen kommen zwei entgegengesetzt gleiche Werte der Winkelgeschwindigkeit zu. Speziell bei dem Kugelkreisel sind die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten allemal $\pm\infty$.*

### § 5. Fortsetzung. Analytische Behandlung der durch einen Anstofs abgeänderten aufrechten Kreiselbewegung. — Formeln für die pseudoregulären Präcessionen von kleinem Präcessionskreise.

Wir werden jetzt die im vorigen Paragraphen gegebene qualitative Diskussion der aufrechten Kreiselbewegung durch eine angenäherte quantitative Darstellung ergänzen, unter dem Gesichtspunkte, von hieraus eine exakte Grundlage für unsere spätere Kritik der Methode der kleinen Schwingungen zu gewinnen, einer Methode, welche in der modernen Dynamik eine bekannte wichtige Rolle spielt. Dabei haben wir an die Näherungsformeln vom neunten Paragraphen des vorigen Kapitels anzuknüpfen. Die dortigen Näherungsformeln für $u$ können auf den vorliegenden Fall direkt übertragen werden. Dagegen bedürfen die Formeln für $\psi$ einer Modifikation, weil in diesen der Term $1 - u_0^2$ im Nenner vorkam, welcher jetzt wenigstens in den stabilen Fällen bei verschwindendem Anstofs verschwindet.

Wir schreiben zunächst die Näherungsformel für $u$ im vorliegenden Falle hin. Um mit den Bezeichnungen des genannten § 9 in Einklang

zu bleiben, verstehen wir unter $e$ den unteren, unter $e'$ den oberen der beiden begrenzenden Parallelkreise, so dafs $e' = 1$ wird. Die in unserer Näherungsformel auftretende Gröfse $\varepsilon$ bedeutete den halben Vertikalabstand der Kreise $e'$ und $e$, so dafs jetzt

$$\varepsilon = \frac{1-e}{2}; \tag{1}$$

die Gröfse $u_0$ war der „mittlere Parallelkreis", dessen Ebene von den Ebenen der Parallelkreise $e$ und $e'$ den gleichen Vertikalabstand $\varepsilon$ besitzt, woraus im vorliegenden Falle folgt:

$$u_0 = 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Die Gleichung (8′) von pag. 272 können wir daher mit Benutzung der in (7) pag. 272 eingeführten Abkürzung folgendermafsen schreiben:

$$1 - u = \frac{1-e}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{\omega}\right); \quad \omega = \sqrt{\frac{A}{2P(e''-u_0)}}\,\pi. \tag{3}$$

Hierbei haben wir gleichzeitig eine für das Folgende bequeme Verschiebung des Anfangspunktes der Zeit vorgenommen, indem wir statt des Sinus den Cosinus gesetzt haben, was zur Folge hat, dafs zu Beginn der Bewegung die Figurenaxe vertikal steht ($u = 1$ für $t = 0$).

In (3) führen wir statt $u$ und $e$ die entsprechenden Winkel ein, indem wir setzen:

$$u = \cos\vartheta, \quad e = \cos\eta$$

und gehen von den ganzen zu den halben Winkeln über. Dann folgt, wenn wir rechts und links die Quadratwurzel ziehen:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\eta}{2}\sin\frac{\pi t}{2\omega}, \tag{4}$$

Die Unsicherheit in dieser Formel bestimmt sich aus der Gröfse $\tau$ des relativen Fehlers von $t$. Nach Gleichung (5) von pag. 272 ist

$$|\tau| < \sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}} - 1, \tag{5}$$

worin nach (1) $e = 1 - 2\varepsilon$, $e' = 1$ zu setzen und $e''$ aus Gleichung (9) von pag. 273 zu berechnen ist. Da bei der aufrechten Bewegung $n = N$ ist, so können wir in der letztgenannten Gleichung den Faktor $2(1-e)$ in Zähler und Nenner heben und erhalten

$$e'' = \frac{N^2}{AP(1+e)} - 1 = \frac{N^2 - 2AP(1-\varepsilon)}{2AP(1-\varepsilon)}. \tag{6}$$

Infolgedessen wird

$$|\tau| < \sqrt{\frac{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)^2}{N^2 - 4AP(1-\varepsilon)}} - 1. \tag{5'}$$

Diese Abschätzung liefert in jedem Falle einen Anhalt für die Beurteilung des Genauigkeitsgrades der Gleichung (4).

Wir fragen insbesondere nach denjenigen Fällen, wo die begrenzte Genauigkeit von Gleichung (4) in eine beliebige Genauigkeit übergeht, wo also $|\tau|$ beliebig klein gemacht werden kann. Dies tritt offenbar, allgemein zu reden, *in den stabilen Fällen* ein, wo wir durch Wahl des Anstofses erreichen können, dafs $\varepsilon$ beliebig klein wird. Alsdann weicht nämlich der Wert der Quadratwurzel in (5′) von 1 beliebig wenig ab.

*In den labilen Fällen* dagegen haben wir die Gröfse von $\varepsilon$ nicht in unserer Gewalt. Die rechte Seite von (5′) wird dann, selbst bei beliebig kleinem Anstofse, eine von Null verschiedene Gröfse; es liegt kein Grund zu der Annahme vor, dafs unsere Darstellung (4) auch in diesem Falle eine beliebig genaue wäre.

Dabei haben wir *den Grenzfall zwischen den stabilen und den labilen Fällen* ($N^2 = 4AP$) besonders zu berücksichtigen. Wir sahen, dafs wir diesen Fall bezüglich des Verhaltens der Bahnkurve durchaus den stabilen Fällen zuzuordnen haben, weil die Bewegung der Kreiselspitze bei hinreichend kleinem Anstofse in unmittelbarer Nähe des Nordpoles verläuft. Dagegen zeigt sich jetzt, dafs bezüglich des Genauigkeitsgrades unserer Annäherungsformeln dieser Grenzfall auf Seite der labilen Fälle steht. Setzen wir nämlich in (5′) $N^2 = 4AP$, so wird die rechte Seite

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon}} - 1,$$

d. h., wenn wir $\varepsilon$ hinreichend klein machen, gleich

$$\sqrt{2} - 1.$$

Hier haben wir also trotz des stabilen Charakters und trotz der Möglichkeit einer beliebigen Verkleinerung der Bahnkurve einen Fall vor uns, in dem wir von unserer Näherungsformel nur eine begrenzte Genauigkeit erwarten können.

Ähnlich liegen die Verhältnisse *in den theoretisch labilen, praktisch aber stabilen Fällen,* wo $N^2 - 4AP$ zwar kleiner als Null, aber nur äufserst wenig von Null verschieden ist und wo gleichzeitig bei hinreichend kleinem Anstofse auch $\varepsilon$ äufserst klein ausfällt. Auch in diesen Fällen genügt die Kleinheit von $\varepsilon$ nicht, um die Gröfse des Fehlers beliebig herabzudrücken.

Zu Letzterem wäre erforderlich, dafs $\varepsilon$ nicht nur klein schlechtweg, sondern auch klein gegen $(4AP - N^2)/4AP$ wäre, was nicht der Fall ist, da, wie wir pag. 323 sahen, die Differenz $2\varepsilon$ der Werte von $e$ und $e'$

mindestens gleich $\frac{4AP-N^2}{2AP}$ ist. Mithin haben wir auch in diesem ebenso wie in den theoretisch und praktisch labilen Fällen nur begrenzte Annäherung zu erwarten.

Im Zusammenhange damit möge noch eine Bemerkung über diejenigen stabilen Fälle Platz finden, wo $N^2-4AP$ zwar gröfser als Null, aber nur äufserst wenig von Null verschieden ist. In diesen Fällen ist es allerdings möglich, durch Wahl des Anstofses die Dimensionen der Bahnkurve und insbesondere den Wert von $\varepsilon$ beliebig zu verkleinern, es ist also möglich, $\varepsilon$ nicht nur klein, sondern auch klein gegen $(N^2-4AP)/4AP$ zu machen; unsere Näherungsformel würde für *so* klein bemessene Anstöfse als beliebig genau gelten können. Sobald wir aber den Anstofs nur ein wenig gröfser nehmen, so zwar, dafs $\varepsilon$ nicht mehr klein gegen $(N^2-4AP)/4AP$ wird, kann der Fehler sogleich beträchtlich wachsen. Infolgedessen würde die Genauigkeit unserer Formel für alle nicht gar zu kleinen Anstöfse doch nur eine begrenzte sein. Wir werden in diesem Falle von einer *theoretisch beliebigen, praktisch aber begrenzten Annäherung sprechen.*

Die letzten etwas subtilen Unterscheidungen wollen wir noch einmal zusammenfassend so formulieren:

*Unsere Näherungsformel besitzt eine theoretisch und praktisch begrenzte Genauigkeit in allen instabilen Fällen und in demjenigen stabilen Falle, welcher sich auf der Grenze von Stabilität und Labilität befindet. Sie besitzt eine in theoretischer und praktischer Hinsicht beliebige Genauigkeit in denjenigen stabilen Fällen, welche genügend weit von den labilen Fällen entfernt sind. Dagegen haben wir theoretisch beliebige, praktisch aber begrenzte Genauigkeit in denjenigen Fällen, welche zwar stabil sind, aber der Grenze der Labilität sehr nahe liegen.*

Sodann wollen wir die Näherungsformel für $\psi$ ableiten. Dabei werden wir, anstatt uns auf die allgemeinen Formeln von pag. 275 ff. zu stützen, die Untersuchung lieber von vorne beginnen, weil sie sich in dem vorliegenden Falle weiter führen läfst und einfacher gestaltet, wie es im allgemeinen möglich war.

Wir gehen also aus von der Gleichung

$$\psi' = \frac{n-Nu}{A(1-u^2)}.$$

Da bei der aufrechten Bewegung $n=N$ ist, so können wir rechterhand den Faktor $1-u$ fortheben. Nehmen wir noch mit der rechten Seite eine identische Umformung vor, so erhalten wir:

$$\psi' = \frac{N}{A}\frac{1}{1+u} = \frac{N}{2A}\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right).$$

Indem wir nun zu einer angenäherten Darstellung übergehen, beschränken wir uns in der Klammer auf das erste Glied. Das zweite liefert dann die erforderliche Fehlerabschätzung. Unsere angenäherte Darstellung soll also lauten, wenn wir sogleich die Integration nach $t$ ausführen und die unwesentliche Integrationskonstante gleich Null setzen:

$$\psi = \frac{N}{2A}\, t. \tag{7}$$

Der Fehler ist dabei genau gegeben durch

$$f = \int \frac{N}{2A} \frac{1-u}{1+u}\, dt.$$

Wir können $N > 0$ voraussetzen, in welchem Falle der Integrand dauernd positiv ist. Setzen wir für $u$ seinen kleinsten Wert $e = 1 - 2\varepsilon$ ein, so verkleinern wir den Nenner und vergröfsern gleichzeitig den Zähler des Integranden. Infolgedessen ist sicher

$$f < \int \frac{N}{2A} \frac{2\varepsilon}{2 - 2\varepsilon}\, dt,$$

d. h.

$$f < \frac{N}{2A} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\, t. \tag{8}$$

Somit haben wir eine obere Grenze für den absoluten Fehler der Näherungsformel (7) bestimmt. Der relative Fehler $\frac{f}{\psi}$ wird dementsprechend kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{8'}$$

Ebenso einfach wie die Fehlerabschätzung ist die Diskussion des Genauigkeitsgrades von Gleichung (7). Die Genauigkeit wird offenbar eine beliebige, wenn wir, gleichviel wie, erreichen können, dafs $\varepsilon$ beliebig klein wird; sie wird voraussichtlich eine begrenzte sein, wenn wir $\varepsilon$ oder was dasselbe bedeutet, die Dimensionen der Bahnkurve nicht nach Belieben verkleinern können. Wir werden also sagen müssen:

*Die Gleichung (7) giebt eine beliebig gute Annäherung in allen stabilen Fällen (mit Einschlufs des Grenzfalles zwischen Stabilität und Labilität), sowie in den praktisch stabilen und theoretisch labilen Fällen; sie giebt dagegen nur eine begrenzte Annäherung in den Fällen thatsächlicher (praktischer) Labilität.*

Man bemerke, dafs hier die Diskussion wesentlich anders ausfällt, wie oben die Untersuchung des Genauigkeitsgrades von Gleichung (4). —

Nach dieser vorbereitenden Diskussion der Näherungsformeln untersuchen wir den Charakter der verschiedenen Bewegungen, wie er sich auf Grund unserer Näherungsformeln ergiebt. Zunächst fassen wir jetzt

diejenigen Fälle näher ins Auge, welche gleichzeitig durch (4) und (7) beliebig gut dargestellt werden, d. h. die stabilen Fälle, welche hinreichend weit von der Grenze der Labilität entfernt sind, bei hinreichender Kleinheit des Anstofses $[\Theta_0]$.

Offenbar können wir in diesen Fällen, da ja die Dimensionen der Bahnkurve verschwindend klein sein sollen, in (4) $\sin\frac{\eta}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2}$ durch $\frac{\eta}{2}$ und $\frac{\vartheta}{2}$ ersetzen. Gleichzeitig wollen wir den Wert von $\omega$ in Gleichung (3) vereinfachen, indem wir näherungsweise $\varepsilon = 0$, $u_0 = 1$ setzen. Dann ergiebt sich aus (6) und (3)

$$e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP}, \quad \omega = \frac{A\pi}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{9}$$

Die Gleichungen der Bahnkurve nehmen daher folgende Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta &= \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\}, \\ \psi &= \frac{N}{2A}\, t. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Für die Vorstellung und Zeichnung ist es bequem, die Bahnkurve auf die Äquatorebene zu projizieren. Wir können hierzu eine Orthogonalprojektion benutzen (bei der stereographischen Projektion würde sich dasselbe Bild, nur im halben Mafsstabe, ergeben). Bezeichnen $x$ und $y$ die rechtwinkligen Koordinaten des Projektionspunktes bezüglich eines im Mittelpunkt der Einheitskugel gelegenen Koordinatenkreuzes, so haben wir etwa:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sin\vartheta\cos\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \cos\frac{N}{2A}\, t, \\ y &= \sin\vartheta\sin\psi = \eta \sin\left\{\sqrt{\frac{N^2 - 4AP}{4A^2}}\, t\right\} \cdot \sin\frac{N}{2A}\, t. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung können wir folgendermafsen mit Worten beschreiben (vgl. auch S. 341 u. Anhang zu Heft IV, S. 946).

*Die Bewegung der Horizontal-Projektion der Kreiselspitze besteht aus einer gewöhnlichen harmonischen Schwingung (dargestellt durch den ersten Faktor in $x$ und $y$) von der Amplitude $\eta$ und der viertel Schwingungsdauer $\omega$, verbunden mit einer Drehung der Schwingungsrichtung (dargestellt durch den zweiten Faktor) von der Winkelgeschwindigkeit $N:2A$.*

Die Gestalt der Bahnkurve wird wesentlich durch den Winkel bedingt, um welchen das Azimuth $\psi$ etwa während der Zeit $\omega$ zunimmt. Wir bezeichnen denselben wie früher durch $\psi_\omega$ und haben nach (7) und (9)

$$\psi_\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{N}{\sqrt{N^2 - 4AP}}. \tag{12}$$

Ersichtlich ist

$$\psi_\omega > \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P > 0,$$

$$\psi_\omega < \frac{\pi}{2} \quad \text{im Falle} \quad P < 0.$$

In dem Grenzfalle $P = 0$ wird $\psi_\omega$ gerade gleich $\pi/2$. Die Bahnkurve der Kreiselspitze wird dann einfach ein Kreis, der Präcessionskreis der kräftefreien Bewegung; Axe der Präcession ist der um den Anstofs $[\Theta_0]$ abgeänderte Anfangsimpuls $N$. Letztere Bahnkurvenbestimmung gilt übrigens aufser für den Grenzfall $P = 0$ auch für den Fall $N = \infty$, wie aus dem schon mehrfach benutzten Prinzipe folgt, wonach ein Kreisel von unendlich grofsem Eigenimpuls und endlichem Schweremomente $P$ sich ebenso verhält, wie ein schwereloser Kreisel von endlichem $N$.

Die Gestalt der Bahnkurven ist hiernach in allen stabilen Fällen, wo unsere beiden Näherungsformeln beliebig genau werden, leicht zu übersehen. Die nachfolgenden charakteristischen Figuren, welche man bei allen analogen Schwingungsvorgängen wiederfinden wird, erläutern drei Typen derselben, $P > 0$, $P = 0$ bez. $N = \infty$ und $P < 0$. Die Bahnkurve in Fig. 55 schliefst sich zufällig fast genau, Fig. 56 stellt den Übergang zwischen 55 und 57 dar.

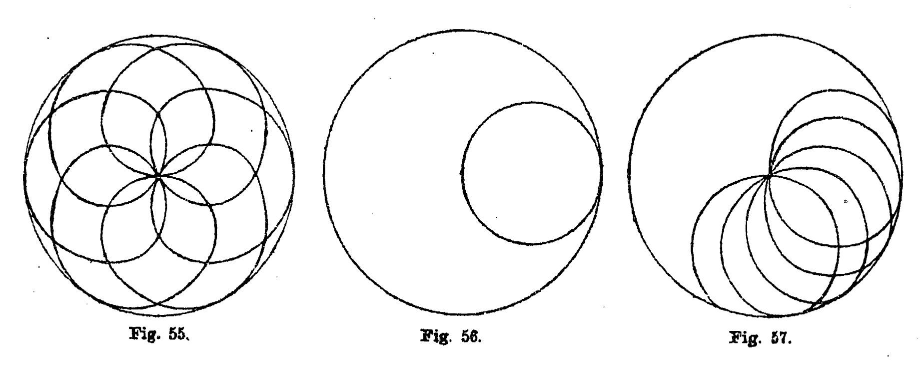


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57.

Wie wir sehen, sind unsere Schwingungen im stabilen Falle tautochron, d. h. in erster Annäherung ihrer Zeitdauer nach unabhängig von der Gröfse des Anstofses $[\Theta_0]$ und der damit zusammenhängenden Gröfse der Amplitude $\eta$, vorausgesetzt, dafs beide Gröfsen hinreichend klein genommen werden. Unsere Schwingungen zeigen also dasselbe Verhalten, welches von den sogenannten kleinen Pendelschwingungen her bekannt ist und welches für die sogenannten „kleinen Schwingungen“ überhaupt charakteristisch ist.

Die kleinen Pendelschwingungen müssen sich natürlich als Spezial-

fall unter die Schwingungen des aufrechten Kreisels und zwar speziell eines Kreisels von verschwindendem Trägheitsmomente $C$ einordnen. Da das Pendel in vertikaler Lage nur stabil ist, wenn der Massenpunkt unter dem Aufhängepunkt liegt, müssen wir im Vorhergehenden $P < 0$ voraussetzen. Und zwar haben wir unter $m$ die schwingende Masse, unter $l$ die Pendellänge verstanden:

$$P = -mgl, \quad A = ml^2.$$

Die Formel (9) liefert daher, wegen $N = Cr = 0$:

$$4\omega = 2\pi\sqrt{\frac{A}{-P}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. die bekannte Gleichung für die Periode der vollen Pendelschwingung.

Wir wenden uns nun zu den instabilen Fällen, sowie zu den theoretisch stabilen, praktisch aber instabilen Fällen. Auch zur Beurteilung dieser Fälle können die obigen Näherungsformeln von Nutzen sein; wir müssen uns dabei nur gegenwärtig halten, daſs die Genauigkeit dieser Darstellung keine beliebige mehr ist, und müssen die Gröſse der möglichen Fehler nach den Ungleichungen (5') und (8') in jedem Falle abschätzen. Jedenfalls werden wir aus dieser (wenngleich mit endlichen Fehlern behafteten) Darstellung schlieſsen dürfen, daſs der qualitative Charakter der Bahnkurve im allgemeinen ein ähnlicher sein wird, wie in den stabilen Fällen, nur daſs die Dimensionen je nach dem Grade der Labilität sich vergröſsern und daſs im einzelnen quantitative Abweichungen von dem einfachen Sinusgesetz Platz greifen. Im groſsen und ganzen werden daher die Bahnkurven auch im labilen Falle, wie bereits pag. 324 hervorgehoben, Rosetten von ähnlicher Gestalt wie die vorhergehenden Figuren sein. Wollen wir die Bahnkurven in den labilen Fällen dagegen beliebig genau berechnen, so werden wir offenbar zu den elliptischen Integralen zurückgreifen müssen.

Natürlich müssen wir dabei nicht die für die Verhältnisse des stabilen Kreisels vereinfachte Näherungsformel (10), sondern die allgemeine Formel (4) zu Grunde legen. Insbesondere würde es ein grober Fehler sein, wenn wir die Schwingungsperiode $\omega$ aus der Gleichung (9) statt aus (3) entnehmen wollten. Die letztere Gleichung wird auch in den labilen Fällen ein vernünftiges Resultat liefern, welches um so brauchbarer ist, je kleiner sich der Fehler $\tau$ stellt. Die Gleichung (9) dagegen liefert ein ganz unsinniges Ergebnis. Es würde sich nämlich bei einem labilen Kreisel wegen $N^2 - 4AP < 0$ ein imaginärer Wert für $\omega$ berechnen. Es wäre offenbar eine handgreifliche Verdrehung des wahren Sachverhaltes, wenn man aus dieser Berechnung von $\omega$ schlieſsen wollte, daſs die Bewegung des instabilen Kreisels unperiodisch

verlaufe und die Kreiselspitze sich dementsprechend je länger je mehr von dem Nordpole entferne. Trotzdem findet man oft diesen gänzlich falschen Schlufs gemacht. Was aber noch viel merkwürdiger ist, es liefert diese Verdrehung, zum Prinzip erhoben, ein, wie wir später sehen werden, sehr fruchtbares Instrument, um über die Stabilität der Bewegungen ein vorläufiges Urteil zu gewinnen; man nennt dieses Verfahren die Methode der kleinen Schwingungen!

Ein ganz besonderes Interesse darf *die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels im Grenzfalle* $[\Theta_0] = 0$ beanspruchen. Wir wollen uns vorstellen, dafs wir der Figurenaxe in der aufrechten Anfangslage eine Reihe allmählich abnehmender Anstöfse erteilen, und wollen den Limes untersuchen, dem sich die Bahnkurve für $[\Theta_0] = 0$ nähert. Bei den allgemeinen Untersuchungen des folgenden Paragraphen wird diese Bewegung, wie wir schon jetzt bemerken, eine prinzipielle Rolle spielen.

Wir wollen uns zunächst fragen, inwieweit wir diese Bewegung durch unsere Annäherungsformeln beherrschen können. Wir bestimmen also den Fehler $\tau$ für den vorliegenden Fall und haben uns zu dem Zwecke ein Urteil über die Lage der Wurzeln $e$, $e'$ und $e''$ zu bilden. Die kleinste Wurzel $e$ wird durch denjenigen Parallelkreis gegeben, bis zu welchem die Kreiselspitze bei Hinzufügung eines in der Grenze verschwindenden Anstofses mindestens heruntersinkt. Dies ist nach der Fig. 54 von pag. 322 der Kreis $u = e = -1 + \frac{N^2}{2AP}$. Die nächstgröfsere Wurzel wird wegen der aufrechten Anfangslage $e' = 1$. Um die dritte Wurzel $e''$ zu finden, gehen wir auf den Ausdruck von $U$ in Gleichung (5') (vgl. pag. 318) zurück. Setzen wir hier $[\Theta_0] = 0$, so ergiebt sich

$$(13)\qquad \begin{cases} A^2 U = -N^2(1-u)^2 + 2AP(1-u)(1-u^2), \\ \qquad\;\; = 2AP(u-e)(1-u)^2. \end{cases}$$

Die dritte Wurzel wird also in diesem besonderen Falle mit der zweiten Wurzel identisch; wir haben

$$e'' = e' = 1.$$

Dann aber liefert die Ungleichung (5) wegen des verschwindenden Nenners als obere Grenze für den Fehler $\tau$ den Wert $\infty$! *In diesem Spezialfalle der instabilen Kreiselbewegung (aber auch nur in diesem) wird unsere angenäherte Darstellung, soweit sich dieses aus der Fehlerabschätzung beurteilen läfst, gänzlich unbrauchbar, indem die angegebene obere Grenze des Fehlers jeden beliebigen Betrag erreichen kann.*

Zum Glück wird aber auch gerade in diesem Spezialfalle die genaue

Darstellung so einfach, dafs wir unsere Näherungsformeln leicht entbehren können. Es zeigt sich nämlich, dafs die elliptischen Integrale in elementar ausführbare ausarten, entsprechend dem Umstande, dafs zwei unserer Verzweigungspunkte $e'$ und $e''$ zusammenrücken. Nach Gleichung (13) wird nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}} = \sqrt{\frac{A}{2P}} \int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}};$$

das Integral rechts drückt sich durch einen Logarithmus in folgender Weise aus:

$$\int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{1}{1-e} \lg \frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{u-e}}.$$

Infolgedessen wird mit Rücksicht auf den oben angegebenen Wert von $e$:

$$(14) \qquad t = \frac{A}{\sqrt{4AP-N^2}} \lg \frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{u-e}}.$$

Die Unterdrückung der Integrationskonstanten in dieser Formel kommt einer speziellen Festlegung der Anfangszeit gleich. Da die rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so bedeutet die Anfangszeit $t = 0$ denjenigen Moment, wo die Kreiselspitze den tiefsten Punkt passiert. Die Zeit wird also in Gleichung (14) (und zwar mit gutem Grunde) nicht wie bisher von dem Eintritt der Störung in der aufrechten Lage, sondern von der tiefsten Lage an gerechnet.

Dem Anstofse $[\Theta_0] = 0$ entsprechend wird die Ausgangsgeschwindigkeit der Kreiselspitze im Nordpole $\vartheta_0' = 0$ (wir haben ja allgemein $[\Theta] = A\vartheta'$). *In Übereinstimmung hiermit wird die Zeit, während welcher die Kreiselspitze von dem Nordpole bis zu dem Parallelkreis $e$ herabsinkt,* und welche wir nach Früherem mit $\omega$ zu bezeichnen haben, *geradezu unendlich grofs.* In der That liefert Gleichung (14) für diese Zeit, bez. für die in umgekehrtem Sinne gemessene Zeit, während welcher $u$ von $e$ bis 1 wächst, den Wert

$$\omega = \infty$$

Die explicite Darstellung der Bahnkurve verlangt ferner die Berechnung des Integrales für $\psi$. Wir setzen zu dem Zwecke in die allgemeine Formel

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$n \doteq N$ und tragen den Wert von $U$ aus Gleichung (13) ein. So ergiebt sich

$$\psi = \frac{N}{\sqrt{2AP}} \int \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Wiederum läfst sich das Integral auf elementarem Wege ausführen. Wir haben nämlich

$$\int \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} \frac{du}{\sqrt{u-e}}.$$

Das erste Integral rechts wurde bereits oben angegeben; das zweite liefert

$$\int \frac{1}{1+u} \frac{du}{\sqrt{u-e}} = \frac{2}{\sqrt{1+e}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Mithin ergiebt sich

$$(15) \qquad \psi = \frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{4AP-N^2}} \lg \frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{u-e}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{u-e}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u-e}}{\sqrt{1+e}}.$$

Da die ganze rechte Seite für $u = e$ verschwindet, so giebt unsere Formel direkt an, um wieviel der Winkel $\psi$ wächst, während die Kreiselspitze von dem unteren Parallelkreise $e$ ausgehend in die allgemeine Lage $u$ übergeht.

Die Gleichung (15) liefert uns die gesuchte Darstellung der Bahnkurve. Wir haben unsere Aufmerksamkeit namentlich auf den ersten Term der rechten Seite zu richten. Dieser wächst unaufhörlich, wenn $u$ sich der 1 nähert und wird für $u = 1$ logarithmisch unendlich. Der zweite Term kommt im Verhältnis zum ersten nicht wesentlich in Frage, weil er für $u = 1$ endlich bleibt. Die Gestalt der Bahnkurve ist daraufhin klar: *Unsere Kurve windet sich um den Nordpol unaufhörlich herum, indem sie sich ihm beständig nähert, ohne ihn jemals zu erreichen.* Wir haben im Wesentlichen eine *logarithmische Spirale* vor uns.

Die ungestörte aufrechte Bewegung stellt hiernach im Falle des schwachen Kreisels, wie man im Anschlusse an Poincarés Untersuchungen zur Himmelsmechanik sagt, eine *asymptotische Lösung des Kreiselproblems* dar, weil es eine Schaar von Bewegungen giebt, welche sich ihr asymptotisch nähern.

Verfolgen wir die Bahnkurve von dem Parallelkreise $e$ aus nach der anderen Seite, so erhalten wir einen dem soeben beschriebenen spiegelbildlich gleichen Ast, welcher gleichfalls dem Nordpole asymptotisch zustrebt. Die gesamte Bahnkurve besteht also in unserem Falle nicht, wie im allgemeinen, aus unendlich vielen, sondern nur aus zwei spiegelbildlich gleichen Teilbögen.

*Trotzdem schliefst sich unsere aperiodische Spiralkurve in gewissem Sinne stetig an die periodischen Bahnkurven bei von Null verschiedenem Anstofse an.* Wir haben uns vorzustellen, dafs bei abnehmendem $[\dot{\Theta}_0]$ die Durchlaufungsdauer und die Spannweite jedes einzelnen der unendlich vielen Teilbögen gröfser und gröfser wird, und dafs gleichzeitig auch

die Anzahl von Malen, mit der sich der Teilbogen um den Nordpol herumschlingt, unbegrenzt zunimmt. *Nach der anderen Seite hin, d. h. nach der Seite der aufrechten Kreiselbewegung selbst, ist der Übergang von unserer spiraligen Grenzkurve zu der instabilen gleichförmigen Rotation natürlich ein völlig diskontinuierlicher.* In der That ändert sich die punktförmige Bahnkurve der aufrechten Kreiselbewegung unvermittelt sprungweise in die spiralige Grenzkurve ab, wenn wir erstere durch einen Anstofs stören und diesen Anstofs zu Null abnehmen lassen.

Hier ordnet sich auch ein spezieller Fall der gewöhnlichen Pendelbewegung ein. Wenn wir nämlich einen nicht aufgezogenen Kreisel ($N=0$), d. i. ein Pendel, bei senkrecht über dem Unterstützungspunkte gelegenem Schwerpunkt anstofsen, so schwingt die Spitze von dem höchsten durch den tiefsten Punkt der Kugel hindurch und beschreibt einen gröfsten Kreis. Wenn wir den Anstofs immer mehr zu Null abnehmen lassen, bleibt die Bahnkurve ungeändert dieselbe. Nur die Geschwindigkeit im höchsten Punkte wird in der Grenze Null, die Schwingungsdauer unendlich. Dementsprechend liefern unsere Formeln in diesem Falle

$$e = -1, \quad \psi = \text{const.}$$

Die nächstfolgende (in orthographischer Projektion hergestellte) Figur 58 ist für die besonderen Werte

$$A = P = 1, \quad N = \sqrt{2}$$

entworfen, in welchem Falle $e = 0$ wird und die Gleichung der Bahnkurve sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\psi = \frac{1}{2} \lg \frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} + \operatorname{arctg} \sqrt{u}.$$

Bei dem kräftefreien dreiaxigen Körper ist eine entsprechende asymptotische Bewegung seit Poinsot bekannt (vgl. oben pag. 132, Anm.). Für den schweren symmetrischen Kreisel hat A. G. Greenhill*) die elementare Berechenbarkeit dieser Bahn erkannt, ohne aber deren gestaltlichen asymptotischen Charakter zu erwähnen.

Im Anschlufs an die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bringen wir einen Nachtrag zu der früheren Behandlung der *pseudoregulären Präcession*, bei welcher der Fall unerledigt blieb, wo die Bahnkurve der Kreiselspitze in nächster Nähe des Nordpols verlief. Dies nehmen wir jetzt an; es sollen also die Parallelkreise $e$ und $e'$ ($e < e'$) sehr wenig von einander und von 1 verschieden sein. Aufserdem sollen die für die pseudoreguläre Präcession charakteristischen Bedingungen gelten, wonach der Impuls nahezu in Richtung der Figurenaxe fallen und eine

*) Applications of elliptic functions, London 1892, pag. 243, § 226 E.

beträchtliche Länge ($N^2$ grofs gegen $AP$) haben soll. Wir werden vermuten dürfen, dafs die Bewegung ähnlich verlaufen wird, wie die Bewegung des aufrechten starken Kreisels bei hinreichend kleinem Anstofs, was wir analytisch bestätigen werden.

Da wir wieder unsere Näherungsformeln verwenden wollen, prüfen wir zunächst deren Genauigkeitsgrad. Die Formel für $u$ giebt, wie wir wissen, eine beliebige Genauigkeit, wenn die obere Grenze des Fehlers $\tau$

$$\sqrt{\frac{e''-e}{e''-e'}}-1$$

beliebig klein ausfällt. Hierzu genügt noch nicht, dafs $e$ und $e'$ hinreichend wenig verschieden sind, sondern es kommt noch die weitere Bedingung hinzu, dafs $e''$ den Werten $e$, $e'$ nicht sehr nahe liegen darf. Wir müssen uns also ein Urteil über die Gröfse von $e''$ bilden.

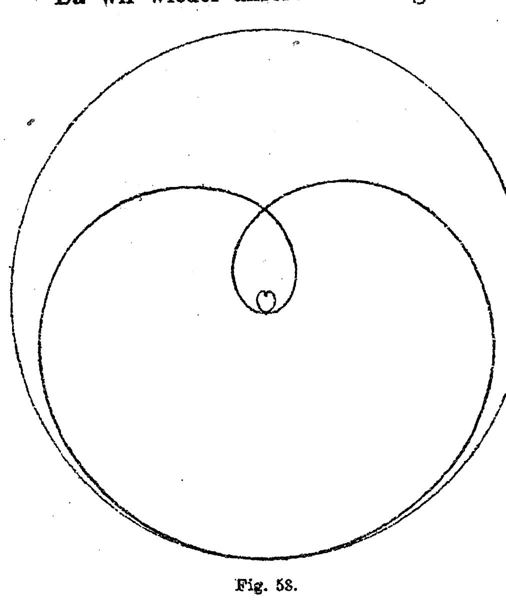


Fig. 58.

Nach Gleichung (9) von pag. 273 wird

$$e''=\frac{n^2+N^2-2nNe}{2AP(1-e^2)}-e';$$

nähert sich $e$ immer mehr der 1, so nähern sich auch die Werte $n$ und $N$ einander; es verschwindet also Zähler und Nenner gleichzeitig, so dafs eine besondere Untersuchung nötig wird. Wir gehen auf den ursprünglichen Ausdruck von $U$ (s. Gleichung (7′) von pag. 238) zurück. Tragen wir hier $u=e$ ein, so wird

$$(Ne-n)^2=(k-N^2-2APe)(1-e^2)$$

oder

$$\frac{n^2+N^2-2nNe}{1-e^2}=k-2APe.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat eine einfache mechanische Bedeutung; es war nämlich (s. Gleichung (3) von pag. 219)

$$k=|i|^2+2AP\cos\vartheta;$$

mithin ist die fragliche Gröfse direkt gleich $|i|_e^2$, d. h. gleich dem Quadrat der Länge des Impulses in der Anfangslage $e$. Nach Voraus-

setzung ist diese Gröfse im Verhältnis zu $AP$ eine sehr grofse Zahl und wenig von $N^2$ verschieden. Hieraus folgt, dafs $e''$ ebenfalls einen grofsen Zahlenwert besitzt und dafs wir, gerade so wie bei der aufrechten Bewegung, näherungsweise setzen können

$$(16) \qquad e'' = \frac{N^2 - 2AP}{2AP},$$

wobei $|i|_e^2$ durch $N^2$ und $e'$ durch 1 ersetzt ist.

Die Näherungsformel (8') von pag. 272 für $u$ besitzt also auch in diesem Falle der pseudoregulären Präcession eine beliebig hohe Genauigkeit. Wir schreiben dementsprechend

$$(17) \quad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin\frac{\pi t}{\omega} = u_0 + \delta, \\ u_0 = \frac{e' + e}{2}, \quad \varepsilon = \frac{e' - e}{2}, \quad \omega = \pi\sqrt{\frac{A^2}{N^2 - 4AP}}, \quad \delta = \varepsilon \sin\frac{\pi t}{\omega}. \end{cases}$$

Gröfsere Weiterungen verursacht die Herstellung einer geeigneten Näherungsformel für $\psi$. Wir haben

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)}\,dt = \int \frac{n-N}{2A(1-u)}\,dt + \int \frac{n+N}{2A(1+u)}\,dt = \psi_1 + \psi_2.$$

Die Berechnung von $\psi_2$ macht keine Schwierigkeit. Benutzen wir die Identität

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u_0+\delta} = \frac{1}{1+u_0} - \frac{\delta}{(1+u_0)^2} + \frac{\delta^2}{(1+u_0)^2(1+u)},$$

so wird näherungsweise

$$(18) \qquad \psi_2 = \frac{n+N}{2A(1+u_0)}\,t + \frac{(n+N)}{2A(1+u_0)^2}\cdot\frac{\omega\varepsilon}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi t}{\omega}.$$

Das fortgelassene Restglied ist, wie man sich leicht überzeugt, im Verhältnis zu den beibehaltenen Gliedern bei hinreichend kleinem $\varepsilon$ allemal beliebig klein.

Bei der Berechnung von $\psi_1$ nützt uns die vorherige Entwickelung nichts, weil dabei die als klein vorausgesetzte Gröfse $1 - u_0$ in den Nenner treten und die Abschätzung des Fehlers illusorisch machen würde. Wir sind daher auf die wirkliche Ausführung der Integration angewiesen.

$\psi_1$ hat, wenn wir für $u$ den Wert aus Gleichung (17) benutzen, die Form:

$$\psi_1 = c\int \frac{dt}{a - \sin\alpha t}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\omega}, \quad a = \frac{1-u_0}{\varepsilon} > 1, \quad c = \frac{n-N}{2A\varepsilon}.$$

Die Integration liefert, wie man verificieren kann,

$$(19) \qquad \psi_1 = \frac{-c}{\alpha\sqrt{a^2-1}}\,\operatorname{arctg}\frac{1 - a\sin\alpha t}{\sqrt{a^2-1}\cos\alpha t}.$$

Wir werden hier also auf eine kompliciertere Abhängigkeit von $t$ geführt, welche sich nicht, wie in der für $\psi_2$ gegebenen Formel, unmittelbar in ein der Zeit proportionales und ein periodisches Glied zerlegt. Auf die Fehlerabschätzung werden wir hier der Kürze halber nicht eingehen.

Zunächst wollen wir unsere letzte Formel mit der früheren Darstellung der pseudoregulären Präcession und der aufrechten Kreiselbewegung in Zusammenhang bringen. Bei der pseudoregulären Präcession mit nicht verschwindendem Präcessionskreise ist $1 - u_0$ von Null verschieden und $a$ wegen des kleinen Nenners $\varepsilon$ sehr grofs. Infolgedessen geht das Argument des Arcus-Tangens über in $\operatorname{tg} \alpha t$ und die Formel $\psi_1$ in

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - 1}}\, t = \frac{n - N}{2A(1 - u_0)}\, t.$$

Dieser Term, zusammen mit dem ersten Gliede in (17), bestimmt die mittlere Präcessionsgeschwindigkeit bei der pseudoregulären Präcession in der früher (pag. 302) angegebenen Weise.

Sehen wir andrerseits zu, was Gleichung (19) bei der aufrechten Bewegung giebt, wo die Bahnkurve durch den Nordpol der Einheitskugel hindurchzieht. Hier wird $e' = 1$ und $1 - u_0 = \varepsilon$. Mithin haben wir $a = 1$. Das Argument des Arcus-Tangens nimmt in diesem Falle nur die drei Werte $+\infty$, $-\infty$ und $0$ an. Im allgemeinen ist sein Wert $\pm\infty$, je nach dem Vorzeichen von $\cos \alpha t$; in denjenigen Momenten aber, wo $\alpha t = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ wird, d. h. (vgl. Gleichung (17)), wo die Kreiselspitze den Nordpol passiert, springt das Argument von $+\infty$ durch $0$ nach $-\infty$; der Wert des Arcus-Tangens vermehrt sich dabei sprungweise um $-2\pi$. (Um dieses einzusehen, mufs man allerdings nicht den Grenzfall $a = 1$ selbst, sondern ein $a > 1$ betrachten.) In der Gleichung (7) von pag. 330, durch welche wir die $\psi$-Koordinate bei der aufrechten Bewegung darstellten, kam diese sprungweise Änderung nicht zum Ausdruck. Vielmehr giebt diese Gleichung nur den einen Bestandteil $\psi_2$ (und zwar nur das erste Glied desselben) wieder. Dagegen lehrt ein Blick auf die Figuren 55—57 die Bedeutung des in Rede stehenden Termes verstehen. Beim Passieren des Nordpols wächst $\psi$ in der That notwendigerweise momentan und zwar um $\pi$, da sich die Bahnkurve durch den Nordpol hindurch mit stetiger Tangente fortsetzt. Gleichzeitig schliefsen wir daraus, dafs der (sonst nicht ganz leicht zu bestimmende) Grenzwert des Faktors:

$$\frac{c}{\alpha\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{(n - N)\pi}{2\pi A\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2}}$$

für $1 - u_0 = \varepsilon$ und $n = N$ gleich $\frac{1}{2}$ sein wird. Diesen Grenzwert wollen wir auch im Falle, dafs die Bahnkurve nicht genau durch den Nordpol hindurchgeht, benutzen, und für (19) einfacher schreiben:

$$(19') \qquad \psi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi}{\omega} t}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi}{\omega} t}.$$

*Die definitiven Formeln zur Beschreibung einer pseudoregulären Präcession von sehr kleinem Präcessionskreise* **werden daher nach (17), (18) und (19′) die folgenden:**

$$(20) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \varepsilon \sin \frac{\pi t}{\omega}, \\ \psi = \frac{n + N}{2A(1 + u_0)} t + \frac{n + N}{2A(1 + u_0)^2} \frac{\omega \varepsilon}{\pi} \cos \frac{\pi t}{\omega} \\ \qquad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon - (1 - u_0) \sin \frac{\pi t}{\omega}}{\sqrt{(1 - u_0)^2 - \varepsilon^2} \cos \frac{\pi t}{\omega}}. \end{cases}$$

Der Vergleich unserer Bewegung mit der aufrechten Kreiselbewegung giebt uns ein deutliches Bild von dem Ursprung des Termes $\psi_1$. Der plötzliche Sprung der $\psi$-Koordinate im Falle der aufrechten Bewegung mufs sich bei unserer pseudoregulären Präcession in eine stetige, aber eventuell sehr schnelle Änderung auflösen, welche jedesmal dann eintritt, wenn die Kreiselspitze dem Nordpole sehr nahe rückt. Es ist begreiflich, dafs diese ausnahmsweise Änderung des Azimuthes sich dem Schema von Präcession und Nutation nicht ohne Weiteres anpafst. Dementsprechend sehen wir, dafs der allgemeine Charakter der Gleichungen zur Darstellung der pseudoregulären Präcession gegen früher erheblich verändert ist. Im Anhang zu Heft IV (pag. 946) wird aber gezeigt, dafs wir trotzdem *die Bewegung wie früher in eine reguläre Präcession und eine einfache harmonische Schwingung auflösen können.*

Einer ähnlichen Modifikation würden natürlich auch die Gleichungen bedürfen, durch welche wir die Nachbarbewegungen der regulären Präcession dargestellt haben, falls letztere in nächster Nähe des Nordpols stattfindet. *Auch hier würde sich die Spaltung der Bewegung in eine mittlere Präcession und eine darüber gelagerte Nutation nur durch nicht ganz einfache Umrechnung ausführen lassen.*

Trotz des formalen Unterschiedes in der Gestalt der Gleichungen bleiben in der Tat wesentliche Eigenschaften der allgemeinen pseudoregulären Präcession erhalten.

Wir sahen bereits, daſs sich die Zeitdauer $\omega$ eines Überganges von dem einen zu dem anderen Begrenzungskreise auch jetzt durch die Näherungsformel (17)

$$\omega = \sqrt{\frac{A^2}{N^2 - 4AP}}\,\pi,$$

darstellen läſst, welche mit Gleichung (15′) von pag. 305 identisch ist.

Ferner berechnen wir nach (20) die Gröſse $2\psi_\omega$, d. h. die Änderung des Azimuthes $\psi$ während zweier aufeinanderfolgender Übergänge. Der Arcus Tangens wächst während dessen um $-2\pi$, der Winkel $\psi$ daher um

$$2\psi_\omega = \frac{n+N}{2A(1+u_0)}\,2\omega - \pi.$$

Hier gehen wir noch zur Grenze $u_0 = 1$, $n = N$ über, welche der aufrechten Bewegung entspricht und erhalten:

$$2\psi_\omega = \frac{N}{A}\,\omega - \pi.$$

Setzen wir für $\omega$ den eben angegebenen Wert ein und entwickeln diesen, indem wir von $\frac{AP}{N^2}$ wie früher bei der pseudoregulären Präcession nur die erste Potenz beibehalten, so ergiebt sich schlieſslich:

$$2\psi_\omega = \left\{\left(1 - \frac{4AP}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\}\pi = \frac{2AP}{N^2}\,\pi.$$

Dieser Wert stimmt genau mit demjenigen überein, den wir bei der gewöhnlichen pseudoregulären Präcession aus Gleichung (11) von pag. 303 berechnen würden.

Für die Anwendungen (insbesondere für die Ballistik) haben die pseudoregulären Präcessionen von sehr kleinem Präcessionskreise eine gewisse Bedeutung, weshalb ihre nachträgliche Erledigung an dieser Stelle geboten schien.

## § 6. Allgemeines über die Stabilität und Labilität der Bewegungen.

Aufgabe dieses Paragraphen soll es sein, unsere bereits mehrfach angewandte Begriffsbestimmung der stabilen und labilen Bewegungen zu verschärfen und gegen andere Definitionen dieses Begriffes abzuwägen. Das Beispiel des Kreisels wird uns dabei einen geeigneten Ausgangspunkt für allgemeinere Betrachtungen liefern.

Am frühesten kommt ein Stabilitätsbegriff bewegter Systeme in der astronomischen Mechanik vor. Er spielt bereits bei Laplace eine bekannte wichtige Rolle, der seine Scheinbeweise für die Stabilität des Planetensystems gab.*) Und zwar nennt man nach Laplace ein Punkt-

*) Vgl. z. B. Jacobis vierte Vorlesung über *Dynamik.*

system stabil, wenn im Laufe der Zeit kein Punkt sich ins Unendliche entfernen kann. Wie man sieht, ist dieser Stabilitätsbegriff speziell auf die Bedürfnisse der Astronomie und die Verhältnisse bei einem nicht starren Punktaggregate zugeschnitten. Er hat mit dem, was wir im Folgenden als Stabilität bezeichnen werden, sehr wenig zu thun.

Vom physikalischen Standpunkte aus hat wohl zuerst*) Lord Kelvin auf die Stabilitätsfragen aufmerksam gemacht. Es giebt nach ihm „kaum eine für die Naturerkenntnis wichtigere mechanische Frage wie die nach der Stabilität und Labilität der Bewegungen."**) Seitdem werden diese Dinge von zahlreichen namentlich englischen Autoren behandelt. Die hier gewöhnlich zu Grunde gelegte Definition der Stabilität entnehmen wir der Preisschrift von Herrn E. J. Routh, *On the stability of a given state of motion.****) Nach Routh soll die Bewegung eines Systems *stabil* heifsen, *wenn bei einer beliebigen aber kleinen Störung die Abweichung zwischen den zu gleichen Zeiten Platz greifenden Lagenkoordinaten des Systems in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung dauernd klein bleibt.* (Unter einer „kleinen" Gröfse wird dabei eine solche verstanden, „deren Quadrat vernachlässigt werden kann".)

Wir haben zunächst das Wort „Störung" näher zu präzisieren. Wir verstehen darunter zunächst den *Inbegriff der Differenzen zwischen den Anfangswerten der Impulskoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung.* Hierbei müssen wir uns allerdings bezüglich dessen, was bei einem beliebigen mechanischen System unter den Impulskoordinaten verstanden werden soll, auf spätere Ausführungen berufen.

Es liegt nun nahe, an der mitgeteilten Definition eine durch die Forderungen moderner Strenge gebotene Modifikation vorzunehmen. Wir werden lieber, statt von *kleinen*, von *beliebig kleinen* Störungen und Abweichungen sprechen. Damit knüpfen wir an die wohlfundierten Grundbegriffe der Differentialrechnung, speziell den Grenzbegriff, an.

Gleichzeitig sondern wir durch diese Modifikation die in unserem Beispiel von pag. 325 als *praktisch stabil* bezeichneten Fälle von den *theoretisch stabilen* ab. Bei den praktisch stabilen, theoretisch labilen Fällen der aufrechten Kreiselbewegung war nämlich die Abweichung der Kreiselspitze von ihrer Anfangslage (infolge besonderer Wahl der Konstanten $A$, $P$ und $N$) dauernd klein; sie konnte aber nicht (durch

---

*) In der ersten Auflage der Natural Philosophy, 1867.

**) Vgl. Thomson und Tait: Natural Philosophy, art. 346, Vol. I pag. 416.

***) London 1877, vgl. Kap. I, art. 1, sowie das Lehrbuch desselben Autors, *Rigid Dynamics*, Part II, art. 256 und 257.

Verkleinerung der Störung) beliebig klein gemacht werden. Nach der vorangestellten Routhschen Definition würden diese Fälle daher zu den stabilen, nach Anbringung der vorgeschlagenen Modifikation aber zu den instabilen zu rechnen sein. Ob letzteres oder ersteres an sich vorzuziehen sei, bleibe dahin gestellt. Jedenfalls aber wird die exakte Handhabung der Stabilitätsdefinition durch die Forderung *beliebiger* Kleinheit von Störung und Abweichung, d. h. durch die Beschränkung auf *theoretische* Stabilität, erleichtert. Der Ausdruck praktisch instabil ist zuerst von W. Gibbs 1876 gebraucht.*)

Wir erwähnen sogleich noch eine zweite Modifikation, welche wir vorschlagen möchten. Die obige Definition verlangt, dafs die Abweichungen zwischen den Lagen-*Koordinaten* des Systems klein seien (bez. beliebig klein gemacht werden können). Die Auswahl des Koordinatensystems aber ist, zumal vom Standpunkte der allgemeinen Lagrangeschen Mechanik, ganz in unsere Willkür gegeben. Es ist sehr wohl möglich, dafs die Abweichungen zwischen den Lagenkoordinaten bei einer gewissen Wahl des Koordinatensystems im Verlaufe der Bewegung beliebig klein bleiben, bei einer anderen beliebig grofs werden — sofern wir nicht die Wahl des Koordinatensystems gewissen Beschränkungen unterwerfen, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen können. *In der obigen Fassung betrifft also die Stabilitätsdefinition genau genommen eine mechanisch gegenstandslose Eigenschaft der Bewegung, welche vom Koordinatensystem nicht unabhängig ist.*

Es ist leicht diesen Übelstand zu beseitigen. Wir müssen nicht von den *Abweichungen der Lagenkoordinaten*, sondern von den *Abweichungen der Lagen des Systems* sprechen. Diese nennen wir beliebig klein, wenn die Entfernungen der Orte jedes einzelnen Systempunktes bei der einen und bei der anderen Bewegung in entsprechenden Zeitmomenten beliebig klein sind. Die Entfernung zweier Punkte aber ist ein von der Koordinatenauswahl unabhängiger Begriff.

Um auch bei der Gröfsenabschätzung der Störung vom Koordinatensystem unabhängig zu sein, können wir uns den Gesamtimpuls des Systems in die zu jedem einzelnen Massenpunkte gehörigen Einzelimpulse aufgelöst denken, welche jederzeit aus Masse und Geschwindigkeit des Punktes bestimmt werden können. Die Störung wird alsdann beliebig klein heifsen, wenn die Abweichungen zwischen den zu jedem Systempunkte gehörigen Einzelimpulsen im Anfange der ursprünglichen und der gestörten Bewegung unterhalb einer beliebig vorzuschreibenden Grenze liegen.

Darauf hin werden wir die Routhsche Definition der Stabilität

*) Connecticut Academy, vgl. die deutsche Ausg. von Ostwald, Leipz. 1892, p. 94.

folgendermaſsen präzisieren können: *Eine Bewegung heiſse stabil, wenn die aus einer Störung resultierenden Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems dadurch dauernd unter eine gegebene Grenze herabgedrückt werden können, daſs man die Gröſse der Störung unterhalb einer geeignet zu bestimmenden Grenze wählt.*

Wir wollen diese Definition eingehend auf ihre Zweckmäſsigkeit prüfen.

Vom rein logischen Standpunkte aus ist natürlich jede Definition zulässig, welche nicht mit sich selbst im Widerspruch ist und der überhaupt irgendein Objekt in der Wirklichkeit entspricht. Vom naturwissenschaftlichen Standpunkte aus aber müssen wir von einer Stabilitätsdefinition mehr verlangen als ihre bloſse innere oder äuſsere Widerspruchslosigkeit. Allgemein verbindet man nämlich mit dem Worte „instabil" die Auffassung eines ausnahmsweisen und turbulenten Vorganges. Wir werden daher, um dieser Auffassung gerecht zu werden, von unserer Definition verlangen müssen, daſs keine durchaus reguläre und gewöhnliche Bewegung unter den Begriff der instabilen, keine augenscheinlich irreguläre unter den der stabilen Vorgänge falle.

Es soll nun an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, daſs unter diesem Gesichtspunkte die obige Definition der Stabilität ungeeignet ist. Die betreffenden Beispiele entnehmen wir zum Teil der Theorie des Kreisels, zum Teil den einfachsten Problemen der Punktmechanik.

Betrachten wir zunächst die reguläre Präcession und die benachbarten Bewegungen, wie im § 1 dieses Kapitels. Hier konstatieren wir aus dem Anblick der Fig. 47, daſs die abgeänderte Bahnkurve dauernd in der Nähe der ursprünglichen verläuft; und zwar gilt dieser Sachverhalt für jede beliebige Art der Störung.

Anders liegt die Sache, wenn wir nicht nur die räumliche Gestalt der Bahnkurve, sondern auch, wie es die obige Stabilitätsdefinition verlangt, das Tempo berücksichtigen, in welchem sie von der Kreiselspitze durchlaufen wird. Wir sahen pag. 287, daſs bei der abgeänderten Bewegung die mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{n - N u_0}{A(1 - u_0^2)}$$

von der Präcessionsgeschwindigkeit

$$\frac{n - N e}{A(1 - e^2)}$$

bei der ursprünglichen Bewegung im allgemeinen, d. h. immer dann, wenn der Anstoſs nicht gerade die Knotenlinie zur Axe hat, verschieden ist, allerdings um so weniger, je kleiner wir den Anstoſs wählen. Diese

Verschiedenheit genügt aber, um im Laufe der Zeit eine endliche Differenz zwischen der Lage der Kreiselspitze in den beiden verglichenen Fällen der Bewegung herbeizuführen Wir können direkt ein (mit abnehmender Störung natürlich wachsendes) Zeitintervall $t$ bestimmen, nach dessen Ablauf die Differenz der $\psi$-Werte bei unseren beiden Bewegungen beispielsweise gröfser als $\frac{\pi}{2}$ wird.

Wollten wir dieses vermeiden, so müfsten wir den Charakter der Störung der besonderen Bedingung unterwerfen, dafs lediglich die $[\Theta]$-Komponente des Impulses bei der Störung alteriert wird. Das wäre aber eine willkürliche Festsetzung, welche in der bisherigen Definition nicht vorgesehen ist.*) Überdies würde auch dann noch die abgeänderte Präcessionsgeschwindigkeit mit der ursprünglichen (vgl. pag. 320) nur bis auf Gröfsen übereinstimmen, welche der zweiten Potenz der Störung $[\Theta_0]$ proportional sind. Bei entsprechender Vergröfserung des Zeitintervalles $t$ können wir auch in diesem Falle eine beliebige endliche Differenz in den gleichzeitigen Werten der $\psi$-Koordinate bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung konstatieren.

*Hiernach ist klar, dafs nach dem Wortlaut unserer obigen Definition die allereinfachste Bewegung des Kreisels, die reguläre Präcession, als instabil zu bezeichnen wäre.*

Entsprechendes gilt in erhöhtem Mafse von den allgemeinen Bewegungen des Kreisels. Hier bleibt bei einem hinreichend kleinen Anstofse nicht einmal die Bahnkurve der Kreiselspitze ihrer Gestalt nach dauernd in beliebiger Nähe der ursprünglichen. In der That ändert sich bei einer Abänderung des Impulses im allgemeinen (vgl. die Figuren 29—35 des vorigen Kapitels) auch die Spannweite der Teilbögen, sowie die Zeit, in welcher letztere durchlaufen werden. Allerdings können diese Änderungen beliebig klein gemacht werden, wenn wir die Impulsänderung hinreichend klein wählen. Wenn wir aber nur einen genügend grofsen Zeitraum in Betracht ziehen, entstehen aus solchen beliebig kleinen Anderungen beliebige endliche Differenzen zwischen entsprechenden Lagen der Kreiselspitze. *Wollten wir also an der obigen Definition festhalten, so müfsten wir die sämtlichen Bewegungen des Kreisels schlechtweg für instabil erklären.* Dies trifft insbesondere auch für die aufrechte Bewegung des starken Kreisels zu, wenn wir die Koordinate $\chi$ berücksichtigen und eine Abänderung der Impulskomponente $N$ zulassen oder ganz allgemein dann, wenn wir auch

---

*) In Wirklichkeit wird eine solche Festsetzung bei den englischen Autoren allerdings meist nachträglich eingeführt. Vgl. den folgenden Paragraphen.

solche Abweichungen mit in Rechnung setzen, welche der zweiten Potenz der Störung proportional sind (vgl. pag. 320).

Um auch noch ein Beispiel aus der Mechanik des einzelnen Massenpunktes zu nennen, betrachten wir mit Herrn Appell*) die kreisförmige Bewegung eines Massenpunktes in einer festen Ebene unter dem Einflusse einer anziehenden Centralkraft von dem Wirkungsgesetze $r^n$. Es zeigt sich, dafs bei einer Störung die abgeänderte Bahnkurve *dauernd* dem ursprünglichen Kreise bei hinreichend kleinem Anstofs beliebig nahe bleibt, falls $n > -3$ ist. Anders die Lage des Punktes auf der Bahnkurve. Diese wird offenbar nur dann für die Dauer der Bewegung wenig geändert werden, wenn der Zusatzstofs keine Komponente in Richtung der ursprünglichen Bahn hat, wenn also der Zusatzstofs die Geschwindigkeit des Punktes ungeändert läfst. Hr. Appell sieht sich daher auf Grund der obigen Definition genötigt, die Bewegung des Punktes auch im Falle $n > -3$ für instabil zu erklären.

Die genannten Mifsstände kann man teilweise vermeiden, wenn man prinzipiell nur solche Impulsänderungen zuläfst, welche die Energie des Systems nicht verändern. In dem Werke von Thomson und Tait wird eine derartige Störung als „konservativ" bezeichnet, und die Beschränkung auf konservative Störungen sogleich in die Stabilitätsdefinition aufgenommen.**) Bei dieser Modifikation des Stabilitätsbegriffes wird in dem zuletzt genannten Beispiele die kreisförmige Bahn im Falle $n > -3$ für stabil zu erklären sein***); überhaupt wird so das Auftreten „säkularer Störungen", wie man die mit der Zeit wachsenden Abweichungen der abgeänderten von der ursprünglichen Lage nennen kann, in vielen Fällen vermieden (wenigstens insoweit, dafs diese säkularen Glieder nur noch von der Gröfsenordnung der zweiten Potenz der Impulsänderung sind).

Es bleiben aber noch genug andere Übelstände bestehen. Betrachten wir z. B. die kräftefreie Bewegung des einzelnen Massenpunktes nach dem Galileischen Trägheitsgesetze. Werden wir uns entschliefsen können, diese sozusagen regulärste aller Bewegungen für instabil zu erklären? Nach dem Wortlaute der üblichen Definition müfsten wir es thun. Denn die durch einen Zusatzstofs abgeänderte Bewegung des Punktes, welche beim Fehlen äufserer Kräfte wieder eine gleichförmige und geradlinige ist, entfernt sich von der ursprünglichen Bahn mehr und mehr, wie klein wir auch die Störung bemessen mögen.

---

*) Mécanique rationelle, t. II, art. 458.

**) Natural Philosophy, art. 346, 347.

***) Natural Philosophy, art. 350.

Wir ziehen ferner das interessante Beispiel der geodätischen Linien heran, d. h. der kräftefreien Bahnen eines einzelnen Massenpunktes, welcher gezwungen wird, auf einer irgendwie gekrümmten Fläche zu bleiben. Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Krümmung der Fläche (im Gaussischen Sinne) positiv oder negativ ist. Lassen wir unsern Massenpunkt auf einer Fläche von negativer Krümmung laufen (z. B. auf einem einschaligen Hyperboloid) und erteilen ihm einen kleinen Stofs, so entfernt sich die so gestörte Bahn von der ursprünglichen immer mehr; wir können keine Grenze angeben, unterhalb deren die Gröfse des Stofses liegen müfste, damit die Entfernung des Punktes bei der abgeänderten Bewegung von der entsprechenden Lage bei der ursprünglichen Bewegung unter einer vorgegebenen Grenze bleibe. Hiernach müfsten wir alle geodätischen Bahnen auf Flächen negativer Krümmung mit Thomson und Tait*) als instabile Bahnen bezeichnen. Auf den Flächen von positiver Krümmung andrerseits sind geodätische Bahnen, welche im Sinne der obigen Definition stabil zu nennen sind, jedenfalls denkbar. Man zeigt nämlich, dafs, wenn man auf einer solchen Fläche von irgend einem Punkte aus zwei geodätische Linien konstruiert, welche sich in ihrer Anfangsrichtung unendlich wenig unterscheiden, diese sich fortgesetzt schneiden müssen, in Intervallen, die je nach der Gröfse des Krümmungsmafses verschieden sind. Betrachten wir also eine dieser beiden Linien als die ursprüngliche Bahn unseres Massenpunktes, die andere als die durch eine Störung abgeänderte, so wird die erstere beständig um die letztere *herumoscillieren.* Können wir ferner nachweisen, dafs die Amplitude der Oscillationen mit wachsender Zeit nicht systematisch zunimmt, so werden wir bei Beschränkung auf konservative Störungen die Bahnkurve auch nach der obigen Definition für stabil erklären können.**)

Alles in allem werden wir aber sagen müssen: *Die obige Stabilitätsdefinition, nach welcher eine dauernde Kleinheit der Abweichungen verlangt wird, ist zu eng. Sie verweist unter anderem die allereinfachsten*

---

*) l. c. art. 355, wo man auch die äufserst einfachen Beweise der im Text genannten Sätze über geodätische Linien nachlesen wolle.

**) Thomson und Tait, l. c., art. 355. Der Schlufs auf die (im Sinne der Autoren gemeinte) Stabilität der Bahnkurve ohne vorherige Untersuchung der Oscillationsamplitude scheint allerdings voreilig. In der That sind z. B. auf dem Rotationsellipsoid die Meridiane im Thomsonschen Sinne instabile Bahnen: Bei Hinzufügung eines seitlichen Anstofses gehen sie in ungeschlossene Kurven über, welche abwechselnd einen in der Nähe des Nordpols und einen in der Nähe des Südpols gelegenen Parallelkreis berühren und das Ellipsoid mit einer von $2\pi$ verschiedenen Spannweite umschlingen. Verfolgen wir eine solche Kurve weit genug, so entfernt sie sich von dem ursprünglichen Meridiane mehr und mehr.

*und regulärsten Bewegungen (Galileische Trägheitsbewegung!) in die Klasse der instabilen Bewegungen, was der natürlichen Auffassung des Wortes widerspricht.*

Man könnte versuchen, die obige Definition im wesentlichen beizubehalten und sie nur darin abzuändern, dafs man die Kleinheit der Abweichungen nicht für jeden beliebigen, sondern für einen begrenzten Zeitraum fordert. Man würde dann die Stabilität durch folgendes Postulat definieren:

*Es soll möglich sein, die Störung so klein zu wählen, dafs für einen gegebenen Zeitraum $t < T$ die Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung unterhalb einer vorgegebenen Grenze bleiben.*

Auf Grund dieser Definition würde die Galileische Trägheitsbewegung, die geodätischen Bahnen auf dem Hyperboloid, die allgemeine Kreiselbewegung u. s. w. sofort in die Kategorie der stabilen Bahnen einrücken. Es würden sich aber Übelstände anderer Art ergeben. Es würden nämlich Bewegungen von so zweifellos irregulärem Charakter wie die aufrechte Rotation des schwachen Kreisels für stabil erklärt werden müssen.

Rufen wir uns zunächst das Verhalten des schwachen Kreisels im Grenzfalle eines unendlich abnehmenden Anstofses ($\lim [\Theta_0] = 0$) ins Gedächtnis zurück. Unsere frühere Untersuchung zeigte, dafs die Kreiselspitze in diesem Grenzfalle allerdings nicht in beliebiger Nähe des Nordpols bleibt, dafs aber ihre Geschwindigkeit im Nordpole selbst gleich Null ist. Und zwar wurde die Zeit $\omega$, während welcher die Kreiselspitze in Fig. 58 von einem beliebigen Punkte der Spirale bis in den Nordpol gelangt, unendlich grofs.

Hiernach übersieht man das Verhalten der Kreiselspitze bei einem von Null verschiedenen aber aufserordentlich kleinen Anstofse $[\Theta_0]$.

Die Bahnkurve ist dann keine Spirale, aber sie wird den Nordpol immerhin noch einige Male in nächster Nähe umkreisen; die Geschwindigkeit $\vartheta'$, mit welcher sie aus dem Nordpole herausrückt, ist nicht gleich Null, aber immerhin aufserordentlich klein.

Sicherlich können wir nun für den Anstofs $[\Theta_0]$ eine obere Grenze so festsetzen, dafs bei jedem kleineren Anstofse für jede Zeit $t < T$ ($T$ etwa gleich einem Jahre) die Abweichung der Lagenkoordinate $\vartheta$ in der abgeänderten und der ursprünglichen Bewegung kleiner als $\varepsilon$ ($\varepsilon$ etwa gleich einer Bogensekunde) wird.

Mit anderen Worten: *Die Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels wäre bei Zugrundelegung unserer jetzigen Definition stabil!*

Ähnliche Betrachtungen liefsen sich in dem gleichfalls allgemein

als instabil anerkannten Falle der Rotation des unsymmetrischen schwerelosen Kreisels um seine mittlere Hauptträgheitsaxe anstellen. Auch hier wird die Geschwindigkeit, mit der die Rotationsaxe bei einem zu Null abnehmenden Anstofse die mittlere Hauptträgheitsaxe verläfst, in der Grenze gleich Null. Für eine begrenzte Zeit $t < T$ bleibt daher die abgeänderte Bewegung bei geeigneter Wahl des Anstofses auch hier in beliebiger Nähe der ursprünglichen.

Wir schliefsen hieraus: *Unsere jetzige Stabilitätsdefinition, nach welcher die Kleinheit der Abweichung nur für einen begrenzten Zeitraum verlangt wird, ist zu weit. Sie läfst Bewegungen als stabil passieren, die wir vernünftiger Weise durchaus als labil ansehen müssen.*

Wir sind somit in ein eigentümliches Dilemma geraten, dem wir nur dadurch entgehen können, dafs wir unsere früher bereits mehrfach in Anwendung gebrachte Stabilitätsdefinition wieder aufnehmen. Wir wollten eine Bewegung stabil nennen, wenn zwischen ihr und der durch einen beliebigen Anstofs abgeänderten Bewegung ein *stetiger Übergang* möglich ist. Es kommt nur darauf an, diesen etwas unbestimmt gehaltenen Stetigkeitsbegriff näher zu präzisieren und durch ein analytisches Kriterium zu kennzeichnen. Wir wollen zu dem Zwecke folgendermafsen verfahren: Wir ändern die fragliche Bewegung durch einen endlichen Anstofs von beliebigem Charakter ab. Alsdann lassen wir die Gröfse des Anstofses zu Null abnehmen und suchen die Grenze auf, der die abgeänderte Bewegung hierbei zustrebt. *Wenn diese Grenze existiert und mit der vorgelegten Bewegung übereinstimmt, nennen wir den Übergang zwischen der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung einen stetigen.*

Unsere endgültige Stabilitätsdefinition, ausgesprochen für ein beliebiges mechanisches System, wird daraufhin folgendermafsen lauten:

*Eine Bewegung soll stabil heifsen, wenn sie übereinstimmt mit dem Limes, welchem die aus einer beliebigen Impuls-Änderung resultierende Bewegung bei nach Null abnehmender Gröfse dieser Änderung zustrebt. Dagegen soll sie labil genannt werden, wenn sie von dem so erhaltenen Limes verschieden ist, oder wenn bei verschiedenen Arten der Impulsänderung verschiedene Limites herauskommen oder wenn ein Limes überhaupt nicht existiert.*

Offenbar wird nach dieser Definition beispielsweise die reguläre Präcession, die allgemeine Bewegung des Kreisels, bei welcher die Bahnkurve zwischen zwei Parallelkreisen hin und her läuft, die Galileische Trägheitsbahn u. s. w. zu den stabilen Bewegungen, die aufrechte Bewegung des schwachen Kreisels, die Rotation des dreiaxigen Körpers um die mittlere Hauptträgheitsaxe u. s. w., wie billig, zu den labilen

Bewegungen zu rechnen sein. In der That sahen wir z. B. bei dem aufrechten schwachen Kreisel, dafs bei zu Null abnehmendem Werte des Anstofses [$\Theta_0$] eine ganz bestimmte Bewegung (von spiraliger Bahnkurve) übrig blieb, welche von der einfachen Rotation um die Vertikale verschieden war. Was die geodätischen Bahnen auf dem Rotationshyperboloid betrifft, so würden diese im allgemeinen stabil sein mit Ausnahme des Kehlkreises, welcher instabil ist und eine asymptotische Lösung darstellt, wie wir nicht näher ausführen wollen.

Ein weiterer Punkt, in dem unsere Stabilitätsdefinition der sonst üblichen ersichtlich überlegen ist, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Wenn man die Stabilität der Bewegungen im gewöhnlichen Sinne aus der Kleinheit der Abweichung beurteilt, welche aus einer kleinen Störung resultiert, und wenn man diese Abweichung durch Näherungsformeln darstellt, so vernachlässigt man (vgl. pag. 320) gewöhnlich alle diejenigen Glieder, welche wie die zweite oder eine höhere Potenz der Störung verschwinden. Ist die betreffende Vernachlässigung aber in einem säkularen (etwa mit $t$ multiplizierten) Terme vorgenommen, so wächst die hierdurch bedingte Ungenauigkeit der Näherungsformel mit der Zeit immer mehr an; während also die Näherungsformel auf eine dauernd kleine Abweichung schliefsen läfst, kann es vorkommen, dafs in Wirklichkeit die Abweichung zwischen der gestörten und der ursprünglichen Bewegung jeden beliebigen Betrag erreicht. In diesem Falle würde eine Bewegung nach der gewöhnlichen Methode stabil erscheinen, während doch bei einer Störung mit der Zeit endliche Abweichungen auftreten. Dagegen ist die Handhabung unserer definitiven Stabilitätsdefinition von solchen Schwierigkeiten gänzlich frei. Bei uns handelt es sich nicht um Abweichungen erster oder zweiter Ordnung, sondern um direkte *Gleichheit* zwischen der ursprünglichen und dem Limes der gestörten Bewegung. Diese Gleichheit läfst sich aber nicht nur mit gröfserer Schärfe, sondern auch mit gröfserer Leichtigkeit beurteilen, wie die Kleinheit der Abweichung bei der gewöhnlichen Definition.

Wir können unsere neue Definition auch dadurch empfehlen, dafs wir zeigen: *Im Falle des Gleichgewichts, wo die Begriffe stabil und labil seit langem feststehen, deckt sie sich mit der allgemein acceptierten Bedeutung dieser Worte.* Es genüge in der Hinsicht ein einfaches Beispiel. Ein schwerer Massenpunkt auf der Kugeloberfläche befindet sich im obersten Punkte (Nordpol) im labilen, im untersten (Südpol) im stabilen Gleichgewicht. Dies folgt aus unserer Definition der Stabilitätsverhältnisse der Bewegung, von denen die der Ruhe ein spezieller Fall sind, und stimmt mit der gewöhnlichen Auffassung überein. Geben

wir nämlich dem im Nordpole befindlichen Punkte einen Stofs, so beschreibt er einen gröfsten Kreis auf der Kugel; lassen wir die Gröfse des Stofses immer mehr zu Null abnehmen, so bleibt die Bahn des Punktes die frühere, nur die Geschwindigkeit nimmt ab; im Nordpole wird sie in der Grenze gleich Null, in allen übrigen Punkten des gröfsten Kreises bleibt sie von Null verschieden. Der Limes ist hier also eine bestimmte wohldefinierte Bewegung, welche von dem ursprünglichen Ruhezustande verschieden ist. Übrigens ergiebt sich je nach der Richtung des Anstofses ein anderer Limes. Lassen wir dagegen auf den im Südpole ruhenden Punkt einen Anstofs wirken, so pendelt der Punkt auf einem gröfsten Kreise hin und her, wobei die Gröfse des Ausschlages von der Gröfse des Anstofses abhängt und mit diesem zu Null abnimmt. Der Limes, von dem unsere Definition spricht, ist hier also die ursprüngliche Ruhelage selbst.

Wir könnten schliefslich noch einen auf der Kugel ruhenden *schwerelosen* Massenpunkt betrachten. Stofsen wir diesen an, so beschreibt er einen gröfsten Kreis mit konstanter Geschwindigkeit; lassen wir die Gröfse des Stofses Null werden, so wird auch die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich Null. Man könnte im Zweifel sein, ob man den so erhaltenen Limes als Ruhe oder als Bewegung bezeichnen soll. Jedenfalls wird man sagen müssen, dafs ein bestimmter Limes nicht existiert, da die Lage des gröfsten Kreises von der Richtung des Anstofses abhängt. Für solche Fälle scheint die wohl auch sonst angewandte Bezeichnung des „indifferenten Gleichgewichts“ passend.*)

Wir wollen keineswegs leugnen, dafs nicht auch der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Stabilitätsbegriff, zumal wenn er durch die Einschränkung auf konservative Anstöfse verbessert ist, der Untersuchung würdig wäre. Wir möchten nur in dem dort definierten Falle nicht von Stabilität schlechtweg, sondern etwa von *absoluter Stabilität* sprechen. Also:

*Wenn eine Bewegung so beschaffen ist, dafs sie bei einer hinreichend kleinen konservativen Änderung der Impulskoordinaten in eine Bewegung übergeht, in welcher die Lagen des Systems den entsprechenden Lagen in der ursprünglichen Bewegung dauernd beliebig nahe bleiben, so nennen wir die Bewegung absolut stabil.* Dafs eine solche Bewegung auch unserer definitiven Stabilitätserklärung genügt, ist selbstverständlich. Die pag. 347 genannte Kreisbahn ist unter der angegebenen Bedingung $n > -3$ in diesem Sinne absolut stabil. Dabei müssen wir allerdings wiederholt bemerken, dafs die in der Litteratur (z. B. bei Routh sowie bei Thomson und Tait) gewöhnlich eingeschlagene Untersuchungsmethode, nach welcher die absolute Stabilität aus den Gliedern erster Ordnung unter

*) Hierzu vergleiche man auch Anhang zu Heft IV, pag. 947—949.

Vernachlässigung der höheren Glieder erschlossen wird, von unserem Standpunkte aus unvollständig ist. Nach der vorstehenden Definition können wir eine Bewegung nur dann absolut stabil nennen, wenn die abgeänderte Bewegung nicht nur in den Gliedern erster Ordnung, sondern schlechtweg der ursprünglichen dauernd beliebig benachbart bleibt.

Wir können noch eine Reihe anderer Unterscheidungen treffen. Wenn wir den Ton darauf legen wollen, daſs bei Abänderung einer stabilen Bewegung das System nach gewissen Zeitintervallen in dieselben Lagen kommt, wie bei der ursprünglichen, so können wir die Bewegung *oscillierend stabil* nennen. Der Gegensatz hiervon wäre *divergierend stabil.* Die geodätischen Bahnen auf den Flächen positiver Krümmung sind, soweit sie überhaupt stabil sind, allemal oscillierend, die auf den negativ gekrümmten Flächen divergierend stabil. Die Galileische Trägheitsbahn liefert ein weiteres Beispiel von divergierender Stabilität. Daſs absolute und oscillierende Stabilität nicht zusammenzufallen brauchen, kann an dem Beispiel der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid gezeigt werden (vgl. die Anm. auf pag. 348).

Ferner können wir noch unterscheiden zwischen *partieller* und *totaler Stabilität.* Von partieller Stabilität würden wir sprechen, wenn unser Stabilitätskriterium nur für gewisse Anstöſse, von totaler dann, wenn es schlechtweg, d. h. für alle möglichen Anstöſse erfüllt ist. Unsere bisherige Stabilitätsdefinition bezog sich hiernach auf totale Stabilität. Beschränken wir uns dagegen mit Thomson und Tait auf konservative Anstöſse, so fragen wir nach einer Art partieller Stabilität. Auch sonst interessiert man sich in der Litteratur, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, zumal im Falle der sogenannten cyklischen Systeme, meist nur für partielle Stabilität.

Endlich wollen wir noch einmal den Gegensatz zwischen *theoretischer und praktischer Stabilität und Labilität* betonen. Unsere bisherigen Entwickelungen in diesem Paragraphen bezogen sich sämtlich auf theoretische Stabilität. Es kann aber, wie wir schon im vorigen Paragraphen sahen, vorkommen, daſs eine Bewegung unserem Stabilitätskriterium nicht genügt, daſs sie aber doch für praktische Zwecke so gut wie stabil ist. Dies wird eintreten, wenn der in Frage kommende Limes von der ursprünglichen Bewegung zwar verschieden, aber nur so wenig verschieden ist, daſs er nahezu mit jener zusammenfällt.

Das Umgekehrte wird der Fall sein, wenn der Limes der abgeänderten Bewegung allerdings mit der ursprünglichen identisch ist, wenn aber selbst kurz vor dem Grenzübergange, d. h. bei schon sehr klein gewordenen Werten der Impulskoordinatenänderungen die abgeänderte Bewegung noch wesentlich von der ungestörten differiert. Ein

Beispiel für ein in diesem Sinne *praktisch labiles, theoretisch stabiles Gleichgewicht* liefert ein Massenpunkt, der sich reibungslos in einer sehr kleinen Mulde auf der Spitze eines Berges befindet. Ein *theoretisch labiles und praktisch stabiles Gleichgewicht* stellt ein Punkt dar, der auf einer geringfügigen Erhöhung im Boden eines Thales liegt.

Wir wollen zum Schlusse bemerken, dafs man unsere Stabilitätsdefinition, wenn man will, in der Weise modifizieren könnte, dafs man aufser den Impuls- auch die Lagenkoordinaten bez. dafs man statt der Impuls- die Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten des Systems einer kleinen Änderung unterzieht, wie solches bei den Gleichgewichtsuntersuchungen in der That häufig geschieht. Indessen scheint diese Modifikation keine erheblichen Konsequenzen zu haben. Überdies dürfte unsere Abänderung der Impulskoordinaten am besten dem physikalischen Begriffe einer Störung entsprechen und dürfte den Vorzug verdienen vor einer Abänderung der Geschwindigkeitskoordinaten, welche zwar formal-mathematisch jener gleichwertig aber ihrem physikalischen Sinne nach weniger zweckentsprechend sein würde wie jene.

## § 7. Energiekriterien für die Stabilität des Gleichgewichtes und der Bewegung.

Die Handhabung unserer Stabilitätsdefinition des vorigen Paragraphen setzt die Kenntnis der Bahnkurven im allgemeinen und namentlich die Kenntnis desjenigen Limes voraus, dem die Bewegung bei verschwindender Störung zustrebt. Die Entscheidung, ob eine Bewegung stabil oder labil sei, ist hiernach ziemlich mühevoll. Man wird wünschen, diese Entscheidung zu vereinfachen und wird namentlich nach Kriterien suchen, welche ohne Kenntnis der allgemeinen Bewegung, also ohne Integration der mechanischen Differentialgleichungen, zum Ziele führen. Wir werden in dieser Hinsicht kaum etwas Neues zu bringen haben; unsere Aufgabe soll vielmehr wesentlich kritischer Natur sein. Wir beabsichtigen namentlich im folgenden Paragraphen zu zeigen, dafs das gangbarste Kriterium, welches aus der sogenannten Methode der kleinen Schwingungen folgt, zu mancherlei Einwänden Anlafs giebt.

Als Vorbild für die zunächst anzustellende Untersuchung mufs das bekannte *Kriterium für die Stabilität des Gleichgewichtes* dienen, welches von Lagrange zuerst ausgesprochen und von Dirichlet in einer kurzen aber bedeutungsvollen Arbeit*) genau formuliert und bewiesen ist. Dirichlet betrachtet ein beliebiges mechanisches System, dessen Ver-

*) Crelles Journal, Bd. 32, pag. 85—88, 1846.

bindungen von der Zeit unabhängig sind, und welches lediglich „konservativen Kräften“ unterworfen ist, d. h. solchen Kräften, deren Arbeit durch eine Funktion der Koordinaten, den negativ genommenen Wert der potentiellen Energie $V$, dargestellt werden kann. Für ein solches System gilt der Satz der lebendigen Kraft in der Form

$$T + V = h.$$

Das Resultat der Dirichletschen Untersuchung lautet nun bekanntlich so: *Das Gleichgewicht ist sicher stabil, wenn in der fraglichen Gleichgewichtslage $V$ ein wirkliches Minimum ist.*

Den Beweis führen wir mit Rücksicht auf die sogleich zu nennende Verallgemeinerung des Kriteriums etwas abweichend von Dirichlet folgendermaſsen:

In der Gleichgewichtslage ist $T = 0$; der Wert von $V$ kann, da er nur bis auf eine additive Konstante definiert ist, ebenfalls gleich Null gesetzt werden; also wird in der Gleichgewichtslage auch $h = 0$. Ist nun $V$ ein wirkliches Minimum, so können wir solche Grenzen für die die Lage des Systems bestimmenden Koordinaten angeben, daſs $V$ gröſser als eine (genügend klein zu wählende) positive Gröſse $k$ ausfällt, sobald eine oder mehrere der Lagenkoordinaten einem oder mehreren der genannten Grenzwerte gleich werden, und gleichzeitig die Werte der übrigen Lagenkoordinaten innerhalb dieser Grenzen verbleiben. Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir von der Gesamtheit der Wertsysteme unserer Lagenkoordinaten, welche innerhalb der genannten Grenzen liegen, als von einem „Gebiet“ sprechen und wollen diejenigen Koordinaten-Wertsysteme, in denen mindestens eine Koordinate mit einem der für diese Koordinate aufgestellten Grenzwerte übereinstimmt, als „Begrenzung des Gebietes“ bezeichnen. Dann haben wir auf der Begrenzung unseres Gebietes

$$V > k.$$

Um so mehr wird also, weil $T$ notwendig positiv ist,

$$T + V > k, \tag{1}$$

und zwar unabhängig von den Werten, die wir den in $T$ eingehenden Geschwindigkeitskoordinaten beilegen mögen.

Wir erteilen nun dem System eine Störung. Für die so entstehende Bewegung gilt wieder der Satz der lebendigen Kraft. Die Störung können wir so klein bemessen, daſs die Konstante der lebendigen Kraft $h < k$ wird. Für die gestörte Bewegung gilt also

$$T + V < k. \tag{2}$$

Es ist nun klar, daſs diese Bewegung ganz und dauernd innerhalb des vorher angegebenen Gebietes verläuft. Im entgegengesetzten Falle

würde es nämlich einmal eintreten, daſs eine Lagenkoordinate (oder eventuell mehrere gleichzeitig) die oben angegebenen Grenzen erreichte, während die übrigen Lagenkoordinaten noch solche Werte besäſsen, die dem Innern des Gebietes angehörten. In diesem Augenblicke müſste aber die Ungleichung (1) gelten, welche mit der gleichzeitig geltenden Ungleichung (2) unvereinbar ist.

Die Grenzen des Gebietes können nun beliebig verengert und die vorstehenden Schlüsse, bei entsprechender Verkleinerung der Störung, wiederholt werden.

Hiernach bleibt das System bei der abgeänderten Bewegung dauernd in einer beliebig engen Nachbarschaft der ursprünglichen Gleichgewichtslage. Letztere ist also nach unserer sowie nach jeder sonstigen Definition des Wortes sicher stabil.

Das somit bewiesene Kriterium *reicht* hiernach *hin*, um die Stabilität des Gleichgewichtes zu garantieren. Es entsteht aber weiter die Frage, ob die Forderung dieses Kriteriums auch *notwendig* ist, oder anders ausgedrückt, ob sich der Lagrange-Dirichletsche Satz in dem Sinne umkehren läſst, daſs beim Nichtvorhandensein eines Minimums (oder vielleicht nur beim Vorhandensein eines Maximums) das Gleichgewicht sicher instabil ist. Hierüber giebt es noch keine abschlieſsenden Resultate. Wenigstens können die Herren Liapounoff und Hadamard in ihren einschlägigen Arbeiten*) die Umkehrung des in Rede stehenden Satzes nur unter spezielleren Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $V$ aussprechen (z. B. unter der Voraussetzung, daſs sich in der Potenzentwicklung von $V$ das Nichtvorhandensein eines Minimums an den quadratischen Gliedern oder das Vorhandensein eines Maximums an den Gliedern niedrigster Ordnung erkennen läſst).

Wir kommen nun zu einer interessanten Übertragung des vorhergehenden „Energiekriteriums“ („energy test of stability“) von dem Falle des Gleichgewichtes auf den der Bewegung. Diese Übertragung ist von Routh**) geleistet worden.

Wir gehen mit Routh ebenso wie bei dem Gleichgewichtskriterium (unter den oben angegebenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Verbindungen des Systems und der auf das System wirkenden Kräfte) von dem Energieausdrucke

---

*) Vgl. Liapounoff, Journal de Liouville, sér. V, t. 3 (Sur la stabilité de l'équilibre), wo weitere Litteraturangaben über die Arbeiten des Verf. zu finden sind, und Hadamard, ebendaselbst (Sur certaines trajectoires en dynamique); vgl. speziell pag. 365.

**) Vgl. Rigid dynamics, Part. II, Cap. III, art. 95 u. ff. Stability of motion, Cap. VI, art. 1—3.

$$T + V = h$$

aus. Die linke Seite, die Gesamtenergie des Systems, ist eine bekannte Funktion der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten, welche für alle Stadien der vorgelegten Bewegung den konstanten, gleichfalls bekannten numerischen Wert $h$ besitzt. Man kann nun zeigen, daſs, wenn die Gesamtenergie für die vorgelegte Bewegung ein Extrem (d. h. ein Maximum oder Minimum) bezüglich der sämtlichen darin vorkommenden Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, die vorgelegte Bewegung absolut stabil sein muſs.

Allerdings kann in der Weise, wie es hier zunächst ausgedrückt ist, die Sache gar nicht eintreten. Betrachten wir nämlich insbesondere die Abhängigkeit der Gesamtenergie von den Geschwindigkeitskoordinaten. Da die lebendige Kraft eine positive quadratische Funktion der Geschwindigkeitskoordinaten darstellt, wird sie im allgemeinen wachsen mit wachsenden, abnehmen mit abnehmenden Werten der Geschwindigkeitskoordinaten. Soll aber die Gesamtenergie ein wirkliches Extrem sein, so müſste $T$ bei Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeitskoordinaten entweder nur wachsen oder nur abnehmen.

Infolgedessen sieht man sich mit Routh genötigt, die Stabilitätsfrage spezieller zu stellen. Man wird, um aus dem Energiekriterium einen wirklichen Nutzen ziehen zu können, nicht nach der totalen, sondern der partiellen Stabilität irgendwelcher Art fragen (vgl. den Schluſs des vorigen Paragraphen). Man wird also von den Anfangswerten der Impulskoordinaten einzelne (wir wollen sie $N, n, \ldots$ nennen) festhalten und den Anstoſs so einrichten, daſs er nur eine Veränderung der übrigbleibenden Impulskoordinaten bewirkt. Überdies wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daſs diese Impulskoordinaten $N, n, \ldots$, wie unten im Falle des Kreisels, auch im Verlaufe der Bewegung konstant bleiben, so daſs wir im Folgenden von den „Impulskonstanten" $N, n, \ldots$ reden werden.

Die Impulskoordinaten sind aber, wie später allgemein gezeigt werden wird, einfache (und zwar lineare) Funktionen der Geschwindigkeitskoordinaten, wobei noch die Lagenkoordinaten in die Koeffizienten eingehen können. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskoordinaten mit $\vartheta', \varphi', \ldots$, so haben wir demnach Gleichungen der folgenden Gestalt:

$$(3) \qquad f_1(\vartheta', \varphi', \ldots) = N, \quad f_2(\vartheta', \varphi', \ldots) = n, \ldots,$$

welche ebensowohl für die ursprüngliche, wie für die abgeänderte Bewegung gelten. (Routh betrachtet übrigens allgemeiner statt solcher Impulsgleichungen irgendwelche „erste Integralgleichungen" des Problems, deren linke Seiten ein Aggregat der Lagen- und Geschwindigkeitskoordi-

naten und deren rechte Seiten Konstante sind. Der Anstofs müfste dann so gewählt werden, dafs die Konstanten der rechten Seiten durch ihn nicht geändert werden.)

Daraufhin werden wir aus dem Ausdrucke der Gesamtenergie so viele Geschwindigkeitskoordinaten eliminieren können, als wir Bedingungsgleichungen der vorstehenden Form haben, wobei die Impulskonstanten $N, n, \ldots$ (bez. die Integrationskonstanten $N, n, \ldots$) in den Energieausdruck eingehen werden. Die Forderung, dafs der so entstehende Energieausdruck ein wirkliches Extrem bezüglich der sämtlichen explizite in ihm enthaltenen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten darstelle, besagt ersichtlich weniger, als die frühere Forderung, dafs er ein Extrem schlechtweg (bezüglich aller Koordinaten) sei. Wir werden sogleich sehen, dafs unsere jetzige Forderung thatsächlich beispielsweise bei gewissen Kreiselbewegungen erfüllt ist.

Dies vorausgeschickt, sprechen wir das Routhsche Energiekriterium, wie folgt, aus:

*Die vorgelegte Bewegung ist in sämtlichen nicht eliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten absolut stabil, wenn der Energieausdruck nach erfolgter Elimination ein wirkliches Extrem bezüglich eben dieser Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar partiell stabil gegenüber allen solchen Störungen, welche die in den Energieausdruck eingeführten Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert lassen.*

Der Beweis gestaltet sich ähnlich wie im Falle des Gleichgewichtes: Wenn $T + V$ für die vorgelegte Bewegung ein wirkliches Minimum ist (der Fall des Maximums ist ähnlich zu behandeln), so können wir solche positive und negative Inkremente für jede einzelne der nichteliminierten Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten angeben, dafs der jeweilige Wert von $T + V$ vergröfsert wird, sobald wir mindestens einer der Lagen- oder Geschwindigkeitskoordinaten eins der bez. Inkremente erteilen, während gleichzeitig die übrigen Koordinaten ungeändert bleiben oder doch nur um weniger als die festgesetzten Inkremente abgeändert werden. Und zwar möge die so entstehende Vermehrung von $T + V$ in jedem Augenblicke der Bewegung gröfser werden als die positive (genügend klein zu wählende) Gröfse $k$:

$$T + V > h + k, \tag{1'}$$

Für die durch eine einmalige Störung abgeänderte Bewegung besteht gleichfalls der Satz von der lebendigen Kraft. Die Störung kann so klein gewählt werden, dafs der ursprüngliche Wert von $h$ um weniger als $k$ vermehrt wird. Wir haben also längs der ganzen abgeänderten Bewegung

$$T + V < h + k. \tag{2'}$$

Dabei setzen wir eine partielle Störung voraus, welche die Werte der Konstanten $N, n, \ldots$ ungeändert läſst.

Aus (1′) und (2′) schlieſst man wie oben, daſs die Differenzen zwischen den Koordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung niemals die Gröſse der vorher festgesetzten Inkremente erreichen können. Da diese Inkremente aber selbst beliebig klein gewählt werden können, so folgt unmittelbar die absolute Stabilität der vorgelegten Bewegung in Bezug auf alle nicht eliminierten Koordinaten.

Zunächst soll die Forderung des Routhschen Kriteriums noch etwas schärfer präzisiert werden. Es genügt eigentlich nicht, zu verlangen, daſs die Energiefunktion $T+V$ ein Extrem schlechtweg sei. Beim Beweise wurde vielmehr vorausgesetzt, *daſs sich für alle Werte der Zeit oder, was dasselbe bedeutet, für alle Stellen der ursprünglichen Bahn ein und dieselbe positive (bez. negative) Zahl $k$ angeben läſst*, oberhalb (bez. unterhalb) deren die Änderung der Energiefunktion bei Vermehrung eines oder mehrer ihrer Argumente um gewisse von Null verschiedene Zuwächse liegt. Die letztere Forderung besagt mehr als die Forderung, daſs $T+V$ an jeder einzelnen Stelle ein Extrem sein solle. Es könnte z. B. sehr gut sein, daſs wir für jeden Wert von $t$ eine Zahl $k$ von der genannten Beschaffenheit angeben können, daſs aber dieser Wert bei wachsendem $t$ immer kleiner (bez. gröſser) wird und in der Grenze $t=\infty$ von Null nicht mehr verschieden ist. Wir wollen ein solches Extrem, wie es beim Beweise des Routhschen Satzes vorausgesetzt wird, im Anschluſs an eine in der Funktionentheorie übliche Bezeichnung ein *gleichmäſsiges Extrem* nennen, wobei sich das Wort „gleichmäſsig" auf die Abhängigkeit der Energiefunktion von der Zeit bezieht und nichts anderes besagen soll, als daſs die von Null verschiedene Zahl $k$ unabhängig von den Werten der Zeit fixiert werden kann. Hiernach würde das Routhsche Kriterium genauer so auszusprechen sein: *Die Bewegung ist sicher absolut stabil, wenn die Energiefunktion ein Extrem bezüglich ihrer sämtlichen nicht eliminierten Argumente, der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, und zwar gleichmäſsig für alle Werte von $t$.*

Der Zusammenhang dieses Bewegungskriteriums mit dem vorangehenden Gleichgewichtskriterium ist klar. Wenn $V$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagenkoordinaten ist, so ist auch $T+V$ in der Gleichgewichtslage $T=0$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten. Wenn umgekehrt $T+V$ ein Minimum bezüglich der sämtlichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten ist, so braucht man nur die sämtlichen Geschwindigkeitskoordinaten gleich Null zu setzen, um zu sehen, daſs gleichzeitig auch $V$ ein

Minimum bezüglich sämtlicher Lagenkoordinaten sein mufs. *Im Falle des Gleichgewichtes geht also das Routhsche Kriterium, soweit es sich auf ein Minimum von $T + V$ bezieht, in das Lagrange-Dirichletsche Kriterium über und umgekehrt.* Eine Spezialisierung des Anstofses, wie sie oben durch die Gleichungen (3) vorgesehen wurde, wird dabei in diesem besonderen Falle überflüssig.

Die andere Aussage des Routhschen Satzes, wonach die Bewegung auch absolut stabil ist, wenn $T + V$ ein Maximum für diese Bewegung darstellt, kommt im Falle des Gleichgewichtes offenbar nicht in Frage. Da nämlich im Falle des Gleichgewichtes $T$ sicherlich ein Minimum ist, so kann $T + V$ kein Maximum sein. In der That wächst ja $T$ und auch $T + V$, wenn wir beispielsweise die Werte der Lagenkoordinaten festhalten, die der Geschwindigkeitskoordinaten aber irgendwie verändern.

Natürlich wird die Handhabung des Routhschen Bewegungskriteriums weniger bequem und seine Tragweite weniger umfassend, wie die des Gleichgewichtskriteriums, weil wir bei ersterem mehr über den Charakter der Bewegung voraussetzen müssen, wie bei letzterem über den des Gleichgewichtes und weil wir das Auftreten eines extremen Energiewertes bei der Bewegung überhaupt nur sozusagen durch eine Beschränkung der Beweglichkeit des Systems im Sinne der Gleichungen (3) erreichen können. In der That, wenn wir mit Routh verlangen, dafs die Gesamtenergie ein Extrem nicht nur bezüglich der Lagenkoordinaten, sondern auch noch bezüglich einer Anzahl (nicht eliminierter) Geschwindigkeitskoordinaten sein soll, so stellen wir gegenüber dem Gleichgewichtsfalle so viel Bedingungen mehr, als die Anzahl der nichteliminierten Geschwindigkeitskoordinaten beträgt. Es kommt noch bei genauer Formulierung des Bewegungskriteriums der lästige Zusatz der Gleichmäfsigkeit des Extrems für alle Werte von $t$ hinzu, ein Zusatz, welcher bei dem Gleichgewichtskriterium ersichtlich nur im Falle unendlich vieler Freiheitsgrade ein Analogon hat.

Dementsprechend wird das Anwendungsgebiet des Routhschen Kriteriums ziemlich beschränkt. Die Beispiele, die Routh l. c. giebt, unterscheiden sich nach erfolgter Elimination eigentlich nicht mehr wesentlich von Gleichgewichtsproblemen. Die Bewegung, deren Stabilität untersucht werden soll, wird nämlich meist so gewählt, dafs sie durch Nullsetzen aller im Energieausdrucke explicite vorkommenden Geschwindigkeitskoordinaten charakterisiert werden kann. In diesem Falle ist der Ausdruck der lebendigen Kraft, was die Geschwindigkeitskoordinaten angeht, gerade so wie im Gleichgewichtsfalle, von selbst ein Minimum. Es bleibt nur noch übrig den Energieausdruck auch

bezüglich der Lagenkoordinaten auf seine Extremeigenschaft hin zu untersuchen, was dann nicht mehr Schwierigkeit macht, wie die Untersuchung der potentiellen Energie im Falle des Gleichgewichtes. Auch die Forderung der Gleichmäfsigkeit des Extrems wird bei solchen Bewegungsfällen überflüssig.

Von dieser speziellen Beschaffenheit sind auch die folgenden beiden Beispiele, welche wir der Theorie des Kreisels entnehmen. Es handle sich um die mehrfach besprochenen Fälle der *aufrechten Bewegung* und der *regulären Präcession.* Dabei wollen wir den Kreisel speziell als Kugelkreisel vom Trägheitsmomente $A$ voraussetzen. Der Energieausdruck lautet hier

$$(4) \quad T + V = \frac{A}{2}\left(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\cdot\psi'^2 + (\varphi' + \cos\vartheta\cdot\psi')^2\right) + P\cos\vartheta.$$

Die Konstanz der Impulskomponenten $n$ und $N$ bei der einzelnen Bewegung bringt nach pag. 222 folgende Relationen für die Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi'$ und $\psi'$ mit sich:

$$(5) \qquad A(\psi' + \cos\vartheta\varphi') = n, \qquad A(\varphi' + \cos\vartheta\psi') = N.$$

Die Störung soll in dem Sinne partiell gewählt werden, dafs diese Impulskonstanten nicht geändert werden. Der Anstofs soll also lediglich die [Θ-]Komponente des Impulses alterieren, d. h. die Knotenlinie zur Axe haben.

Mittelst der Gleichungen (5) werden wir nun $\varphi'$ und $\psi'$ aus (4) eliminieren. Es ergiebt sich dabei, weil die rechte Seite von (4) ebenso wie die Koeffizienten in (5) die Lagenkoordinaten $\varphi$ und $\psi$ selbst nicht enthalten, ein Ausdruck, welcher nur von $\vartheta$ und $\vartheta'$ abhängt, nämlich

$$(4') \quad T + V = \frac{1}{2A}\left[A^2\vartheta'^2 + \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + N^2 + 2AP\cos\vartheta\right].$$

Diese Funktion zweier Variabler haben wir auf ihre Extremeigenschaften hin zu prüfen.

Bei der *aufrechten Bewegung* ($\vartheta = \vartheta' = 0$) ist $n = N$. Da diese Relation durch den Anstofs nicht abgeändert werden soll, so ergiebt sich für die gestörte Bewegung aus (4') der vereinfachte Energieausdruck:

$$2A(T + V) = A^2\vartheta'^2 + \frac{N^2}{\cos^2\vartheta/2} + 2AP\cos\vartheta.$$

Indem wir die bekannten Regeln für die Aufsuchung der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variabeln anwenden, entwickeln

wir den vorstehenden Ausdruck an der Stelle $\vartheta = \vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Lehrsatze und erhalten:

$$2A(T+V) = N^2 + 2AP + A^2\vartheta'^2 + \frac{1}{4}(N^2 - 4AP)\vartheta^2 + \cdots$$

Hier verschwinden die linearen Glieder in $\vartheta$ und $\vartheta'$; die quadratischen bilden eine positive definite quadratische Form, sofern

$$(6) \qquad N^2 - 4AP > 0$$

ist. In diesem Falle besitzt also $T + V$ für $\vartheta = \vartheta' = 0$ ein wirkliches Minimum. Die Bewegung des aufrechten Kreisels ist also, gegenüber solchen partiellen Störungen, welche den gemeinsamen Wert von $N$ und $n$ ungeändert lassen, unter der Bedingung (6) absolut stabil.

Wir haben somit unser früheres Stabilitätskriterium wiedergefunden, allerdings in einer weniger scharfen Form, indem statt des Zeichens $\geqq$ das Zeichen $>$ getreten ist. Daſs in der abgeänderten Bewegung unter der Bedingung (6) der Wert von $\vartheta$ dauernd in der Nähe des ursprünglichen Wertes $\vartheta = 0$ liegt, ist uns aus § 4 und 5 genugsam bekannt. Unsere früheren Betrachtungen zeigten auſserdem, daſs auch im Hinblick auf die Koordinaten $\varphi$ und $\psi$, sowie bei Abänderung von $N$ im Falle $N^2 - 4AP \geqq 0$ die aufrechte Bewegung als stabil, wenn auch nicht als absolut stabil zu bezeichnen ist und daſs im Falle $N^2 - 4AP < 0$ die aufrechte Bewegung labil wird. Über die letzteren Punkte giebt unsere jetzige Betrachtung natürlich keinen Aufschluſs.

Wir betrachten sodann das Beispiel der *regulären Präcession*. Diese Bewegung ist dadurch charakterisiert, daſs $\vartheta' = 0$ ist und daſs $\vartheta$ einen Wert $\vartheta_0$ hat, der sich aus der Gleichung $A\mu\nu = P$ oder (vgl. pag. 279)

$$(7) \qquad \frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} \cdot \frac{N - n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} = AP$$

bestimmt. Wir denken uns diese Bewegung wiederum durch einen Anstoſs gestört, welcher die Impulskonstanten $n$ und $N$ ungeändert läſst und lediglich die (in der Energiefunktion nicht explicit auftretende) Impulskomponente $[\Theta]$ beeinfluſst. Darauf entwickeln wir den Ausdruck $2A(T+V)$ an der Stelle $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta' = 0$ nach dem Taylorschen Satze. Das konstante Glied, welches den Energiebetrag bei der regulären Präcession bedeutet, ist nach Gleichung (4')

$$a_0 = \left(\frac{n - N\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}\right)^2 + N^2 + 2AP\cos\vartheta_0;$$

dieses kommt für das Folgende nicht wesentlich in Betracht. Hierauf suchen wir die Glieder erster Ordnung in $\vartheta - \vartheta_0$ und $\vartheta'$ auf, welche von der Form sind

$$a_1(\vartheta - \vartheta_0) + a_2\vartheta'.$$

Offenbar verschwindet der Koeffizient $a_2$. Der Koeffizient $a_1$ ist gleich dem Werte von

$$\frac{\partial\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta}$$

für $\vartheta = \vartheta_0$. Rechnet man den genannten Differentialquotienten aus, so findet man ohne Mühe

$$(8) \qquad 2\sin\vartheta\left\{\frac{n-N\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} - AP\right\}$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen Gleichung (7). Die Glieder erster Ordnung verschwinden also, wie es für das Eintreten eines Maximums oder Minimums erforderlich ist.

Die Glieder zweiter Ordnung haben sodann die Form

$$a_{11}(\vartheta-\vartheta_0)^2 + 2a_{12}(\vartheta-\vartheta_0)\vartheta' + a_{22}\vartheta'^2.$$

Hier sieht man ohne weiteres, dafs $a_{22} = A^2$, $a_{12} = 0$ ist. Es bleibt also nur noch

$$a_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\{2A(T+V)\}}{\partial\vartheta^2}\right)_{\vartheta=\vartheta_0}$$

zu berechnen. Führen wir in (8) eine abermalige Differentiation nach $\vartheta$ aus und setzen $\vartheta = \vartheta_0$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin\vartheta_0 \frac{d}{d\vartheta_0}\left(\frac{n-N\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\cdot\frac{N-n\cos\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}\right) \\ &= \frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist sicher positiv. Der erste Faktor des Zählers bedeutet nämlich das Quadrat derjenigen Strecke, welche wir erhalten, wenn wir den Endpunkt der Impulskomponente $N$ mit dem Endpunkte der Impulskomponente $n$ verbinden; die übrigen Faktoren sind offenbar gleichfalls positiv. Mithin stellen die Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{(N^2+n^2-2Nn\cos\vartheta_0)(1+3\cos^2\vartheta_0)}{\sin^4\vartheta_0}(\vartheta-\vartheta_0)^2 + A^2\vartheta'^2$$

eine positive quadratische Form dar. Die Existenz eines Minimums ist hierdurch bewiesen. Aus dem Kriterium von Routh folgt daher, dafs die reguläre Präcession in Bezug auf die Koordinate $\vartheta$ absolut stabil ist gegenüber allen solchen Störungen, welche die Impulskonstanten $n$ und $N$ ungeändert lassen — in Übereinstimmung mit den Resultaten von § 1. Das Verhalten der Bahn bei Abänderung von $n$ und $N$ und bei Berücksichtigung der Koordinaten $\varphi$ und $\psi$ entzieht sich unserer letzten Betrachtung; wir haben früher gesehen, dafs bei solchen allgemeinen Störungen die Bewegung zwar stabil aber nicht mehr absolut stabil ist.

Wiederum entsteht die Frage nach der Umkehr des Routhschen Kriteriums. Können wir etwa behaupten, dafs, falls $T + V$ kein wirkliches Minimum oder Maximum vorstellt, die Bewegung nicht absolut stabil sein könne? Hierüber ist bisher nichts Sicheres bekannt. Der Vergleich mit dem Dirichletschen Kriterium und die oben berichteten Schwierigkeiten, welche sich der Umkehrung des letzteren entgegenstellen, lassen eine etwaige Umkehrung des Routhschen Kriteriums nicht gerade als aussichtsvoll erscheinen. —

## § 8. Über die Methode der kleinen Schwingungen.

Wir gehen nun auf die bekannteste Methode zur Untersuchung der Stabilitätsfragen ein, auf die sogenannte *Methode der kleinen Schwingungen.* Die vorangehenden Kreiselbetrachtungen liefern uns das Mittel, diese wichtigen und in der Litteratur immer wiederkehrenden Entwickelungen nach ihrem inneren Werte zu verstehen. Historisch hat sich die Methode der kleinen Schwingungen aus der Betrachtung des Pendels entwickelt, dessen kleine Schwingungen ja von altersher studiert sind und eine weittragende theoretische und praktische Bedeutung haben.

Indessen werden wir die Methode der kleinen Schwingungen hier weiter zu fassen haben, als sie für das Pendel in Betracht kommt. Die Pendelschwingungen sind nämlich *Schwingungen um eine Gleichgewichtslage;* demgegenüber werden wir, da es sich für uns um die Stabilität der Bewegungen handelt, allgemein *Schwingungen um einen Bewegungszustand* besprechen.

Zunächst ein paar Worte über die Methode im allgemeinen.

Indem man die auf ihre Stabilität zu prüfende Bewegung als vollständig bekannt ansieht, denkt man sich die Lagenkoordinaten bei dieser Bewegung als bekannte Funktionen der Zeit gegeben. Man ändert nun die Bewegung durch einen Anstofs ab und fafst die Differenzen der Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung in's Auge, welche man samt ihren Differentialquotienten nach der Zeit als kleine Gröfsen voraussetzt, da man nach den kleinen Schwingungen des Systems fragt. Sodann entwickelt man die Differentialgleichungen für diese Koordinatendifferenzen aus den allgemeinen Differentialgleichungen des Systems und vereinfacht sie durch Vernachlässigung höherer Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröfsen. Es trifft sich in gewissen ziemlich allgemeinen Fällen, dafs die so vereinfachten Differentialgleichungen leicht integriert werden können. Aus ihren Lösungen beurteilt man den Charakter der abgeänderten Bewegung und zieht hieraus seine Schlüsse auf die Stabilität oder

eigentlich auf die absolute Stabilität des ursprünglich vorgelegten Bewegungszustandes. Des Genaueren wollen wir diese Methode an dem bereits mehrfach behandelten *Problem des aufrechten Kreisels* auseinandersetzen, welches ja als direkte Verallgemeinerung des gewöhnlichen Pendelproblems angesehen werden kann.

Zunächst bemerken wir, wie pag. 316, dafs die Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ zur Behandlung des aufrechten Kreisels nicht recht geeignet sind, da bei der ursprünglichen aufrechten Lage den Koordinaten $\varphi$ und $\psi$ eine selbständige Bedeutung abgeht. Wir benutzen daher wieder die Kombination

$$\varphi + \psi = \chi. \tag{1}$$

Als weitere Lagenkoordinaten mögen die Gröfsen $x$ und $y$ von pag. 331 dienen, welche die rechtwinkligen Koordinaten der auf die Äquatorebene projicierten Kreiselspitze bedeuten:

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\psi, \\ y = \sin\vartheta\sin\psi. \end{cases} \tag{2}$$

In diesen Koordinaten ist die ursprüngliche Bewegung charakterisiert durch die Gleichungen

$$x = y = 0, \qquad C\chi' = N.$$

Wir denken uns nun die Bewegung durch eine Störung abgeändert, wobei wir jedoch (wie pag. 361) von einer Veränderung der Winkelgeschwindigkeit $\chi'$ absehen wollen. Die Werte von $x$ und $y$ sind dann selbst die Differenzen zwischen den Lagenkoordinaten bei der ursprünglichen und der abgeänderten Bewegung. Es handelt sich vor allem darum, die Differentialgleichungen der $x$ und $y$, d. h. der abgeänderten Bewegung zu ermitteln. Wir benutzen das Schema der allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen. Hierzu ist erforderlich, den Ausdruck der lebendigen Kraft, sowie die Komponenten der Schwere in den Koordinaten $x$, $y$ und $\chi$ zu kennen.

Nach Gleichung (6) von pag. 156 haben wir für den symmetrischen Kreisel, den wir hier, um das Pendel bequem in die Betrachtung einzubegreifen, vor dem Kugelkreisel bevorzugen wollen,

$$T = \frac{A}{2}(\sin^2\vartheta\cdot\psi'^2 + \vartheta'^2) + \frac{C}{2}(\varphi' + \cos\vartheta\cdot\psi')^2.$$

Aus (1) und (2) folgt nun:

$$\sin\vartheta = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x},$$

$$\vartheta' = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}, \quad \psi' = \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}, \quad \varphi' = \chi' - \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}.$$

Mithin wird

$$T = \frac{A}{2}\left(\frac{(xy' - yx')^2}{x^2 + y^2} + \frac{(xx' + yy')^2}{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)}\right)$$
$$+ \frac{C}{2}\left(\chi' - (1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2})\,\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}\right)^2.$$

Andrerseits rechnen wir die potentielle Energie $V$ in die neuen Koordinaten $x$ und $y$ um. Wir haben:

$$V = P\cos\vartheta = P\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Aus diesem Werte von $V$ ergeben sich die Komponenten der Schwerkraft nach den Koordinaten $x$ und $y$ in bekannter Weise als partielle Differentialquotienten.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen wollten wir alle höheren Potenzen der als klein vorausgesetzten Gröfsen $x$ und $y$ und ihrer Differentialquotienten $x'$ und $y'$ vernachlässigen. *Es kommt dieses auf dasselbe heraus, wie wenn wir die Ausdrücke für $T$ und $V$ nach $x, x', y$ und $y'$ entwickeln und in der Entwickelung nur die quadratischen Terme beibehalten.* Thun wir dieses, so heben sich die Nenner fort und es vereinfachen sich jene Ausdrücke zu:

$$(3)\qquad \begin{cases} T = \frac{A}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{C}{2}(\chi'^2 + \chi'(xy' - yx')), \\ V = P - \frac{P}{2}(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Hierauf berechnen wir die Komponenten des Impulses $[X]$, $[Y]$ und $[\chi]$, sowie die Komponenten der Schwere $X$ und $Y$. (Die auf die $\chi$-Koordinate wirkende Komponente ist ersichtlich gleich Null.) Es ergiebt sich

$$[X] = \frac{\partial T}{\partial x'} = Ax' - \frac{C}{2}\chi' y,$$
$$[Y] = \frac{\partial T}{\partial y'} = Ay' + \frac{C}{2}\chi' x,$$
$$[\chi] = \frac{\partial T}{\partial \chi'} = C\left(\chi' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right),$$
$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = Px,$$
$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = Py,$$

wobei wir noch in dem für $[\chi]$ angegebenen Werte die Glieder zweiter Ordnung in $x$ und $y$ gegen $\chi'$ konsequenter Weise wegstreichen werden.

Die auf die $\chi$-Koordinate bezügliche Lagrangesche Gleichung lautet nun einfach

$$(4)\qquad \frac{d[\chi]}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad C\chi' = \text{const} = N.$$

Berechnen wir noch

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C}{2}\chi' y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{C}{2}\chi' x',$$

so nehmen die beiden anderen Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d[X]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x} = X, \quad \frac{d[Y]}{dt} - \frac{\partial T}{\partial y} = Y$$

mit Rücksicht auf (4) die folgende Gestalt an:

$$(5) \qquad \begin{cases} Ax'' - Ny' = Px, \\ Ay'' + Nx' = Py. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen haben, wie wir sehen, eine äufserst einfache Struktur; es sind *homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Hier mögen wir zunächst an den Spezialfall des Pendels erinnern. Setzen wir $C = 0$ und also auch $N = 0$, ferner $A = ml^2$, $P = -mgl$, indem wir an ein Pendel von der Länge $l$ denken, dessen Massenpunkt $m$ sich in der Ruhelage senkrecht unterhalb des Unterstützungspunktes befindet, so folgt aus (5)

$$(5') \qquad \begin{cases} Ax'' = Px, \\ Ay'' = Py, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x'' &= -\frac{g}{l}x, \\ y'' &= -\frac{g}{l}y. \end{aligned}$$

Die Integration liefert sofort das bekannte Schwingungsgesetz des Pendels bei hinreichend kleinem Ausschlag.

Die Gleichungen (5) unterscheiden sich von (5'), wie man sieht durch das Auftreten von Termen in $x'$ und $y'$. Diese, können wir sagen, zeigen uns das Vorhandensein einer Rotation („Gyration" um die Kreiselaxe) an; sie werden deshalb in dem Werke von Thomson und Tait als *„gyroskopische Terme"* bezeichnet. Wir beabsichtigen später auf die interessante Theorie dieser Terme (Heft IV, pag. 808) einzugehen. Hier sei nur noch bemerkt, dafs ihre Koeffizienten in (5), nämlich

$$\begin{vmatrix} 0 & -N \\ +N & 0 \end{vmatrix}$$ eine sogenannte schiefe Determinante bilden.

Die Lösung unserer Differentialgleichungen (5) ergiebt sich nach einer bekannten Regel*) in folgender Weise. Man fasse zunächst die

---

*) Die folgenden Rechnungen sind für die Integration eines beliebigen Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten typisch. Die Technik derartiger Integrationen wird namentlich im zweiten Bande der Rigid dynamics von Routh sehr weit durchgebildet.

zwei Gleichungen (5) in eine zusammen, indem man sie bez. mit 1 und $i$ multipliziert und addiert. Die komplexe Verbindung $x + iy$ heiſse $z$. So entsteht

$$Az'' + iNz' = Pz. \tag{6}$$

Darauf setze man versuchsweise an:

$$z = ae^{i\lambda t}; \tag{7}$$

dann liefert (6) folgende Bedingung für die soeben eingeführte Gröſse $\lambda$:

$$A\lambda^2 + N\lambda + P = 0. \tag{8}$$

Hieraus folgen zwei Werte $\lambda = \mu$ und $\lambda = \mu'$, nämlich

$$\left.\begin{matrix}\mu \\ \mu'\end{matrix}\right\} = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} \tag{9}$$

und zwei partikuläre Lösungen von (8), nämlich

$$z = ae^{i\mu t} \text{ bez. } z = a'e^{i\mu' t}$$

mit je einer willkürlichen Konstanten $a$ bez. $a'$; aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung durch Superposition zusammen. Die allgemeine Lösung von (8) lautet daher, wenn wir noch $a$ und $a'$ in einen reellen und imaginären Teil spalten ($a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$):

$$z = (\alpha - i\beta)e^{i\mu t} + (\alpha' - i\beta')e^{i\mu' t}. \tag{10}$$

Für das Weitere hat man zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem $\mu$ und $\mu'$ reell oder komplex sind. *Ersteres tritt ein, wenn* $N^2 - 4AP > 0$, *letzteres, wenn* $N^2 - 4AP < 0$ *ist.*

I) Ist $N^2 - 4AP > 0$, so schreiben wir statt (10), indem wir $z$ in seinen reellen und imaginären Teil auflösen:

$$\begin{cases} x = \alpha \cos \mu t + \beta \sin \mu t + \alpha' \cos \mu' t + \beta' \sin \mu' t, \\ y = \beta \cos \mu t - \alpha \sin \mu t + \beta' \cos \mu' t - \alpha' \sin \mu' t. \end{cases} \tag{11}$$

Als Anfangsbedingungen schreiben wir etwa vor:

$$x = y = y' = 0.$$

Dann folgt aus (11):

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \mu\alpha + \mu'\alpha' = 0,$$

d. h.

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \beta = -\beta' = \frac{\eta}{2}.$$

Die hier eingeführte und noch disponible Gröſse $\eta$ entspricht der unbestimmt gelassenen Gröſse der Anfangsgeschwindigkeit $x'$.

Nunmehr ergiebt sich aus (11)

$$\begin{cases} x = \frac{\eta}{2}(\sin \mu t - \sin \mu' t) = \eta \cos \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t, \\ y = \frac{\eta}{2}(\cos \mu t - \cos \mu' t) = -\eta \sin \frac{\mu + \mu'}{2} t \cdot \sin \frac{\mu - \mu'}{2} t. \end{cases} \tag{12}$$

Berechnen wir schliefslich $\frac{\mu+\mu'}{2}$ und $\frac{\mu-\mu'}{2}$ aus (9), so können wir für (12) schreiben:

$$(13)\quad \begin{cases} x = \eta \cos \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} t, \\ y = \eta \sin \frac{N}{2A} t \cdot \sin \frac{\sqrt{N^2 - 4AP}}{2A} t. \end{cases}$$

Somit sind wir genau auf die pag. 331 entwickelten Gleichungen (11) zurückgeführt.

II) Betrachten wir nun den zweiten Hauptfall $N^2 - 4AP < 0$, wo $\mu$ und $\mu'$ komplex werden. Wir setzen

$$\mu = \nu + i\nu', \quad \mu' = \nu - i\nu',$$

lösen (10) in einen reellen und imaginären Teil auf und erhalten

$$(14)\quad \begin{cases} x = + \{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t, \\ y = - \{\beta e^{-\nu' t} + \beta' e^{+\nu' t}\} \cos \nu t + \{\alpha e^{-\nu' t} + \alpha' e^{+\nu' t}\} \sin \nu t. \end{cases}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$x = y = y' = 0$$

folgt sodann

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = -\beta + \beta' = 0,$$

d. h.

$$\beta = \beta' = 0, \quad \alpha = -\alpha' = \frac{\eta}{2}.$$

Mithin wird:

$$(15)\quad \begin{cases} x = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \cos \nu t, \\ y = \eta \left(\frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2}\right) \sin \nu t. \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = -\frac{N}{2A}, \\ \nu' = \frac{\sqrt{4AP - N^2}}{2A}. \end{cases}$$

III) Schliefslich müssen wir auch noch den Grenzfall durchrechnen, wo $N^2 - 4AP = 0$ wird, wo also $\mu$ und $\mu'$ zusammenfallen. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (8) mit der erforderlichen Anzahl willkürlicher Konstanten hat man in diesem Falle in der folgenden Form anzusetzen:

$$z = (a + a' t) e^{i\mu t}.$$

Für den reellen und imaginären Teil von $z$ ergiebt sich jetzt, wenn wir wieder $a = \alpha - i\beta$, $a' = \alpha' - i\beta'$ machen:

$$x = + (\alpha + \alpha' t) \cos \mu t + (\beta + \beta' t) \sin \mu t,$$
$$y = - (\beta + \beta' t) \cos \mu t + (\alpha + \alpha' t) \sin \mu t.$$

Unter den früheren Anfangsbedingungen folgt ferner

$$\alpha = \beta = \beta' = 0$$

und, indem wir $\alpha'$ durch $\eta$ ersetzen:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = \eta t \cos \mu t, \\ y = \eta t \sin \mu t, \end{cases} \quad \mu = -\frac{N}{2A}.$$

*Wir wollen nun die in den Gleichungen (13), (15) und (16) gewonnenen Resultate im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen diskutieren.*

Die durch (13) dargestellte Bewegung der Kreiselspitze ist ihrem zeitlichen Verlaufe nach vollkommen periodisch. Sie stellt also eine Schwingung dar und zwar eine kleine Schwingung, weil die maximale Entfernung $\eta$ der Kreiselspitze von ihrer ursprünglichen Lage um so kleiner ausfällt, je kleiner wir den Anfangswert von $x'$, d. h. die anfängliche Störung wählen. Nach (12) können wir diesen Schwingungsvorgang übrigens auch auffassen als Überlagerung zweier einfach-harmonischer Schwingungen („Fundamentalschwingungen"), von den Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\mu'}$.

Anders die durch (15) und (16) gegebenen Bewegungen. Diese besitzen einen periodischen und einen aperiodischen Bestandteil. Letzterer bewirkt, daſs die Entfernung des Punktes $x, y$ von der Ruhelage, nämlich

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \eta \frac{e^{-\nu' t} - e^{+\nu' t}}{2} \text{ bez. } = \eta t$$

mit wachsendem $t$ gröſser und gröſser wird, genauer gesagt, daſs sie bei hinreichend groſsem $t$ jede beliebige Grenze übersteigt, wie klein auch der ursprüngliche Anstoſs gewesen sein möge. Die Bewegung ist alsdann keine Schwingung und sicherlich keine kleine Schwingung. Die Bahnkurve hat vielmehr eine Spiralengestalt. Gleichung (15) stellt im wesentlichen eine logarithmische, Gleichung (16) eine Archimedische Spirale vor.

Welche Schlüsse wird man nun aus diesem Verhalten bezüglich der Stabilität der aufrechten Kreiselbewegung zu ziehen haben? Wir wollen uns dabei zunächst auf einen völlig naiven Standpunkt stellen, von dem aus die in den rechnenden Naturwissenschaften überall übliche Vernachlässigung höherer Potenzen ohne Bedenken acceptiert wird. Von diesem Standpunkte aus werden wir die Gleichungen (13), (15) und (16), wenn auch nicht als genaue, so doch als angenäherte Beschreibung der wirklichen Bahn ansprechen und werden direkt sagen:

*Im ersten Hauptfalle $N^2 - 4AP > 0$ ist die Bewegung der Kreiselspitze stabil oder sogar in unserer Terminologie absolut stabil. Im zweiten Hauptfalle $N^2 - 4AP < 0$, sowie im Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ dagegen ist die Bewegung instabil.*

Zu dieser Schlufsweise haben wir nun Stellung zu nehmen.

Wollen wir dieselbe zunächst nach ihrem Erfolge beurteilen, so werden wir sagen müssen: *Die Unterscheidung zwischen den stabilen und den labilen Fällen wird im allgemeinen, aber auch nur im allgemeinen richtig getroffen.* In der That ist ja die Ungleichung $N^2 - 4AP \gtrless 0$ unser wohlbekanntes Stabilitätskriterium. Dabei wird aber der Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$ hier falsch klassifiziert; er erscheint den labilen Fällen zugeteilt, während er (vgl. pag. 323) bei strenger Methode durchaus den stabilen Fällen zuzurechnen ist.

Ferner sehen wir, was die Gestalt der Bahnkurven angeht: *Im ersten Hauptfalle wird die Bewegung der Kreiselspitze durch unsere jetzige Methode richtig wiedergegeben, d. h. mit um so gröfserer Annäherung, je kleiner der ursprüngliche Anstofs war. Im zweiten Hauptfalle dagegen, sowie im Grenzfalle liefern unsere jetzigen Formeln ein ganz falsches Bild der Bewegung.* In der That unterschied sich in strenger Behandlung z. B. die Bahnkurve für $N^2 - 4AP = 0$ ihrem qualitativen Charakter nach durch nichts von den Bahnkurven $N^2 - 4AP > 0$. Auch die Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP < 0$ besafsen im allgemeinen dieselben Periodicitätseigenschaften, wie die stabilen Bahnkurven im Falle $N^2 - 4AP > 0$; der Spiralencharakter, welcher nach den jetzigen Formeln diesen Bahnkurven allgemein anhaften soll, kam in Wirklichkeit nur in einem besonderen Spezialfalle zum Vorschein. Man könnte auch daran erinnern, dafs die Gröfsen $x$ und $y$ ihrer geometrischen Bedeutung nach sicher kleiner als 1 sein müssen, während sie den Formeln (15) und (16) zufolge beliebiger Werte fähig sein sollen.

Noch übler steht die Sache, wenn wir unser Verfahren auf seine innere Berechtigung hin prüfen. Betrachten wir zunächst den vermeintlichen aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Nachweis, dafs die aufrechte Bewegung im Falle $N^2 - 4AP > 0$ stabil sei.

Indem wir in den Differentialgleichungen der Bewegung bez. in den Ausdrücken für $T$ und $V$ diejenigen Vernachlässigungen eintreten lassen, welche nur (oder höchstens) im stabilen Falle gerechtfertigt sind, machen wir von vornherein die Annahme, dafs die Bewegung stabil sei. Wir führen dann die oben angegebenen Rechnungen aus und finden, dafs im Falle $N^2 - 4AP > 0$ das Resultat der Rechnung unserer ursprünglichen Annahme nicht gerade widerspricht. Wollten wir nun hieraus umgekehrt auf die Richtigkeit jener Annahme schliefsen, so würden wir uns eines offenbaren „circulus vitiosus“ schuldig machen. Nichtsdestoweniger wird dieser Schlufs bei der Methode der kleinen Schwingungen regelmäfsig angewandt.

Unsere hiermit formulierte Kritik ist nicht etwa neu. Wir wollen in dieser Hinsicht einige Worte von Dirichlet citieren, welche im Anfange der oben citierten Arbeit über die Stabilität des Gleichgewichtes vorkommen. Das im vorigen Paragraphen besprochene Kriterium des Gleichgewichtes war ursprünglich von Lagrange gerade nach der Methode der kleinen Schwingungen begründet. Dirichlet setzt die Unhaltbarkeit dieser Begründung auseinander und bemerkt unter anderem: „Es kann mit Recht bezweifelt werden, ob Gröfsen, für die man unter der *Voraussetzung*, dafs sie immer klein bleiben — denn nur in dieser liegt die Befugnis, die höheren Glieder zu vernachlässigen — kleine Grenzen findet, nach einer beliebigen Zeit wirklich in diese oder überhaupt nur in enge Grenzen eingeschlossen sein werden."*)

Man sieht übrigens an diesem Beispiele, wie lange es dauert, bis die Ergebnisse der strengeren mathematischen Forschung in den angewandten Wissenschaften Eingang und Berücksichtigung finden. Praktisch liegt eben die Sache so, dafs eine bessere Methode nicht vorhanden ist; wir werden daher auch selbst in Kap. VII—IX ausgiebig von ihr Gebrauch machen müssen.

Günstiger scheinbar stehen die Chancen für den aus unserer Methode fliefsenden vermeintlichen Nachweis, dafs die Bewegung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ instabil sei. Zu Beginn der Rechnung machen wir nämlich, wie gesagt, bei der Vernachlässigung der höheren Glieder die ausdrückliche Annahme, dafs die Werte von $x$ und $y$ dauernd klein bleiben oder, genauer gesagt, durch Wahl des Anstofses beliebig klein gemacht werden können. Diese Annahme wird nun durch das Resultat der Rechnung im Falle $N^2 - 4AP \leqq 0$ in unzweideutiger Weise ad absurdum geführt. Es scheint daher der Schlufs berechtigt, dafs jene Annahme unzulässig ist, dafs also $x$ und $y$ nicht dauernd klein bleiben, und dafs die Bewegung in diesem Falle instabil ist.

Genau genommen wird aber hierdurch nicht die Unzulässigkeit der Annahme kleiner $x$, $y$, sondern nur die Unzulässigkeit der getroffenen Vernachlässigungen dargethan. Es könnte sehr wohl sein, dafs die $x$ und $y$ und also auch die höheren Glieder in den fraglichen Entwicklungen dauernd beliebig klein aber nicht beliebig klein gegen die beibehaltenen ersten Glieder gemacht werden können, sofern nämlich letztere für besondere Werte der Konstanten identisch verschwinden. In diesem Falle wäre die Vernachlässigung der höheren Glieder offenbar unberechtigt; die betreffende Bewegung könnte dann, nach der

---

*) Ähnlich äufsert sich Jacobi in der vierten Vorlesung über Dynamik. Vgl. Ges. W. Supplementb. pag. 30.

Methode der kleinen Schwingungen behandelt, instabil erscheinen, während sie in Wirklichkeit stabil sein könnte.

Solch ein Fall liegt gerade in dem Grenzfalle $N^2 - 4AP = 0$ vor, bei dem ja die Stabilitätsentscheidung, wie sie durch die Methode der kleinen Schwingungen geliefert wird, irreführend ist.

**Der Nutzen der Methode besteht daher, von diesem rigorosen Standpunkte aus zusammenfassend beurteilt, lediglich darin, dafs sie für manche stabile Fälle (in unserem Beispiel die Fälle $N^2 - 4AP > 0$) auf bequemem Wege Annäherungsformeln liefert, wobei allerdings der Grad der Annäherung und die Berechtigung der Formeln zunächst unkontrollierbar bleiben.**

Von einem mehr praktischen Standpunkte aus wird man dieses Verdikt allerdings wesentlich modifizieren müssen. Solange man keine allgemeine einwandfreie Methode hat, wird man mit einer unstrengen vorlieb nehmen müssen, zumal die Probleme, welche bisher mit der Methode der kleinen Schwingungen behandelt worden sind, das gröfste Interesse beanspruchen und nicht einfach zurückgeschoben werden können.

Natürlich bezieht sich unsere Kritik nur auf den zeitigen Stand der Methode, nicht auf die Methode selbst. Diese hat ohne Frage einen wertvollen Kern von Wahrheit, welcher, von Schlacken befreit, nicht nur vorläufige, sondern auch zuverlässige Aufschlüsse über die interessantesten Fragen der modernen Mechanik verspricht. Vermutlich wird es nur nötig sein, der Methode einige Einschränkungen und Verschärfungen hinzuzufügen.

In welcher Richtung diese Verschärfungen zu suchen sind, kann nach dem Früheren nicht zweifelhaft sein. *Man mufs aus den exakten Differentialgleichungen den Bewegungsvorgang wenigstens im Umrifs herzuleiten und auf Grund einer solchen allgemeinen Kenntnis der Bewegung den Fehler abzuschätzen suchen, den man in der Methode der kleinen Schwingungen bei der Vernachlässigung der höheren Terme begeht.* In solcher Weise haben wir in der That zu Ende des vorigen Kapitels unsere Formeln zur näherungsweisen Berechnung der Kreiselbewegung gewonnen, welche sich ja mit den aus der Methode der kleinen Schwingungen folgenden Näherungsformeln in allen den Fällen als identisch erwiesen, wo die letzteren brauchbar waren. Allerdings wird sich ein derartiger Weg in seltenen Fällen einschlagen lassen. Mehr Aussicht auf Erfolg dürfte oft die Weiterführung der Entwicklung mittels der quadratischen und höheren Glieder haben, wie sie z. B. auch von Korteweg in der im Anhang, p. 947 erwähnten Arbeit versucht wird.

In der Litteratur liegen zahlreiche Bestrebungen in der angedeuteten Richtung bereits vor. Wir erwähnen die Arbeiten von Hrn. Liapounoff*), und namentlich Poincaré's**) Untersuchungen zur Himmelsmechanik, sowie überhaupt die modernen Beiträge zur Störungsrechnung, welche sich zum grofsen Teil gerade mit der mathematischen Präcisierung der in der Methode der kleinen Schwingungen vorkommenden Entwicklungen befassen. Auch in den Werken von Hrn. Routh***), welche die reichste Fundgrube für Stabilitätsfragen sind, finden sich bereits Ansätze zur mathematischen Verschärfung der Methode vor.

## § 9. Über die Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels.

Wir wollen jetzt über die spärlichen Resultate berichten, welche man bisher bezüglich der Bewegung des schweren allgemeinen Kreisels gewonnen hat.

Die Differentalgleichungen für den allgemeinen Kreisel können etwa nach dem Schema der Eulerschen Gleichungen (s. pag. 141, Gleichung (3)) gebildet werden. Wir wollen dieselben nicht hinschreiben, sondern nur ihre mechanische Bedeutung wiederholen: Sie besagen, dafs die Impulsänderung in jedem Momente gleich dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere ist. Um die Axe und Gröfse desselben zu bestimmen, markieren wir im Körper den Schwerpunkt $S$; er habe im $XYZ$-System die Koordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Dabei setzen wir der Allgemeinheit wegen voraus, dafs die Richtung $OS$ mit keiner der Hauptaxen, welche zu Koordinatenaxen gewählt sein mögen, zusammenfalle. Die Axe des Drehmomentes der Schwere wird alsdann die auf $OS$ und der Vertikalen gleichzeitig senkrechte Gerade. Seine Gröfse beträgt $P \sin \vartheta$, wo $P = mgE$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die Entfernung der Punkte $O$ und $S$, $\vartheta$ gleich dem Winkel zwischen der Vertikalen und dem Halbstrahl $OS$ gesetzt ist.

Ähnlich wie im dritten Paragraphen des vorigen Kapitels können wir auch hier unmittelbar eine Aussage über das Verhalten des Impulses machen, welche analytisch ein erstes Integral der Bewegungs-

---

*) Vgl. oben pag. 356.

**) Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, vgl. z. B. Cap. IV, wo allerdings (pag. 177) die Definition der Stabilität noch ganz im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen formuliert wird.

***) Rigid dynamics, Part II, Cap. VII, Stability of motion, Cap. VII. Die hier gegebenen Ausführungen liefern bereits darüber Aufschlufs, weshalb in unserem Beispiel für den Grenzfall $N^2 - 4AP = 0$, wo die Perioden der beiden Fundamentalschwingungen zusammenfallen, die Entscheidung des Stabilitätscharakters auf Grund lediglich der linearen Entwicklungsterme falsch ausfallen kann. (Das Werk ist auch in deutscher Übersetzung von A. Schepp, Leipzig 1898, erschienen.)

gleichungen liefert. Wegen der horizontalen Lage der Axe des Schweremomentes schreitet nämlich der Impuls-Endpunkt notwendig dauernd in horizontaler Richtung vorwärts. *Die Vertikalkomponente des Impulses ist also konstant*, wir haben wieder

$$n = \text{const.}$$

Außerdem gilt natürlich auch jetzt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen wir ja im zweiten Kapitel für jeden starren Körper und jedes konservative Kraftsystem abgeleitet haben:

$$T + V = h.$$

Wollen wir diese Gleichung in Worte fassen, so haben wir uns der geometrischen Bedeutung des Ausdrucks der lebendigen Kraft (vgl. pag. 96) zu erinnern und haben ferner die potentielle Energie $V = mg \cdot E \cos \vartheta$ in naheliegender Weise zu interpretieren. Wir können dann sagen:

*Das halbe skalare Produkt aus Impuls- und Drehungsvektor vermehrt um das Produkt aus dem Gewicht des Kreisels in die vertikale Erhebung des Schwerpunkts bleibt während der Bewegung des allgemeinen Kreisels konstant.*

Dagegen verliert in unserem Falle die vom symmetrischen Kreisel her bekannte Gleichung $N = \text{const}$ ihre Gültigkeit, welche offenbar lediglich eine Folge der symmetrischen Massenverteilung war.

Die vollständige analytische Beherrschung der unsymmetrischen Kreiselbewegung ist aber auf Grund der obigen beiden Integrale noch nicht möglich. Bevor wir über die weiteren Versuche in dieser Richtung sprechen, wird es gut sein, das zu erreichende Ziel schärfer ins Auge zu fassen. Das Ziel mufs offenbar dieses sein: eine klare Vorstellung von dem Bewegungsvorgange zu gewinnen. Derjenige Weg wird der beste sein, der am direktesten auf dieses Ziel hinführt.

Demgegenüber erscheint in zahlreichen Arbeiten über Mechanik, z. B. in den sogleich zu nennenden, der Zielpunkt wesentlich verschoben. Man gewinnt den Eindruck, als ob die wichtigste Aufgabe der analytischen Mechanik darin bestände, ein Problem auf Quadraturen zurückzuführen bez. solche Probleme aufzufinden, die sich durch Quadraturen lösen lassen. In Wirklichkeit ist doch aber die Zurückführung auf Quadraturen nur ein Mittel zum Zweck, welches noch dazu in den seltensten Fällen anwendbar ist und welches selbst da, wo es anwendbar ist, seinen Zweck nicht einmal vollständig erreicht, sofern nämlich die gefundenen Integrale eine komplizierte Bauart haben. Durch später zu erwähnende Untersuchungen über die Möglichkeit von Integrationen ist für diese Klasse von Arbeiten ein gewisser Abschluß schon erreicht.

Wenn es sich im Speziellen so trifft, daſs ein Problem auf Quadraturen oder allgemeiner auf bekannte Funktionen führt, so wird man natürlich von diesem Umstande gern Nutzen ziehen. Dabei wird man sich aber gegenwärtig halten, daſs mit der geschlossenen analytischen Darstellung der Integrale nur der erste Schritt gethan ist und daſs die Hauptaufgabe darin bestehen muſs, auf Grund dieser Darstellung zu einem vollständigen geometrischen und mechanischen Verständnis der Bewegung zu gelangen.

In allen solchen Fällen, wo eine Zurückführung auf bekannte Funktionen nicht möglich ist, wird man dagegen ein anderes Verfahren einschlagen müssen — ein Verfahren, welches vielfach bei der Integration von Differentialgleichungen geboten ist: Man suche sich zunächst über den *qualitativen* Verlauf der durch die Differentialgleichungen definierten Bahnkurven eine Vorstellung zu bilden, indem man etwa die singulären Stellen der Differentialgleichungen, die instabilen Bewegungsfälle, die möglichen periodischen und asymptotischen Bahnkurven u. s. w. studiert. Dann erst entwickle man aus dieser vorläufigen Kenntnis heraus geeignete konvergente oder nichtkonvergente *Näherungsmethoden*, welche die *quantitative* Berechnung der Bahn mit beliebiger oder begrenzter Genauigkeit ermöglichen. Als Vorbild können dabei die Untersuchungen Poincarés über das Dreikörperproblem gelten, der seine groſsen Erfolge gerade der eben skizzierten freieren und allgemeineren Auffassung des Integrationsgeschäftes verdankt.

In diesem Sinne ist für die Behandlung des unsymmetrischen Kreisels wenig geschehen. Die zunächst zu nennenden Arbeiten gehen vielmehr ausschlieſslich auf Fälle geschlossener analytischer Darstellbarkeit aus.

Frau S. Kowalevski*) findet, daſs auſser den oben genannten Integralen noch ein weiteres in ziemlich einfacher algebraischer Form angegeben werden kann, wenn die Massenverteilung des Kreisels den folgenden Bedingungen genügt: Das Trägheitsellipsoid sei wieder ein Rotationsellipsoid ($A = B$), der Schwerpunkt liege aber nicht auf der Figurenaxe, sondern in der Äquatorebene ($\zeta = 0$); auſserdem sei

$$2C = A (= B).$$

Unter diesen Annahmen gelingt es, die allgemeine Bewegung vollständig zu behandeln

*) Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Mathematica, Bd. 12. 1888.

Frau Kowalevski*) drückt die Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten des Kreisels durch zwei Hülfsgröfsen aus, welche ihrerseits mit der Zeit durch Integrale zusammenhängen, in denen die Quadratwurzel aus einem Ausdrucke fünften Grades vorkommt, also hyperelliptische Integrale. F. Kötter**) hat es sodann als vorteilhaft erkannt, eine Zerlegung der Bewegung in die drehende Bewegung eines neuen Axenkreuzes mit konstanter Vertikalkomponente der Drehungsgeschwindigkeit und in eine einfache Drehung um die $Z$-Axe dieses Axenkreuzes vorzunehmen. Joukowsky hat später den Kowalevskischen Fall geometrisch diskutiert.***)

Die allgemeine Frage nach allen Fällen des schweren Kreisels, in denen aufser den beiden genannten noch ein drittes algebraisches Integral vorhanden ist, ist zuerst von Herrn R. Liouville†) in Angriff genommen worden, über ihre Weiterführung vgl. Heft IV, S. 951 f.

Von einem anderen Standpunkte, dem der allgemeinen Lie'schen Gruppentheorie, gehen die Untersuchungen der Herren Levi-Cività††) und Liebmann†††) aus. Die genannten Autoren fragen, wie die Massenverteilung (die kinetische Energie) und die Kräfteverteilung (die potentielle Energie) beschaffen sein müssen, wenn zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare erste Integrale möglich sein sollen. In diesem Falle ist man sicher, dafs sich das Problem durch Quadraturen erledigen läfst.

Die Fragestellung ist hier insofern eine weitere wie in dem vorhergenannten Falle, als es sich nicht speziell um den schweren Kreisel handelt, vielmehr das Gesetz der äufseren Kraft selbst passend bestimmt werden soll. Die Untersuchung ergiebt im Ganzen 25 mögliche Fälle, von denen jedoch die meisten imaginär sind (d. h. einer mechanisch nicht realisierbaren Massenverteilung entsprechen). Dafs übrigens hiermit die Frage nach der Gesamtheit der integrabeln Fälle nicht erledigt ist, zeigt schon der in der Liebmannschen Tabelle nicht enthaltene Fall der Frau Kowalevski, wo man mit Quadraturen zum Ziele gelangt, ohne dafs zwei in den Geschwindigkeitskoordinaten lineare Integrale vorhanden sind.

---

*) Bez. Herr F. Kötter: *Sur le cas traité par M^me. Kowalevski* etc. Acta Mathem. Bd. XVII, 1893.

**) Acta Mathematica Bd. XVII, 1893.

***) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. IV, 1895.

†) Vgl. Acta Mathematica, Bd. XX, 1897.

††) Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. Accademia die Lincei, 1896.

†††) Vgl. oben pag. 161.

Wie man schon aus den hier gegebenen Andeutungen erkennt, gehen diese Untersuchungen von Levi-Cività und Liebmann durchaus nach der abstrakt-mathematischen Seite hin vor. —

Während es sich in den bisher aufgeführten Fällen darum handelte, die *allgemeine* Bewegung des unsymmetrischen Kreisels aufzufinden und analytisch darzustellen, wollen wir jetzt etwas eingehender über zwei Fälle *particulärer* Kreiselbewegung berichten, welche man in analytischer und geometrischer Hinsicht vollkommen beherrscht. Der eine von diesen Fällen ist von Herrn W. Hefs*) bemerkt worden; sein Studium wurde später von einer Anzahl russischer Mathematiker**) vertieft. Der andere Fall ist von Herrn O. Staude***) behandelt. In dem Hefs'schen Falle wird der Charakter der einzuleitenden Bewegung einer gewissen einfachen Bedingung unterworfen; gleichzeitig wird auch eine besondere Voraussetzung über die Lage des Schwerpunktes im Körper gemacht. In den von Herrn Staude untersuchten Bewegungen dagegen bleibt die Massenverteilung ganz allgemein, während der Charakter der Bewegung dafür in ausgiebigerer Weise spezialisiert wird.

Man bemerke übrigens vorab, dafs der Grad der Partikularisation nur im Staudeschen Falle ein höherer ist, wie in dem Kowalevskischen oder wie im Falle des schwerelosen unsymmetrischen oder des schweren symmetrischen Kreisels. Sonst werden nämlich *drei*, hier *vier* beschränkende Bedingungen vorangestellt; in den drei letzten Fällen beziehen sich diese Bedingungen lediglich auf die Massenverteilung, im Falle von Hefs teils auf die Massenverteilung teils auf die Bewegung, im Staudeschen Falle lediglich auf die Beschaffenheit der Bewegung.

Um in naturgemäfser Weise auf den Hefsschen Fall der Kreiselbewegung hinzuleiten, wollen wir uns die Frage stellen, ob es unter Umständen bei einem unsymmetrischen Kreisel eintreten kann, *dafs der Impuls dauernd in einer durch den Unterstützungspunkt O gehenden, im Körper festen Ebene enthalten sei.*†) Analytisch gewandt, bedeutet dieses,

---

*) Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen u. s. w. Math. Ann. Bd. 37, 1890.

**) Vgl. in analytischer Hinsicht P. Nekrassoff: *Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe*, Math. Ann. Bd. 47, 1896, wo weitere Litteraturangaben zu finden sind, in geometrischer Hinsicht N. Joukowsky, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. III 1892/93.

***) *Über permanente Rotationsaxen*, Crelles Journal, Bd. 113, 1894. Vgl. auch Routh, Rigid dynamics, Bd. II, art. 214.

†) Dabei schliefsen wir den Fall aus, wo der Impulsvektor im Körper absolut fest oder der Richtung nach fest ist. Der erstere Fall führt gerade auf die von Herrn Staude untersuchten Rotationen, der letztere auf die Pendelungen von Mlodzieiowski (Moskau 1894); vgl. Heft IV, S. 952.

*ob unter Umständen ein in den Impulskoordinaten $L$, $M$, $N$ lineares homogenes Integral mit konstanten Koeffizienten möglich ist.*

Die Lage des Impulses zu irgend einer Zeit ergiebt sich, wenn wir den jeweils vorhandenen Impuls mit dem unendlich kleinen Drehstofs der Schwere zusammensetzen. Die Axe des letzteren steht auf der durch den Schwerpunkt $S$ und den Unterstützungspunkt $O$ gehenden Vertikalebene senkrecht. Der Endpunkt des Impulses schreitet also im Raume stets senkrecht gegen die Axe $OS$, die wir die „Schwerpunktsaxe" nennen wollen, fort.

Relativ zum körperfesten System kommt zu dieser Änderung noch die „zentrifugale Drehkraft" hinzu (vgl. die Abl. der Eulerschen Gleichungen, Kap. III, pag. 138), die stets senkrecht auf dem Impulsvektor und dem jeweiligen Rotationsvektor steht. Soll nun der Impuls, also auch die Impulsänderung in einer festen Ebene $E$ des Körpers liegen, so liegt es nahe, diese Forderung für beide Teile der Impulsänderung getrennt zu stellen. Die erste Forderung verlangt, daß $E$ die durch $O$ gelegte Normalebene zur Schwerpunktsaxe sei; ihre Gleichung lautet, wenn wie früher $\xi, \eta, \zeta$ die Koordinaten des Schwerpunktes in dem Hauptträgheitskreuz $XYZ$ bedeuten:

$$\xi L + \eta M + \zeta N = 0.$$

Dies ist bereits der Form nach das von Herrn Hefs gefundene partikuläre Integral.

Die zweite Forderung ergiebt sodann, dafs die Normale zur Impuls- und Rotationsaxe gleichfalls in diese Ebene hineinfällt. Dies findet aber nur dann statt, *wenn die Rotationsaxe beständig in der durch Impuls- und Schwerpunktsaxe bestimmten Ebene enthalten ist.*

Durch unsere letzte Forderung wird der Massenverteilung eine Bedingung auferlegt, die wir jetzt weiter zu untersuchen haben. Wir erinnern zu dem Zwecke an den geometrischen Zusammenhang zwischen der Lage des Drehungsvektors und der des Impulsvektors. Nach pag. 102 können wir die Richtung des Impulsvektors aus der des Drehungsvektors finden, wenn wir in einem der Durchstofsungspunkte der Drehungsaxe mit dem Trägheitsellipsoide

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

die Tangentialebene konstruieren und von $O$ aus auf diese das Lot fällen; dieses giebt alsdann die Richtung des Impulsvektors an. In unserem Falle ist es indessen bequemer, statt mit dem Trägheitsellipsoid, dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Geschwindigkeitskoordinaten* angiebt, mit einem Ellipsoide zu operieren,

welches man das „reciproke Trägheitsellipsoid“ nennt und dessen linke Seite den *Ausdruck der doppelten lebendigen Kraft in den Impulskoordinaten* darstellt. Die Gleichung dieses Ellipsoides ist:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1.$$

Man erkennt dann, genau so wie pag. 101 und 102, die Richtigkeit der folgenden Konstruktion: Um die Richtung des Drehungsvektors aus der des Impulsvektors zu finden, markiere man auf dem reciproken Trägheitsellipsoide die Durchstoſsungspunkte der Impulsaxe und konstruiere in einem dieser Punkte die Tangentialebene an unser Ellipsoid; dann liefert das von $O$ auf diese Ebene gefällte Lot die Richtung des Drehungsvektors.

Wir denken uns nun in dem reciproken Trägheitsellipsoide die Schwerpunktsaxe $OS$ gezogen und durch $O$ ihre Normalebene $e$ gelegt, in welcher der Impulsvektor enthalten sein soll. Diese Ebene $e$ schneidet das Ellipsoid in einem Kegelschnitt, welcher, wie wir jetzt zeigen werden, ein *Kreis* sein muſs.

Sei nämlich $P$ irgend ein Punkt des Kegelschnittes und $t$ seine Tangente in $P$. Dann giebt $OP$ eine mögliche Richtung der Impulsaxe an. Durch $t$ werde ferner die Tangentialebene $e'$ an das Ellipsoid gelegt und von $O$ auf diese Ebene das Lot $OQ$ gefällt, welches die zur Impulsaxe $OP$ gehörige Richtung der Drehungsaxe bestimmt. Nach der obigen Bedingung müssen die Geraden $OP$, $OQ$ und $OS$ beständig in einer Ebene liegen. Es steht aber unsere Tangente $t$ sowohl auf $OQ$ wie auf $OS$ senkrecht, da sie die Schnittlinie der auf $OQ$ und $OS$ in $Q$ bez. $O$ errichteten Normalebenen $e$ und $e'$ darstellt. Mithin steht $t$ auch auf $OP$ senkrecht. Unser Kegelschnitt hat also die Eigenschaft, daſs die Tangente in jedem seiner Punkte auf dem vom Mittelpunkte auslaufenden Radiusvektor senkrecht steht. Unser Kegelschnitt ist also in der That ein Kreis.

Damit ist die der Massenverteilung des Kreisels aufzuerlegende Bedingung gefunden. Wir können sagen: *Soll der Impulsvektor dauernd in der Normalebene e der Schwerpunktsaxe enthalten sein, so muſs diese Ebene das reciproke Trägheitsellipsoid in einem Kreise schneiden;* oder auch: *Es muſs der Schwerpunkt auf dem in O errichteten Lote zu einer der Kreisschnittebenen des reciproken Trägheitsellipsoides liegen.*

Dies ist die geometrische Formulierung der fraglichen Bedingung in derjenigen Form, welche ihr von Herrn Joukowsky (vgl. das Citat auf pag. 378) gegeben ist. Herr Heſs drückt dieselbe Thatsache in analytischer Formulierung aus. Wir gelangen zu der letzteren, wenn wir bemerken, daſs die beiden durch $O$ gehenden Kreisschnittebenen

des reciproken Trägheitsellipsoides (unter der Voraussetzung $A > B > C$) durch die Gleichung gegeben werden

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) X^2 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) Z^2.$$

Da nun der Schwerpunkt $(\xi, \eta, \zeta)$ auf der Normalen von einer dieser Ebenen liegen soll, so folgt die Proportion

$$\xi^2 : \eta^2 : \zeta^2 = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} : 0 : \frac{1}{B} - \frac{1}{C},$$

d. h.

$$\eta = 0, \quad \xi^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \zeta^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

Dies sind die von Herrn Hefs angegebenen analytischen Bedingungen für die Möglichkeit seines Bewegungsfalles.

Der mechanische Charakter des Hefs'schen Bewegungsfalles ist ein recht einfacher. Wir werden sehen, dafs es sich dabei um die direkte Verallgemeinerung der bekannten *Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels* handelt.

Wir denken uns zu dem Zwecke den Körper anfangs in stabiler Gleichgewichtslage, also die Schwerpunktsaxe senkrecht nach unten gerichtet und den Körper ohne Rotation. Darauf drehen wir die Schwerpunktsaxe um irgend einen Winkel aus der Vertikalen heraus und überlassen den Körper dem Einflufs der Schwere, indem wir dafür sorgen, dafs zu Beginn der Bewegung entweder überhaupt keine Drehung vorhanden ist oder doch nur ein solcher Drehimpuls hinzugefügt wird, dessen Komponente um die Schwerpunktsaxe gleich Null ist, dessen Axe also in der Normalebene $e$ der Schwerpunktsaxe liegt. Alsdann bleibt, wie wir gesehen haben, wenn noch die Bedingung erfüllt ist, dafs der Schwerpunkt auf einer der Kreisschnittnormalen des reciproken Trägheitsellipsoides liegt, der Impulsvektor dauernd in der Ebene $e$ enthalten.

Gehen wir nun von dem unsymmetrischen zu dem symmetrischen Kreisel über, so werden wir durch eben dieses Verfahren auf die gewöhnliche oder sphärische Pendelbewegung geführt. Die Voraussetzung für das Eintreten der Pendelbewegung bestand in der That (vgl. pag. 215, Fig. 36) beim symmetrischen Kreisel darin, dafs die Komponente $N$ des Impulses in Richtung der Figurenaxe (welche beim symmetrischen Kreisel zugleich Schwerpunktsaxe ist), anfangs gleich Null war. Und zwar ergab sich die Bewegung des „gewöhnlichen" oder die des „sphärischen" Pendels, je nachdem wir den ruhenden Kreisel bei irgend einer Lage der Figurenaxe ohne einen Anstofs dem Einflufs der Schwere überliefsen oder nach Hinzufügung eines rein seitlichen Anstofses, d. h. eines Drehimpulses,

dessen Axe senkrecht gegen die Figurenaxe gerichtet war und also in der Normalebene der Schwerpunktsaxe, d. i. in der Äquatorebene des symmetrischen Kreisels lag. Alsdann blieb der Impuls dauernd in der Äquatorebene enthalten, weil die Impulskomponente $N$ ihren Anfangswert 0 dauernd beibehält. Gleichzeitig wird die Bedingung, welche wir im Falle des unsymmetrischen Kreisels hinsichtlich der Lage des Schwerpunktes hinzufügen mufsten, beim symmetrischen Kreisel von selbst erfüllt, weil hier die Kreisschnitte des reciproken Trägheitsellipsoides mit dessen Äquatorebene und die Schwerpunktsaxe mit der auf der Äquatorebene senkrechten Figurenaxe zusammenfallen.

Wir können daher sagen: *Der Hefs'sche Fall der Kreiselbewegung darf deshalb ein besonderes Interesse für sich beanspruchen, weil er die direkte Verallgemeinerung der allbekannten Pendelbewegung darstellt.* Dementsprechend werden wir im Folgenden diesen Fall kurz als den *Fall des Hefs'schen Pendels* bezeichnen.

Auch in quantitativer Beziehung besteht teilweise eine direkte Identität zwischen der Bewegung des Hefs'schen Pendels und der Pendelbewegung des symmetrischen Kreisels oder, was auf dasselbe herauskommt, der Pendelbewegung des einzelnen Massenpunktes. *Wir werden nämlich zeigen, dafs der Schwerpunkt des Hefs'schen Pendels allgemein zu reden sich genau so bewegt wie der Massenpunkt eines sphärischen Pendels.*

Zum Beweise schreiben wir uns die beiden allgemein gültigen Sätze den Satz der lebendigen Kraft und den Impulssatz $n =$ const., in geeigneter Form hin.

Wir drücken zunächst die lebendige Kraft $T$ in zweckmäfsiger Weise durch die Impulskoordinaten aus. Dabei wählen wir zu Koordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$, nicht, wie vorher, die Hauptträgheitsaxen, sondern die folgenden drei Geraden: die $Z$-Axe sei die Schwerpunktsaxe $OS$, die $Y$-Axe falle mit der mittleren Hauptträgheitsaxe zusammen, die $X$-Axe sei die zu beiden senkrechte Gerade. In diesen Koordinaten mufs der Ausdruck der lebendigen Kraft die folgende Form annehmen:

$$2T = \frac{L^2 + M^2}{B} + 2\lambda LN + \frac{N^2}{C'},$$

wo $B$, $\lambda$ und $C'$ durch die Massenverteilung des Körpers gegeben sind und insbesondere $B$ die Gröfse des mittleren Hauptträgheitsmomentes bezeichnet. In der That ist ja die Fläche $2T = 1$ unser reciprokes Trägheitsellipsoid; es mufs sich also, wenn wir in der Gleichung dieser Fläche $N = 0$ setzen, die Gleichung eines Kreises ergeben. Aus diesem Grunde haben die Glieder mit $L^2$ und $M^2$ denselben Koeffizienten und fällt das Glied mit $LM$ fort. Ferner kommt auch das Glied mit $MN$

in Fortfall, weil die $Y$-Axe als Hauptträgheitsaxe gewählt war und daher die „Trägheitsprodukte“ in Bezug auf diese Axe gleich Null sind (vgl. pag. 100).

Aus dem Ausdrucke von $T$ ergeben sich die Komponenten des Drehungsvektors, welche in Bezug auf die Axen $X$, $Y$, $Z$ mit $p$, $q$, $r$ bezeichnet werden sollen, nach der allgemeinen Regel von pag. 98 in folgender Weise:

$$p = \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{L}{B} + \lambda N, \quad q = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{\partial T}{\partial N} = \lambda L + \frac{N}{C'}.$$

Bei dem Heſs'schen Pendel ($N = 0$) haben wir also speziell

$$(1) \qquad \begin{cases} 2T = \dfrac{L^2 + M^2}{B} \\ p = \dfrac{L}{B}, \quad q = \dfrac{M}{B}, \quad r = \lambda L. \end{cases}$$

Der Satz der lebendigen Kraft nimmt daher unter den zu Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen die Form an:

$$(2) \qquad \frac{L^2 + M^2}{B} + 2P\cos\vartheta = 2h,$$

Wir berechnen ferner die Vertikalprojektion $n$ des Impulses. Bezeichnen wie pag. 17 $c$, $c'$, $c''$ die Richtungscosinusse der Vertikalen gegen die Koordinatenaxen, so haben wir

$$(3) \qquad n = Lc + Mc' + Nc'',$$

wobei sich nach pag. 19 $c$, $c'$, $c''$ durch die Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ folgendermaſsen ausdrücken:

$$c = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad c' = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Da überdies beim Heſs'schen Pendel $N = 0$ ist, so geht Gleichung (3) über in

$$(4) \qquad n = \sin\vartheta\,(L\sin\varphi + M\cos\varphi).$$

Diese Gröſse ist nach unserem allgemeinen Impulssatze eine Konstante.

Sodann ziehen wir die beiden kinematischen Gleichungen (9) von pag. 45 für $\psi'$ und $\vartheta'$ heran. Setzen wir darin für $p$ und $q$ die Werte aus (1) ein, so lauten dieselben

$$(5) \qquad \begin{cases} B\psi'\sin\vartheta = L\sin\varphi + M\cos\varphi, \\ B\vartheta' \phantom{\sin\vartheta} = L\cos\varphi - M\sin\varphi. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert mit Rücksicht auf (4)

$$(4') \qquad B\psi'\sin^2\vartheta = n.$$

Ferner schliefsen wir aus den beiden mit (5) identischen Gleichungen:

$$L \cos\varphi - M \sin\varphi = B\vartheta',$$
$$L \sin\varphi + M \cos\varphi = \frac{n}{\sin\vartheta},$$

indem wir sie bez. mit 1 und $-i$ multiplizieren und addieren:

$$(6) \qquad (L - iM)\, e^{-i\varphi} = \frac{B \sin\vartheta\,\vartheta' - in}{\sin\vartheta},$$

und indem wir sie quadrieren und addieren

$$(7) \qquad L^2 + M^2 = \frac{B^2 \sin^2\vartheta\,\vartheta'^2 + n^2}{\sin^2\vartheta}.$$

Mit dem letzten Werte gehen wir in die Gleichung (2) der lebendigen Kraft hinein. Benutzen wir die Abkürzung $u = \cos\vartheta$, so erhalten wir

$$(8) \qquad (Bu')^2 = 2hB(1-u^2) - 2Pu(1-u^2) - n^2.$$

Gleichzeitig geht Gleichung (6) über in

$$(9) \qquad B\psi' = \frac{n}{1-u^2}.$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) enthalten bereits den Beweis der vorangestellten Behauptung. Sie sind nämlich mit den Gleichungen der Pendelbewegung identisch, welche man aus den allgemeinen Integralgleichungen (4), (6), (7) der symmetrischen Kreiselbewegung von pag. 222 erhält, wenn man dort $N = 0$ setzt (und übrigens, um auch die Konstanten in Übereinstimmung zu bringen, $A$ mit $B$ vertauscht).

Durch die Winkel $\psi$ und $\vartheta$ ist die Bewegung der Schwerpunktsaxe völlig bestimmt. Diese kann also nach den Gleichungen (8) und (9) als bekannt angesehen werden. Um die Bewegung des Hefs'schen Pendels völlig zu beherrschen, müssen wir nur noch die Drehung des Körpers um die Schwerpunktsaxe untersuchen. Diese ist nach Gleichung (1) durch $r = \lambda L$ gegeben. Es bietet sich nun zum Studium dieser Gröfse $r$ der folgende elegante Weg dar.

Wir wissen, dafs der Impuls $J$ dauernd in der Ebene $e$, der Normalebene der Schwerpunktsaxe, enthalten ist. In dieser Ebene denken wir uns in Gaufsischer Weise die komplexe Variable

$$J = L + iM$$

ausgebreitet. Das Verhalten dieser Variabeln wird dabei durch die Eulerschen Gleichungen reguliert, welche sich ohne Weiteres in eine einzige Differentialgleichung für unsere komplexe Variable zusammenfassen lassen.

Da unsere Axen $X$, $Y$, $Z$ keine Hauptträgheitsaxen sind, benutzen wir diejenige Form der Eulerschen Gleichungen, welche für jedes beliebige Axenkreuz gilt, d. h. die Gleichungen (3') von pag. 141:

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \quad rM - qN + \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = -rL + pN + \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = \quad qL - pM + \mathsf{N}, \end{cases}$$

Hier haben wir für $\mathsf{\Lambda}$, $\mathsf{M}$, $\mathsf{N}$ die Komponenten des Schweremomentes nach unseren Koordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$ einzusetzen. Die Gröfse dieses Momentes ist $P \sin \vartheta$, seine Richtung fällt in die Knotenlinie. Da letztere mit der $X$-Axe den Winkel $\varphi$, mit der $Y$-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschliefst (vgl. Fig. 3 von pag. 18), so haben wir

$$\begin{aligned} \mathsf{\Lambda} &= \quad P \sin \vartheta \cos \varphi = \quad P\sqrt{1-u^2} \cos \varphi, \\ \mathsf{M} &= -P \sin \vartheta \sin \varphi = -P\sqrt{1-u^2} \sin \varphi, \\ \mathsf{N} &= \quad 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (10) nehmen daraufhin, wenn wir noch für $p$, $q$, $r$ die Werte aus (1) einsetzen und überdies, wie es dem Hefs'schen Falle entspricht, $N = 0$ machen, die Form an:

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \quad \lambda LM + P\sqrt{1-u^2} \cos \varphi, \\ \dfrac{dM}{dt} = -\lambda L^2 - P\sqrt{1-u^2} \sin \varphi, \end{cases}$$

während die dritte Gleichung identisch erfüllt ist.

Die Gleichungen (11) multiplizieren wir nun mit 1 und $i$ und addieren sie; dann folgt

$$(12) \qquad \frac{dJ}{dt} + i\lambda LJ - P\sqrt{1-u^2}\, e^{-i\varphi} = 0.$$

Hier schreiben wir noch

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(L + iM + L - iM) = \frac{1}{2}\left(L + iM + \frac{L^2+M^2}{L+iM}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(J + \frac{L^2+M^2}{J}\right), \end{aligned}$$

und ersetzen $L^2 + M^2$ nach dem Satze der lebendigen Kraft (Gl. (2)) durch $2B(h - Pu)$. In ähnlicher Weise ergiebt sich aus (6)

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{L - iM} = \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \frac{J}{L^2+M^2} \\ &= \frac{-Bu' - in}{\sqrt{1-u^2}} \frac{J}{2B(h-Pu)}. \end{aligned}$$

Mithin geht Gleichung (12) in die definitive Form über:

$$(13)\qquad \frac{dJ}{dt} + \frac{i\lambda}{2} J^2 + \frac{P}{2B}\,\frac{Bu' + in}{h - Pu} J + i\lambda B(h - Pu) = 0.$$

Es ist dieses eine sogenannte *Riccatische Gleichung*, eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades. Die Koeffizienten dieser Gleichung können als bekannte Funktionen von $t$ angesehen werden. Durch Gleichung (8) ist nämlich $\frac{du}{dt}$ als Quadratwurzel aus einem Polynom dritten Grades in $u$:

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}$$

dargestellt. Hieraus folgt $t$ als ein elliptisches Integral:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Umgekehrt ist also auch $u$ und ebenso $u'$ als Funktion von $t$, und zwar, wie wir im nächsten Kapitel (vgl. § 3) sehen werden, als sogenannte doppeltperiodische Funktion von $t$ bestimmt.

Schliefslich ist es bequem, von unserer Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ersten Grades überzugehen, wie solches bei der Behandlung Riccatischer Gleichungen allgemein üblich ist. Dies gelingt in unserem Falle durch die Substitution

$$J = \frac{i\lambda}{2}\,\frac{d\log w}{dt},$$

welche für den in Rede stehenden Übergang typisch ist. In der neuen komplexen Variabeln $w$ geschrieben, lautet unsere Differentialgleichung dann:

$$(14)\qquad \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{P}{2B}\,\frac{Bu' + in}{h - Pu}\,\frac{dw}{dt} + i\lambda B(h - Pu)w = 0.$$

Wir sind somit zu einer sogenannten *linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* gelangt. An diese hat die eingehendere analytische Untersuchung anzuknüpfen. Wir können dies nicht näher ausführen, sondern verweisen in der Hinsicht auf die oben citierte Arbeit von Herrn Nekrassoff.

Ohne Benutzung der Gleichung (14) auf rein-geometrischem Wege ist der Hefs'sche Fall von Herrn Joukowsky in der oben genannten Note sehr eingehend studiert und durch ein Modell überzeugend erläutert worden. Diesem Autor verdankt man auch neben anderen schönen Resultaten die mitgeteilten Sätze über die Schwerpunktsbewegung des Hefs'schen Pendels.

Wir kommen nun zu dem zweiten der oben erwähnten partikulären Bewegungsfälle, dem von Hrn. Staude behandelten. Herr Staude

findet, dafs bei einem schweren Kreisel von beliebiger **Massenverteilung** allemal einfach unendlich viele Bewegungen angegeben werden können, die aus einer gleichförmigen Rotation um eine im Körper feste, vertikal gestellte Axe bestehen.

Wir wollen das Resultat von Hrn. Staude geometrisch aus der Impulstheorie ableiten. *Es handelt sich um die Frage, welche Axen, vertikal aufgerichtet, als permanente Drehaxen des allgemeinen Kreisels fungieren können.*

Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf die Lage des Impuls-Endpunktes im Körper. Soll der Drehungsvektor nach Richtung und Gröfse im Raume und also auch im Körper konstant bleiben, so mufs auch der Impuls seine Gröfse sowie seine Lage gegen den Kreisel beibehalten, weil ja der Vektor des Impulses aus dem Drehungsvektor in eindeutiger Weise abgeleitet werden kann. Das Kriterium für die Möglichkeit der einfachen Rotation um eine vertikale Axe wird also dieses sein, *dafs der Endpunkt des Impulsvektors im Körper eine feste Lage hat.* (Im Raume beschreibt dieser Punkt alsdann natürlich einen Kreis um die Vertikale.)

Der Endpunkt des Impulsvektors heifse $J$, der des Rotationsvektors $R$. Die eventuelle Lagenänderung des Punktes $J$ gegen den Körper rührt nun, wie schon beim Hefs'schen Pendel bemerkt, von zwei Umständen her, von der Schwerewirkung einerseits und von der instantanen Drehung des Kreisels andrerseits. Diese beiden Umstände müssen sich, wenn anders die Bewegung die vorausgesetzte Beschaffenheit haben soll, gegenseitig kompensieren.

Wegen der Schwerewirkung wandert der Punkt $J$, wie oben betont wurde, im Raume gleichzeitig senkrecht zur Schwerpunktsaxe $OS$ und zur Vertikalen oder, wie wir im vorliegenden Falle auch sagen können, gleichzeitig senkrecht zu $OS$ und $OR$ fort. Wegen der instantanen Rotation des Kreisels würde der Punkt $J$, wenn er im Raume fest wäre, relativ zu dem Körper auf einem Kreise um die Vertikale herumgeführt; der Punkt $J$ wandert also wegen dieses Umstandes gleichzeitig senkrecht gegen $OR$ und $OJ$. Sollen sich beide Verrückungen aufheben, so müssen vor allem ihre Richtungen übereinstimmen. Es müssen also die drei Geraden $OR$, $OS$ und $OJ$ ein gemeinsames Lot besitzen, d. h. *die drei genannten Richtungen müssen in einer Ebene liegen.* Wir sind somit auf dieselbe Bedingung wie im Falle des Hefs'schen Pendels (vgl. pag. 379) geführt. Die Folgerungen aber, die wir jetzt hieraus ziehen, sind dem veränderten Ausgangspunkte entsprechend von den früheren verschieden. Während die Forderung, dafs die Axen $OR$, $OS$ und $OJ$ in einer Ebene liegen sollen, beim Hefs'schen Pendel nur durch

Spezialisierung der Massenverteilung zu erfüllen war, läfst sich dieselbe Forderung jetzt, da die Punkte $R$ und $J$ im Körper fest liegen, bei beliebiger Massenverteilung durch geeignete Auswahl von $R$ befriedigen.

Analytisch besagt unsere Bedingung, wenn wir wie gewöhnlich mit $p, q, r$ bez. $L, M, N$ die Koordinaten von $R$ und $J$ im Hauptträgheitskreuze bezeichnen, dafs die Gleichung bestehen mufs:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ L, & M, & N \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Wir fassen diese Gleichung jetzt als eine Bedingung für die Lage der Drehungsaxe auf. Drücken wir noch $L, M, N$ in bekannter Weise durch $p, q, r$ aus, so sehen wir, dafs die als permanente Rotationsaxen in Frage kommenden Geraden auf einem *Kegel zweiten Grades* liegen müssen, dessen Gleichung wir schreiben können:

$$(A-B)\zeta pq + (B-C)\xi qr + (C-A)\eta rp = 0. \tag{16}$$

Geometrisch ist ein Kegel zweiten Grades bestimmt, wenn wir fünf Strahlen desselben kennen. Solche fünf Strahlen sind in unserem Falle leicht gefunden. Sicherlich liegen die drei Richtungen $OR$, $OJ$, $OS$ allemal dann in einer Ebene, wenn zwei von ihnen zusammenfallen. Sollen $OR$ und $OJ$ zusammenfallen, so ist ihre gemeinsame Richtung eine Hauptträgheitsaxe. Also liegen die drei Hauptträgheitsaxen auf unserem Kegel zweiten Grades. Soll $OJ$ mit $OS$ identisch werden, so liegt $OR$ in einer ganz bestimmten Richtung $OS'$, welche mit Hülfe des Trägheitsellipsoides leicht konstruiert werden kann und welche durch den Punkt mit den Koordinaten $\frac{\xi}{A}, \frac{\eta}{B}, \frac{\zeta}{C}$ hindurchgeht. Also liegt auch diese Gerade und ebenso natürlich die Schwerpunktsaxe selbst auf unserem Kegel. Unser Kegel kann also aus den drei Hauptträgheitsaxen, sowie den Geraden $OS$ und $OS'$ konstruiert werden; *er ist bekannt, wenn die Massenverteilung des Körpers gegeben ist.*

Aufser der *Richtung* der beiden oben genannten Teilverrückungen des Punktes $J$ mufs aber auch die *Gröfse* dieser Verrückungen übereinstimmen und ihr Sinn der entgegengesetzte sein, wenn unsere Rotationsaxe permanent sein soll. Berücksichtigen wir dieses, so ergiebt sich die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper um die fragliche Axe rotieren kann. Durch die Schwerewirkung wird dem Punkte $J$, wie wir wissen, in der Zeit $dt$ die Verrückung

$$P \sin \vartheta \, dt \tag{17}$$

erteilt. Infolge der instantanen Rotation, welche, im Sinne des Uhr-

zeigers gerechnet, die Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ besitzen möge, wird $J$ mit der Geschwindigkeit

$$-\Omega\,|J|\sin\psi$$

relativ gegen den Körper fortbewegt, wo $\psi$ den Winkel zwischen Rotations- und Impulsaxe, $|J|$ die Länge des Impulses, mithin $|J|\sin\psi$ den Abstand des Punktes $J$ von der Vertikalen bedeutet. Hieraus ergiebt sich während der Zeit $dt$ die Verrückung

$$(17')\qquad -\Omega\,|J|\sin\psi\,dt.$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (17) und (17′) folgt die weitere Bedingungsgleichung

$$(18)\qquad \Omega\,|J|\sin\psi = P\sin\vartheta.$$

Haben wir nun irgend eine Erzeugende unseres Kegels als Rotationsaxe ausgesucht und mit ihrem einen Ende vertikal nach oben gestellt, so ist die Lage des zugehörigen Impulses $J$ (d. h. der Winkel $\psi$) bestimmt und unabhängig von der dem Kreisel zu erteilenden Drehgeschwindigkeit $\Omega$. Die Gröſse des Impulses dagegen hängt nach der pag. 101 beschriebenen Konstruktion von der Gröſse der Drehung ab und zwar wird einfach $|J| = \lambda\,\Omega$, wo $\lambda$ einen positiven, von $\Omega$ unabhängigen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Gleichung (18) geht daher über in

$$(18')\qquad \lambda\,\Omega^2\sin\psi = P\sin\vartheta.$$

Aus dieser Gleichung ist $\Omega^2$ für jede Axe unseres Kegels zu bestimmen.

Dabei kann sich für $\Omega^2$ ebensowohl ein positiver wie ein negativer, d. h. für $\Omega$ ein reeller wie ein imaginärer Wert ergeben. Die Strahlen (oder richtiger die Halbstrahlen) unseres Kegels zerfallen so in zwei Klassen, in „zulässige“ und „unzulässige“ Drehungsaxen. *Nur die „zulässigen“ Halbstrahlen, deren $\Omega$ reell ausfällt, können senkrecht in die Höhe gerichtet, permanente Axen wirklicher Drehungen sein.*

Zunächst sieht man leicht, daſs zwei entgegengesetzte Halbstrahlen unseres Kegels, zu Rotationsaxen gemacht, entgegengesetzte Vorzeichen von $\Omega^2$ geben. In der That wird beim Übergang von einem Halbstrahl zu dem entgegengesetzten auch die Richtung des Impulses mit der entgegengesetzten Richtung vertauscht. Es bleibt also auch $\sin\psi$ ungeändert, während die Schwerewirkung $P\sin\vartheta$ im Vorzeichen umgekehrt wird. *Ist also der eine Halbstrahl eine zulässige, so ist der entgegengesetzte eine unzulässige Axe.* (Eine Ausnahme würde nur bei den besonderen Werten $\Omega^2 = 0$ und $\infty$ eintreten.)

Sodann denken wir uns den zur Rotationsaxe bestimmten Halbstrahl successive längs der einen der beiden Kegelhälften entlang geführt. Das Vorzeichen von $\Omega^2$ ändert sich nur, wenn $\sin\vartheta$ oder

$\sin \psi$ sich im Vorzeichen umkehren. Ersteres tritt ein, wenn wir den Halbstrahl die Schwerpunktsaxe $OS$, letzteres, wenn wir ihn eine der drei Hauptträgheitsaxen passieren lassen. *Hiernach wird die eine sowie die andere der Kegelhälften durch die Hauptträgheitsaxen und die Schwerpunktsaxe in vier Teilgebiete zerlegt, welche abwechselnd zulässige und unzulässige Drehungsaxen enthalten.*

Was die Übergangslagen ($\psi = 0$ und $\vartheta = 0$) betrifft, so wird nach Gleichung (18') im ersteren Falle $\Omega = \infty$, im letzteren $\Omega = 0$. Die Rotation Null bei aufrechter Schwerpunktsaxe bedeutet natürlich nichts anderes wie die (stabile oder labile) *Gleichgewichtslage* des Körpers. Die unendlichen Geschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsaxen leuchten ebenfalls ein.

Die verschiedenen Ausartungen des Kegels (16) sollen hier nicht vollständig besprochen werden. Wir verweisen in der Hinsicht auf die Staudesche Originalarbeit und erinnern übrigens, was den symmetrischen Kreisel betrifft, an die Bemerkungen von pag. 335. Wir sahen dort, dafs beim symmetrischen Kreisel nicht $\infty^1$, sondern $\infty^2$ permanente Drehungsaxen möglich sind, von denen die zulässigen, je nachdem ein verlängerter oder ein abgeplatteter Kreisel vorlag, das „untere“ oder „obere Halbbündel“ ausfüllten. Dementsprechend wird unsere obige Gleichung (16) im Falle des symmetrischen Kreisels ($A = B$, $\xi = \eta = 0$) identisch erfüllt. Dafs insbesondere die Figurenaxe bei jedem Wert von $\Omega$ als Drehungsaxe permanent bleibt, geht aus (18) hervor, indem diese Gleichung bei aufrechter Figurenaxe (wegen $\vartheta = 0$, $\psi = 0$) identisch befriedigt wird. —

Hier sei noch eine anschauliche Auffassung der Staudeschen Bedingungen (15) erwähnt, zu der, unabhängig von Staude, M. Lecornu gelangte.*) Mittels der Gleichungen von § 3 des Kap. II läfst sich nämlich diese Bedingung so formulieren: Das Trägheitsprodukt (Deviationsmoment), berechnet für die Rotationsaxe $R_1$ und für die auf $R$ und der Schwerpunktsaxe senkrechten Axe, soll verschwinden. In diesem Falle giebt es immer einen Punkt auf der Rotationsaxe, für den auch das zweite Deviationsmoment verschwindet, diese Axe also Hauptaxe ist. Die Bewegung wird dann eine kräftefreie, permanente Rotation um diese Hauptaxe, insofern für den neuen Bezugspunkt das Moment der Schwerkraft gegen das Moment der Reaktionskraft im Stützpunkt bei geeignet gewählter Umlaufsgeschwindigkeit sich weghebt. —

*) Bull. de la Soc. math. de France, 30. 1902.

Zum Schlufs wollen wir noch bezüglich aller Litteratur, insbesondere über das Rotationsproblem des schweren unsymmetrischen Kreisels, sowie auch über die Bewegung des unsymmetrischen Kreisels bei verallgemeinertem Kraftgesetz, über die wir nur unvollständig berichten konnten, auf den zusammenfassenden Bericht der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften verweisen: (IV, 13) Rotation starrer Körper und Verwandtes. Aufserdem seien nochmal die Zusätze zu Heft IV, pag. 951 f. verglichen.

# Kapitel VI.

## Darstellung der Kreiselbewegung durch elliptische Funktionen.

### § 1. Die Riemannsche Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Während unser Hauptinteresse bisher auf das geometrische und mechanische Verständnis der Kreiselbewegung gerichtet war, soll in diesem Kapitel der Ton auf die analytische Seite unseres Problems gelegt werden. Es ist unvermeidlich, daſs die diesbezüglichen Entwicklungen abstrakter ausfallen und von der Wirklichkeit des mechanischen Vorganges zunächst weiter abzuliegen scheinen, wie die früheren, selbst wenn wir, was der Kürze halber geschehen muſs, auf eine durchgängige Strenge und Vollständigkeit der funktionentheoretischen Betrachtungen Verzicht leisten. Im Folgenden soll die Mathematik nicht ausschlieſslich dem Interesse der Mechanik dienen, sondern es soll gleichzeitig die Mechanik zur Veranschaulichung einer mathematischen Theorie, der Lehre von den elliptischen Funktionen, herangezogen werden.

Daſs dieses möglich ist und daſs eine *gegenseitige* Befruchtung zwischen Anwendung und Theorie thatsächlich stattfindet, ist ein sehr bemerkenswerter Umstand, auf den wir zunächst die Aufmerksamkeit lenken möchten.

Ohne Frage ist es vom mechanischen Standpunkte aus natürlicher, die Bewegung dadurch zu beschreiben, daſs wir die Lagenkoordinaten des Kreisels, zunächst also etwa die Gröſse $u$, in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darstellen, statt wie bisher die Zeit und die übrigen Lagenkoordinaten als Funktionen von $u$ aufzufassen. Wenn wir uns so aus mechanischen Gesichtspunkten heraus die Aufgabe stellen, die funktionale Abhängigkeit zwischen $t$ und $u$ „umzukehren“, so werden wir höchlichst überrascht sein, zu sehen, wie dieselbe Aufgabe auch vom rein mathematischen Standpunkte aus das gröſste Interesse besitzt. Auf unserem bisherigen Niveau, wo wir $t$ als Funktion von $u$ berechneten, bewegen sich die älteren Arbeiten über die *Theorie der elliptischen Integrale*, namentlich die von Legendre. Der groſse Fortschritt aber, welcher auf diesem Gebiet durch Abel und Jacobi erzielt worden ist, beruht

wesentlich auf dem eben angedeuteten *Umkehrgedanken*, auf dem *Übergange von den elliptischen Integralen zu den sogenannten elliptischen Funktionen.* Wir begegnen da einem merkwürdigen Zusammenwirken von Theorie und Praxis, sozusagen einer *prästabilierten Harmonie* zwischen reiner und angewandter Mathematik, die sich zum Wohle beider in der Geschichte unserer Wissenschaft fortgesetzt geltend gemacht hat.

Unter demselben Gesichtspunkte wollen wir sodann die Bedeutung unserer Drehungsparameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ für die folgenden Entwickelungen betonen. Diese Gröfsen waren ursprünglich im kinematischen Interesse eingeführt, um die Formeln der Drehungstransformation nach Möglichkeit zu vereinfachen. Es wird sich nun im Folgenden zeigen, dafs dieselben Gröfsen eine mindestens ebenso grofse Vereinfachung für die analytische Weiterführung des Problems mit sich bringen, und dafs gerade diese Parameter es sind, welche man, ausgehend von der Theorie der elliptischen Funktionen, vor allen anderen bevorzugen müfste.

Andererseits wird durch die elliptischen Funktionen auch die praktische Seite unseres Problems gefördert, insofern wir (vgl. § 6) aus dieser Theorie die vollständigsten und einfachsten Formeln zur numerischen Berechnung der Kreiselbahnen entnehmen werden, welche uns bei nicht übertriebener Genauigkeit mit wenigen trigonometrischen Gliedern auszukommen gestatten.

Der erste Schritt zur analytischen Vertiefung unseres Problems ist der, dafs wir den vorkommenden Gröfsen prinzipiell *komplexe Werte* beilegen. Es gilt hier, wie in so vielen Fällen, die Bemerkung: dafs analytische Verhältnisse, die bei der Beschränkung auf das Reelle unübersichtlich scheinen, sich sofort aufklären, wenn wir in das komplexe Gebiet übergehen.

Wir setzen also

$$u = u_1 + iu_2$$

und stellen die Werte von $u$ nicht mehr auf einer Geraden, sondern nach dem Vorgange von Gaufs (bez. Argand) in einer Ebene dar. Da man in der Funktionentheorie $u = \infty$ als *einen* Wert ansieht, gleichviel ob es sich um ein Unendlichwerden des reellen oder des imaginären Bestandteils oder beider gleichzeitig handelt, so fafst man bekanntlich auch das Unendlich-Ferne der Gaufsischen Ebene als *einen einzelnen Punkt**) auf.

*) Vgl. z. B. H. Burkhardt: *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen*, Leipzig 1897. Wir verweisen den Leser auf dieses Buch bezüglich aller derjenigen funktionentheoretischen Angaben, welche im Text nicht ausführlich genug erläutert werden konnten.

Hierdurch erreicht man, daſs zwischen den Werten von $u$ und den Punkten der Ebene ein eindeutig-umkehrbares Entsprechen stattfindet.

Die Vorstellung der *Gauſsischen Ebene* genügt aber für unsere Zwecke noch nicht; wir müssen dieselbe erweitern zu dem Bilde einer sogenannten *Riemannschen Fläche*.

Wir haben ja bei unseren Integralausdrücken die beiden Gröſsen $u$ und $\sqrt{U}$ immer gleichzeitig zu betrachten. Zu jedem Werte von $u$ gehören zwei Werte von $\sqrt{U}$, welche sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Um diese gut auseinander zu halten, werden wir uns die Gauſsische Ebene *doppelt überdeckt* denken, ebenso wie wir uns schon früher die $u$-Axe doppelt zeichneten. Je nachdem wir $\sqrt{U}$ mit dem einen oder anderen Vorzeichen rechnen, befinden wir uns dann in dem einen oder in dem entsprechenden Punkte des anderen Exemplares der $u$-Ebene. Wir unterscheiden die beiden Exemplare als *oberes* und *unteres Blatt*.

Die beiden entgegengesetzten Werte von $\sqrt{U}$ fallen nur dann zusammen, wenn $U = 0$ oder $U = \infty$ wird. Die Stellen, wo dieses eintritt, haben wir schon im vierten Kapitel kennen gelernt. Es sind die auf der reellen Axe gelegenen Punkte $u = e, e', e''$ und $\infty$. Denken wir uns an diesen vier Stellen die beiden Blätter zusammengeheftet, so gehört jetzt zu jedem Paare entsprechender Werte von $u$ und $\sqrt{U}$ nur ein Punkt der Doppelebene und umgekehrt. Die Punkte der Doppelebene und die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ sind also in derselben Weise *ein-eindeutig* zusammengeordnet, wie die Punkte der Gauſsischen Ebene und die Werte von $u$.

Die Art des Zusammenhanges zwischen dem oberen und dem unteren Blatt an den Stellen $e, e', e''$ und $\infty$ bedarf dabei allerdings noch der besonderen Untersuchung. Man darf nicht, wie es wohl am nächsten liegt, die beiden Blätter in jenen vier Punkten einzeln aneinander befestigen und im Übrigen schlicht übereinander herlaufen lassen, wenigstens dann nicht, wenn man verlangt, daſs die Zuordnung zwischen den Punkten der Doppelebene und den Wertepaaren $(u, \sqrt{U})$ eine *kontinuierliche* sein soll.

Betrachten wir z. B. den Punkt $u = e$ und umschreiten wir ihn auf einem kleinen Kreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Die vorher genannte Befestigungsart der beiden Blätter wäre nur dann angezeigt, wenn wir, mit einem Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ beginnend, nach der Durchlaufung des Kreises zu demselben Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ zurückkehren würden. Wir werden aber durch die folgende Betrachtung zeigen, daſs wir in dem entgegengesetzten Wertepaare $(u, -\sqrt{U})$ endigen.

Analytisch bedeutet die Durchlaufung unseres Kreises, dafs wir

$$u - e = \varrho e^{i\varphi}$$

setzen und bei festgehaltenem $\varrho$ den Winkel $\varphi$ um $2\pi$ wachsen lassen. Nun haben wir

$$U = c(u-e)(u-e')(u-e''), \quad c = \frac{2P}{A}$$

und also

$$(1) \qquad \sqrt{U} = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} \sqrt{c(u-e')(u-e'')}.$$

Hier können wir uns $\varrho$ so klein gewählt denken, dafs in der letzten Gleichung die Gröfsen unter der Quadratwurzel bei Umschreitung des Kreises sich beliebig wenig verändern. Insbesondere soll unser Kreis in seinem Innern natürlich keinen der Punkte $e'$, $e''$ enthalten. Lassen wir jetzt $\varphi$ um $2\pi$ wachsen, so ändert $\sqrt{U}$ sein Vorzeichen. Wir gelangen also bei unserem Umlauf von dem einen Blatte in das andere.

Um dieser Thatsache Rechnung zu tragen, müssen wir uns folgende Vorstellung über den Zusammenhang der beiden Blätter bilden. Wir müssen uns denken, dafs von dem Punkte $u = e$ eine Linie ausläuft, bei deren Überschreitung man aus dem einen in das andere Blatt hineingelangt und dafs sich beide Blätter längs dieser Linie *durchdringen*. Dasselbe gilt von den Punkten $e'$, $e''$, $\infty$. Dementsprechend beschreiben wir den Zusammenhang der beiden Blätter am besten folgendermafsen: Wir denken uns die beiden Blätter zunächst schlicht übereinander gelegt und schneiden sie beide längs der reellen Axe etwa von $e$ bis $e'$ und von $e''$ bis $\infty$ auf. Die freien Kanten heften wir wechselweise zusammen, so dafs immer eine Kante des oberen mit der gegenüberliegenden Kante des unteren Blattes verbunden wird. Dann haben wir in der That den gewünschten Zusammenhang.

Allerdings müssen wir hierbei die nicht ganz bequeme Thatsache mit in Kauf nehmen, dafs sich nach der Zusammenheftung wie gesagt die beiden Exemplare der $u$-Ebene längs der Strecken $ee'$ und $e''\infty$ gegenseitig durchdringen. Man bemerke aber, dafs diese Unvollkommenheit des geometrischen Bildes nur durch die Beschränktheit unserer dreidimensionalen Raumvorstellung bedingt wird. Hätten wir eine Dimension mehr zur Verfügung, so könnten wir die in der erforderlichen Weise zusammengehefteten Blätter ohne Durchdringung so nebeneinander herlaufen lassen, dafs sie lediglich die Verzweigungspunkte gemeinsam haben.

Die Durchdringungskurven, auf deren Gestalt es nicht wesentlich ankommt — bei unserem Verfahren sind es Stücke gerader Linien — nennen wir *Verzweigungslinien*, sowie wir ihre Endpunkte, die Stellen $e$, $e'$, $e''$, $\infty$, bereits früher als *Verzweigungspunkte* bezeichneten. Das Ge-

samtbild der hiermit gewonnenen geometrischen Vorstellungen heifst nach seinem Schöpfer eine *Riemannsche Fläche.* Wir sprechen kurz von der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$.

Wir haben uns jetzt genauer auf unserer Riemannschen Fläche zu orientieren. Zunächst setzen wir über die gegenseitige Lage von $e$, $e'$, $e''$ fest, dafs

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < +\infty$$

sei, was nach Figur 38 von pag. 226 der Annahme $P > 0$ entspricht. Sodann werden wir, ähnlich wie man die Gaufsische Ebene je nach dem Vorzeichen des imaginären Teiles von $u$ in eine positive und eine

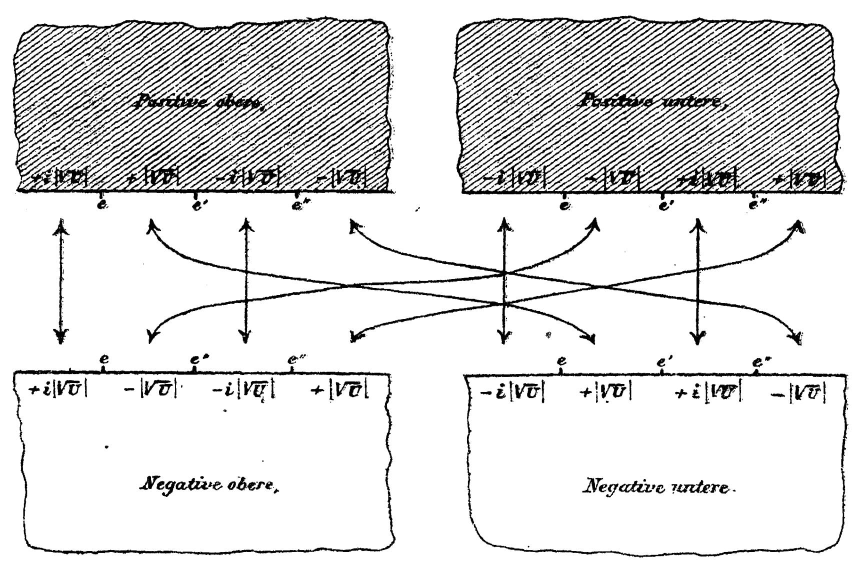



Fig. 59.

negative Halbebene zerlegt, auf unserer Riemannschen Fläche vier solche Halbebenen unterscheiden, welche wir in Fig. 59 schematisch aufzeichnen und benennen wollen. Die beiden positiven Halbebenen sollen dabei durch Schraffierung von den beiden negativen kenntlich gemacht werden. Die Pfeile deuten an, wie die einzelnen Stücke der reellen Axe in unseren vier Halbebenen nach der Zusammenheftung aneinander hängen.

Wir tragen in diesen Figuren die Werte von $\sqrt{U}$ längs der reellen Axe ein, wobei wir in einem Punkte der Fläche das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ nach Willkür wählen können. Für alle übrigen Stellen ist alsdann $\sqrt{U}$ durch die Forderung der Kontinuität eindeutig bestimmt. Wir wollen etwa für irgend einen Punkt zwischen $e$ und $e'$, wo ja $\sqrt{U}$ etwas

Reelles bedeutet, festsetzen, dafs der positive Wert der Quadratwurzel der positiven oberen Halbebene zugehören soll. Dasselbe Vorzeichen gilt dann überhaupt zwischen $e$ und $e'$ an der Grenze der positiven oberen Halbebene. Wir schreiben also hier den Wert $+|\sqrt{U}|$ an. Denselben Wert erhält die negative untere Halbebene zwischen $e$ und $e'$, weil ja diese längs $ee$ mit der positiven oberen Halbebene zusammenhängen sollte. Der Wert $-|\sqrt{U}|$ kommt alsdann dem Stücke $ee'$ der negativen oberen und positiven unteren Halbebene zu.

Um entsprechende Angaben für die anderen Teile der reellen Axe machen zu können, gehen wir z. B. um den Punkt $e$ in der positiven oberen Halbebene auf einem Halbkreise entgegen dem Sinne des Uhrzeigers herum, wobei wir von einem Punkte zwischen $e$ und $e'$ ausgehend in einen Punkt zwischen $-\infty$ und $e$ gelangen. Nach Gleichung (1) nimmt $\sqrt{U}$ hierbei den Faktor $e^{\frac{i\pi}{2}} = +i$ an. Wir schreiben also an die reelle Axe zwischen $-\infty$ und $e$ im positiven oberen Blatte, ebenso wie in dem mit ihm zusammenhängenden negativen oberen Blatte, den Wert $+i|\sqrt{U}|$ an. In solcher Weise fortfahrend vervollständigen wir die Benennung der einzelnen Intervalle.

Der Vergleich mit Fig. 38 ($P > 0$) zeigt, dafs unsere früheren Angaben mit den jetzigen Ergebnissen für die Begrenzungen der positiven oberen Halbebenen übereinstimmen. Die frühere Figur stellt einfach einen Schnitt dar, welcher parallel zur reellen Axe, ein wenig nach der Seite der positiven Halbebenen verschoben, durch die Riemannsche Fläche hindurchgelegt ist. Der Unterschied ist nur der, dafs die hinzugeschriebenen Werte von $\sqrt{U}$ früher bei der Beschränkung auf reelle Variable als willkürliche Festsetzungen erschienen, während sie jetzt nach willkürlicher Festlegung des Vorzeichens in einem Punkte der Fläche für alle übrigen mit Notwendigkeit folgen.

## § 2. Verhalten der elliptischen Integrale auf der Riemannschen Fläche.

Wir müssen nun das Verhalten der elliptischen Integrale auf unserer Riemannschen Fläche prüfen. Dabei werden wir im Allgemeinen als bekannt voraussetzen, was man unter einem auf komplexem Wege geführten Integral versteht; auch werden wir gelegentlich den Cauchyschen Satz nicht entbehren können, welcher aussagt, unter welchen Umständen zwei verschiedene Integrationswege, die denselben Anfangs- und Endpunkt verbinden, den gleichen Integralwert ergeben.*)

*) Vgl. H. Burkhardt, l. c. § 35.

Wir betrachten zunächst das „Integral erster Gattung“

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$$

und wollen zeigen, dafs ihm die von Riemann herrührende Bezeichnung eines *„überall endlichen Integrales“* zukommt.

Wie bekannt, kann ein Integral bei endlicher Länge des Integrationsweges nur dann unendlich werden, wenn der Weg über eine Unendlichkeitsstelle des Integranden herüber erstreckt wird und die Ordnung des Unendlichwerdens nicht kleiner ist als 1. In unserem Falle sind die Unendlichkeitsstellen des Integranden mit den Nullstellen von $U$, d. h. mit den Verzweigungspunkten $e$, $e'$, $e''$ identisch; und zwar beträgt die Ordnung des Unendlichwerdens im Integranden $\frac{1}{2}$. Infolgedessen wird unser Integral endlich bleiben, auch wenn wir seine obere oder untere Grenze mit einer dieser Stellen zusammenfallen lassen.

Ferner ist aus der Integralrechnung bekannt, dafs ein Integrationsweg ins Unendliche ausgedehnt werden kann, ohne dafs das Integral seinen endlichen Sinn verliert, wenn der Integrand im Unendlichen von höherer als der ersten Ordnung verschwindet. In unserem Falle verschwindet aber $\sqrt{U}$ für $u = \infty$ wie $u^{-3/2}$. Mithin bleibt unser Integral auch im Unendlichen endlich.

Wenn wir also irgend einen Punkt auf der Riemannschen Fläche als untere und irgend einen als obere Grenze unseres Integrales wählen und beide durch irgend einen Weg verbinden, welcher die Verzweigungspunkte eventuell eine (endliche) Anzahl von Malen umschlingen kann, so hat das so entstehende Integral allemal einen endlichen Wert. *Die Bezeichnung „überall endliches Integral“ ist danach gerechtfertigt.*

Insbesondere wollen wir diejenigen Integralwerte betrachten, welche einem vollen Umlauf um ein Paar der Verzweigungspunkte entsprechen. *Wir bezeichnen diese kurzweg als die Perioden des elliptischen Integrals.* Gehen wir z. B. irgendwie um die Verzweigungspunkte $e e'$ im oberen Blatte der Riemannschen Fläche und zwar in solchem Sinne herum, dafs wir die Verzweigungslinie $e e'$ zur Rechten haben. (Vgl. hier und im Folgenden Fig. 60.) Nach dem Cauchyschen Satze liefern alle solchen Umläufe denselben Wert des Integrals. Insbesondere können wir daher den Integrationsweg auf die Verzweigungslinie $e e'$ zusammenziehen. Thun wir dieses, so haben wir erst von $e$ nach $e'$ an der Grenze der positiven oberen und dann von $e'$ nach $e$ an der Grenze der negativen oberen Halbebene entlang zu integrieren, was beidemal zu demselben Integralwert, nämlich dem uns von früher her bekannten Werte $\omega$ führt.

Jedem einmaligen vollen Umlaufe um die Verzweigungspunkte $e e'$, ausgeführt im oberen Blatte und in dem angegebenen Sinne, entspricht daher eine Vermehrung von $t$ um „die erste Periode“ $2\omega$. Es ist klar, dafs bei Umkehrung des Umlaufsinns oder bei Verlegung des Integrationsweges in das untere Blatt, der so entstehende Integralwert $-2\omega$ sein wird.

Jeder Integrationsweg, der die Punkte $e e'$ umschliefst, kann aber auch als ein Umlauf um die beiden anderen Verzweigungspunkte $e'' \infty$ aufgefafst werden. Jedem solchen Umlauf (insbesondere also auch einem auf die reelle Axe von $e''$ bis $\infty$ zusammengezogenen Wege) entspricht daher bei richtiger Fixierung des Sinnes derselbe Integralwert $2\omega$.

Ferner können wir um die Punkte $\infty e$ bez. $e' e''$ einen Umlauf vornehmen. Je zwei solche Umläufe geben bei richtiger Fixierung des Fortschreitungssinnes ebenfalls dasselbe Integrationsresultat. Es genügt daher etwa den Umgang um die Punkte $\infty e$ zu betrachten, welchen wir uns teils in der negativen unteren, teils nach Passierung des Verzweigungsschnittes $e e'$ in der positiven oberen Halbebene vorgenommen denken und zwar in solchem Sinne, dafs die Linie $\infty e$ beständig zur Linken liegt. Der Wert dieses Integrals ist ersichtlich das Doppelte desjenigen Integralwertes, den man erhält, wenn man von dem Verzweigungspunkte $e$ an der Grenze der positiven oberen Halbebene nach $-\infty$ hin fortschreitet. Dieser Wert wurde pag. 263 mit $i\omega'$ bezeichnet; seine Berechnung liefs sich ebenso bewerkstelligen wie die Berechnung von $\omega$. Mithin wird „die zweite Periode“ unseres Integrales, welche einem Umgange um eins der Punktepaare $\infty e$ oder $e' e''$ entspricht, gleich $2i\omega'$.

In der folgenden Figur stellen wir die bisher betrachteten Integrationswege und die zugehörigen Integralwerte schematisch dar. Der

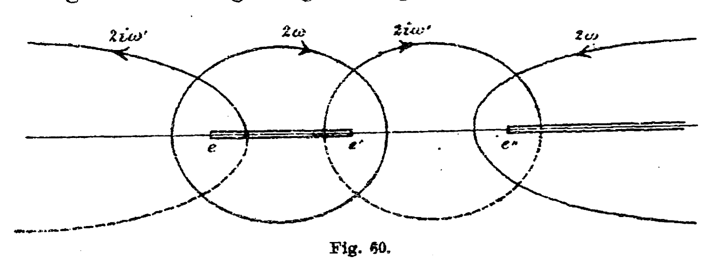



Fig. 60.

gemeinte Sinn ist je durch einen Pfeil markiert; die Integrationswege sind punktiert wo sie im unteren, ausgezogen wo sie im oberen Blatte verlaufen.

Auf die beiden Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ lassen sich die Integrale, welche einem beliebigen in sich zurücklaufenden Integrationswege ent-

sprechen, zurückführen. *Der allgemeine Wert eines solchen Integrals, welcher auch „die allgemeine Periode“ von $t$ heifst, wird daher*

$$2m\omega + 2im'\omega'.$$

Die (positiven oder negativen) ganzen Zahlen $m$ und $m'$ bedeuten dabei einfach die Anzahl der (rechtsläufigen oder linksläufigen) Umgänge des Integrationsweges um die Strecken $ee'$ und $e''\infty$.

Geben wir in unserem Integrale nur die obere und untere Grenze als Punkte der Riemannschen Fläche an, indem wir die Gestalt des Integrationsweges auf sich beruhen lassen, so ist der Wert von $t$, entsprechend dem angegebenen Werte der allgemeinen Periode, nur *bis auf Multipla von* $2\omega$ *und* $2i\omega'$ *bestimmt.* Ziehen wir dagegen nur Punkte einer unserer vier Halbebenen in Betracht und fügen die Beschränkung hinzu, dafs auch der Integrationsweg ganz in dieser Halbebene verlaufen soll, so ist der Wert von $t$ (nach dem Cauchyschen Satze) durch Angabe der oberen und unteren Grenze *eindeutig* festgelegt. —

Wir gehen nun zur funktionentheoretischen Untersuchung der anderen elliptischen Integrale über, welche uns bisher vorkamen, zu den Gröfsen $\psi$, $\varphi$ und namentlich zu den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Im Gegensatz zu $t$ sieht man, dafs $\psi$ nicht ausnahmslos auf der Riemannschen Fläche endlich ist. Die Verzweigungspunkte $e$, $e'$, $e''$, $\infty$ geben allerdings auch hier, aus denselben Gründen wie oben, zu keinem Unendlichwerden Anlafs. Der Integrand von $\psi$ wird ferner aber unendlich für $u = \pm 1$ und zwar von der ersten Ordnung. Hieraus ergeben sich, wie wir sehen werden, für das Integral logarithmische Unstetigkeiten.

Betrachten wir z. B. den Wert $u = +1$. In dem Integrale

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

setzen wir überall $u = 1$ aufser in dem das Unendlichwerden bedingenden Faktor $1-u$, wobei wir für $U$ den pag. 225 angegebenen Wert $-\frac{1}{A^2}(N-n)^2$ zu benutzen haben; dann wird

$$\psi = \pm \frac{i}{2} \int \frac{du}{1-u} = \mp \frac{i}{2} \log(1-u).$$

Diese Gleichung giebt eine angenäherte Darstellung für das Verhalten der Gröfse $\psi$ in der Nähe derjenigen beiden Stellen, an denen auf der Riemannschen Fläche der Wert $u = 1$ stattfindet; sie zeigt, dafs hier $\psi$ in der That logarithmisch unendlich wird. Der „Multiplikator des Unendlichwerdens“, wie wir die den Logarithmus multiplizierende Konstante

nennen wollen, wird dabei in dem einen Blatte gleich $-\frac{i}{2}$, in dem anderen gleich $+\frac{i}{2}$.

Ganz dieselbe Überlegung zeigt auch, dafs $\psi$ an den beiden Stellen $u = -1$ mit dem Multiplikator $\pm\frac{i}{2}$ logarithmisch unendlich wird. Berücksichtigen wir überdies, dafs sich nach pag. 237 der Winkel $\varphi$ beim Kugelkreisel ganz ebenso verhält wie $\psi$, so können wir sagen:

*Die Eulerschen Winkel $\varphi$ und $\psi$ werden auf unserer Riemannschen Fläche in vier Punkten logarithmisch unendlich, nämlich an den Stellen $u = \pm 1$ im oberen und unteren Blatte, und zwar mit einem Multiplikator, welcher für die über einander gelegenen Punkte der beiden Blätter je entgegengesetzte Werte annimmt und überall den absoluten Betrag $\frac{1}{2}$ hat.*

Die Theorie der elliptischen Integrale kennt aber noch einfachere logarithmisch unendlich werdende Integrale, nämlich solche mit nur *zwei* logarithmischen Unendlichkeitsstellen. Man bezeichnet diese als *Integrale dritter Gattung* und benutzt sie, um solche mit mehr Unstetigkeiten aus ihnen linear zusammenzusetzen. So haben wir in der That bereits pag. 268 unser $\psi$ als Summe zweier Integrale dritter Gattung, der sog. *Legendreschen Normalintegrale II* dargestellt.

Für die weitere analytische Behandlung sind daher jedenfalls die Eulerschen Winkel nicht die einfachsten analytischen Elemente. Es zeigt sich aber, dafs unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ solche in einfachster Weise liefern, *dafs nämlich die Gröfsen* $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ *direkt elliptische Integrale dritter Gattung sind.*

Nehmen wir zunächst den Ausdruck für $\log\alpha$ aus Gleichung (8) von pag. 238 auf:

$$\log\alpha = \int \frac{A\sqrt{U} + i(n+N)}{2A(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Hier ist der Faktor $(u-1)$, der in $\psi$ auftrat, aus dem Nenner verschwunden. Auch der Faktor $(u+1)$ bewirkt ein Unendlichwerden von $\log\alpha$ nur in einem der beiden Blätter. Wie wir eben sahen, wird nämlich für $u = -1$:

$$A^2 U = -(N+n)^2,$$

also nach den in Figur 59 enthaltenen Festsetzungen

$$A\sqrt{U} = +i\,|N+n| \text{ im oberen Blatte,}$$
$$A\sqrt{U} = -i\,|N+n| \text{ im unteren Blatte.}$$

Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir für das Folgende annehmen, dafs

$$N > n > 0$$

sei. Alsdann bedeuten die in den eben angegebenen Werten von $A\sqrt{U}$ vorkommenden absoluten Beträge $|N+n|$ bez. $|N-n|$ dasselbe wie $(N+n)$ bez. $(N-n)$. Der Zähler des Integranden von $\log\alpha$ wird daraufhin für $u=-1$

gleich $+i(n+N)+i(n+N)=2i(n+N)$ im oberen Blatte,
gleich $-i(n+N)+i(n+N)=0$ im unteren Blatte.

Im unteren Blatte hebt also das Verschwinden des Zählers das gleichzeitige Verschwinden des Nenners auf, so daſs hier $\log\alpha$ endlich bleibt. Im oberen Blatte dagegen wird, wenn wir auſser in dem Faktor $(u+1)$ überall $u=-1$ setzen, näherungsweise:

$$\log\alpha = \int\frac{du}{1+u} = \log(1+u).$$

Im oberen Blatte besitzt also $\log\alpha$ einen logarithmischen Unendlichkeitspunkt.

Da nach einem allgemeinen Gesetz bei den Integralen algebraischer Funktionen logarithmische Unstetigkeiten immer paarweise auftreten müssen, so werden wir noch nach einer zweiten Unendlichkeitsstelle von $\log\alpha$ suchen. Diese liegt bei $u=\infty$. Machen wir nämlich, wie dies bei der Untersuchung des Unendlichfernen üblich ist, die Substitution $v=\frac{1}{u}$, so ergiebt sich für $v=0$ näherungsweise:

$$\log\alpha = -\int\frac{dv}{2v} = -\log\sqrt{v} = \log\sqrt{u}.$$

Die zweite logarithmische Unendlichkeitsstelle von $\log\alpha$ liegt also im Unendlichen. An den übrigen Verzweigungspunkten bleibt dagegen $\log\alpha$ wieder endlich.

Dieselben Überlegungen zeigen, daſs auch die Gröſsen $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ nur je zwei logarithmische Unendlichkeitsstellen besitzen, die eine

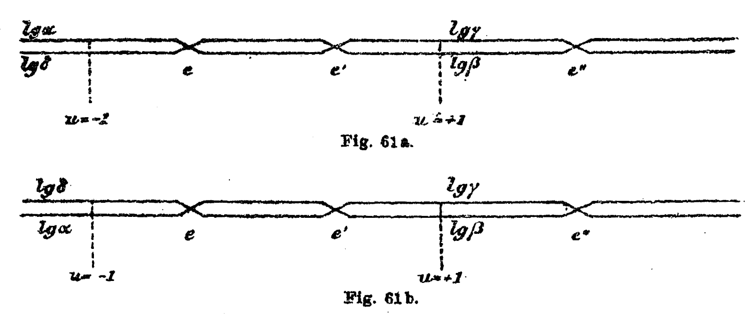



Fig. 61a.

Fig. 61b.

im Unendlichen, die zweite bei $u=\pm1$ im oberen oder unteren Blatte. Wie sich die Unendlichkeitsstellen auf die vier Punkte $u=\pm1$ verteilen, stellen wir durch das Schema der Figur 61a dar, welches

wiederum einen Ausschnitt aus unserer Riemannschen Fläche darstellt und welches auf Grund der oben gemachten Festsetzung $N > n > 0$ entworfen ist. Bei einer anderen Annahme über Vorzeichen und Gröfsenverhältnis von $N$ und $n$ vertauschen sich unsere vier Unendlichkeitsstellen in leicht angebbarer Weise. So entspricht z. B. das Schema $b$ der Annahme $0 > N > n$.

Somit haben wir bewiesen:

*Die Logarithmen unserer Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sind elliptische Integrale, welche nur an zwei Stellen der Riemannschen Fläche logarithmisch unendlich werden, nämlich bez. in einem der vier Punkte $u = \pm 1$, sowie im Punkte $\infty$; diese Logarithmen sind also direkt elliptische Integrale dritter Gattung.*

Damit sind aber die eigentümlichen Vorzüge unserer Parameter noch nicht erschöpft. Wir richteten bereits bei dem Integrale $\psi$ unsere Aufmerksamkeit auf den Multiplikator, mit welchem der unendlich werdende logarithmische Term behaftet ist. Von diesem hängt der Zuwachs ab, um den sich das Integral bei einem Umlauf um die fragliche Unendlichkeitsstelle additiv vermehrt. Unter den Integralen dritter Gattung besitzen nun diejenigen einen besonders einfachen funktionentheoretischen Charakter, bei welchen dieser Zuwachs, in sogleich noch näher zu definierender Weise berechnet, gleich $\pm 2\pi i$ wird. Es ist daher berechtigt, solche Integrale durch den besonderen Namen *Normalintegrale dritter Gattung* auszuzeichnen.*) Dabei bemerken wir, dafs Legendre die Normierung seiner Integrale dritter Gattung von einem anderen, mehr formalen Gesichtspunkte aus getroffen hat, dafs also die pag. 267 erwähnten Legendreschen Normalintegrale keine Normalintegrale in unserem jetzigen Sinne sind.

Um die Definition der Normalintegrale dritter Gattung präciser angeben zu können, müssen wir zunächst erklären, was wir unter einem „positiven“ und was wir unter einem „geschlossenen“ Umlauf um einen Punkt unserer Riemannschen Fläche verstehen wollen.

Wir setzen, je nachdem es sich um einen im Endlichen gelegenen Punkt $u = a$ oder um den unendlich fernen Punkt $u = \infty$ handelt, entweder $u - a = \varrho e^{i\varphi}$ oder $u = \frac{1}{v}$ und $v = \varrho e^{i\varphi}$. Darauf lassen wir bei festgehaltenem genügend kleinem $\varrho$ den Winkel $\varphi$ in beiden Fällen von Null aus nach der positiven Seite hin wachsen. Dadurch ergiebt sich in der $u$-Ebene und auf der Riemannschen Fläche ein

*) Die Wichtigkeit dieser Normierung wird von Jacobi gerade an dem Beispiel des Kreisels auseinandergesetzt. Vgl. seine Ausführungen über den Divisor des Integrals dritter Gattung. Ges. W. B. II pag. 477 u. ff.

Weg, von welchem wir sagen, dafs er um den Punkt $u = a$ bez. $u = \infty$ im *positiven* Sinne herumläuft. Diesen positiven Umlauf setzen wir, je nachdem es sich um einen gewöhnlichen Punkt der Riemannschen Fläche oder um einen Verzweigungspunkt handelt, solange fort, bis der eben definierte Winkel $\varphi$ den Wert $2\pi$ oder $4\pi$ erreicht hat. In der $u$-Ebene umkreisen wir dann im ersten Falle den betreffenden Punkt einmal, im zweiten Falle zweimal. Auf der Riemannschen Fläche laufen wir aber in beiden Fällen nur einmal um den Punkt herum, da bei einem Verzweigungspunkte erst zwei Umgänge in der $u$-Ebene zu dem Ausgangspunkte auf der Riemannschen Fläche zurückführen. In beiden Fällen sprechen wir daher von einem *einmaligen, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen* Umlaufe.

Die genaue Definition der Normalintegrale dritter Gattung soll nun folgendermafsen lauten:

*Unter einem Normalintegrale dritter Gattung verstehen wir ein solches Integral mit zwei logarithmischen Unendlichkeitsstellen, welches bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen, einmaligen positiven Umlauf um eine der Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $2\pi i$ erfährt; bei einem entsprechenden Umlauf um die andere Unendlichkeitsstelle nimmt dasselbe dann einem allgemeinen Gesetz zufolge den Zuwachs $-2\pi i$ auf.*

Wir zeigen nun sofort, dafs unsere Integrale $\log \alpha$, $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ in diesem Sinne Normalintegrale sind. Betrachten wir z. B. $\log \alpha$.

Zur Untersuchung der Unendlichkeitsstelle $u = -1$ von $\log \alpha$ setzen wir nach der soeben gegebenen Vorschrift $u + 1 = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen bei genügend kleinen Werten von $\varrho$ den Winkel $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ wachsen. Da sich nach Obigem $\log \alpha$ in der Nähe der Stelle $u = -1$ wie $\log(u + 1)$ verhält, haben wir

$$\log \alpha = \log(u + 1) + \cdots = \log \varrho + i\varphi + \cdots$$

Wir sehen hieraus, dafs sich $\log \alpha$ bei einer positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = -1$ um $2\pi i$ vermehrt. Handelt es sich andrerseits um $u = \infty$, so setzen wir $v = \frac{1}{u} = \varrho e^{i\varphi}$ und lassen $\varphi$ abermals bei genügend kleinem $\varrho$ und zwar jetzt von 0 bis $4\pi$ variieren. Da $\log \alpha$ im Unendlichen in $-\log \sqrt{v}$ übergeht, so wird

$$\log \alpha = -\log \sqrt{v} + \cdots = -\log \sqrt{\varrho} - \frac{i\varphi}{2} + \cdots$$

Wie man sieht, vermehrt sich $\log \alpha$ bei der soeben definierten positiven geschlossenen Umkreisung der Stelle $u = \infty$ gerade um $-2\pi i$.

In derselben Weise überzeugen wir uns, dafs auch $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ beim Umgange um ihre Unendlichkeitsstellen den Zuwachs $\pm 2\pi i$ erfahren.

Wir können somit den bemerkenswerten Satz aussprechen:

*Die Logarithmen unserer Parameter sind nicht nur Integrale dritter Gattung schlechtweg, sondern sie sind sogar Normalintegrale.*

Dieser Umstand wird von augenfälliger Wichtigkeit, wenn wir von den Logarithmen zu den Werten unserer Parameter selbst übergehen. Die letzteren Gröfsen bleiben nämlich ersichtlich vollständig ungeändert bei einem Umgange um die Unendlichkeitsstellen ihrer Logarithmen. Z. B. verhält sich $\alpha$ in der Nähe der Stelle $u = -1$ direkt wie

$$C(u+1).$$

Wäre dagegen der Zuwachs bei einem Umlauf um die Stelle $u = -1$ nicht gleich $2\pi i$, sondern etwa gleich $2\pi i\lambda$ und dementsprechend der Multiplikator des Unendlichwerdens nicht gleich 1, sondern gleich $\lambda$, so würde sich $\alpha$ verhalten wie

$$C(u+1)^\lambda,$$

im Allgemeinen also, wenn $\lambda$ nicht gerade ganzzahlig ist, diese Stelle zum Verzweigungspunkte haben. Wir können daher sagen:

*Dank der Normaleigenschaft unserer Integrale dritter Gattung verhalten sich unsere Parameter auf der Riemannschen Fläche durchgängig unverzweigt.*

Damit ist nicht gesagt, dafs diese Parameter auch *eindeutig* auf der Riemannschen Fläche wären. Vielmehr werden sich ihre Logarithmen, entsprechend ihrer Darstellung als Integrale dritter Gattung, bei Umlaufung eines Paares von Verzweigungspunkten um gewisse charakteristische Zuwächse, „die Perioden des Integrals dritter Gattung", additiv vermehren, gerade so wie wir es für das Integral erster Gattung in Figur 60 geschildert haben. *Die Werte der Parameter selbst werden sich daher bei einem Umlauf um die Verzweigungspunkte je mit gewissen charakteristischen Faktoren multiplizieren.* Auf die Berechnung jener Zuwächse bez. dieser Faktoren von der Integraldarstellung aus brauchen wir hier nicht einzugehen, weil wir im vierten Paragraphen eine explicite Darstellung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ geben werden, durch welche die genannte Berechnung von selbst erledigt wird.

Jedenfalls erhellt aus alle diesen Bemerkungen, dafs unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ im Hinblick auf funktionentheoretische Einfachheit den Eulerschen Winkeln überlegen sind. Es wird sich geradezu zeigen: *Die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ stellen die einfachsten analytischen Bausteine dar, aus denen sich die allgemeinen Formeln der Kreiselbewegung zusammensetzen lassen.*

## § 3. Die Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ in der $t$-Ebene.

In diesem Paragraphen haben wir die Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung zu leisten. Während wir bisher $t$ als Funktion seiner oberen Grenze $u$ oder besser noch als Funktion des Ortes $(u, \sqrt{U})$ auf der Riemannschen Fläche aufgefaſst haben, wollen wir später die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ als Funktionen von $t$ ansehen. Hierzu ist es eine Vorstufe, daſs wir zunächst $(u, \sqrt{U})$ und die zugehörigen Werte von $t$ als gleichberechtigte Variable behandeln. Wir repräsentieren daher $t = t_1 + it_2$ seinerseits in einer komplexen Ebene, der *$t$-Ebene*, indem wir uns $t_1$ als Abscisse, $t_2$ als Ordinate auftragen, und fragen, welchen Weg bez. welches Gebiet $t$ in seiner Ebene beschreibt, während die Variable $u$ einen beliebigen Weg oder ein beliebiges Gebiet der Riemannschen Fläche bestreicht. Diese Frage bezeichnet man funktionentheoretisch als die *Frage nach der Abbildung der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ auf die $t$-Ebene.*

Als untere Grenze des Integrals nehmen wir wie früher den Verzweigungspunkt $e$ an, betrachten also

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Wir beginnen mit der Berandung der positiven oberen Halbebene unserer Riemannschen Fläche. *Welchen Weg beschreibt $t$, während wir $u$ die reelle Axe in der positiven oberen Halbebene von links nach rechts durchlaufen lassen?*

Bei der Beantwortung dieser Frage haben wir uns wesentlich auf Figur 59 zu stützen, wo wir nach Realität und Vorzeichen die für die einzelnen Teilintervalle der reellen Axe gültigen Werte von $\sqrt{U}$ eingetragen haben. Hiernach sind die zugehörigen Inkremente von $t$, d. h. die Gröſsen $dt = \frac{du}{\sqrt{U}}$, welche dem positiven Zuwachse $du$ von $u$ entsprechen, nach Realität und Vorzeichen gegeben. Wir stellen sie in der folgenden Tabelle zusammen:

| Bewegt sich $u$: | so ist das Inkrement $dt$: |
|---|---|
| von $e$ bis $e'$, | positiv reell, |
| von $e'$ bis $e''$, | positiv imaginär, |
| von $e''$ bis $+\infty$, | negativ reell, |
| von $-\infty$ bis $e$, | negativ imaginär. |

In unserem Ausgangspunkte $e$, der unteren Grenze des Integrals, ist natürlich $t$ gleich Null. Der Weg, den $t$ beschreibt, setzt also im Nullpunkte der $t$-Ebene ein. Schreitet $u$ von $e$ bis $e'$ fort, so wandert der zugehörige Punkt $t$ nach vorstehender Tabelle längs der positiven reellen Axe. Wenn $u$ den Wert $e'$ erreicht, biegt der Weg rechtwinklig um und verläuft zunächst parallel der positiv imaginären $t$-Axe.

Sind wir auf der Riemannschen Fläche bis $e''$ gekommen, so macht der Weg von $t$ abermals einen rechtwinkligen Knick; er führt von da ab wieder parallel der reellen Axe aber im negativen Sinne. Lassen wir $u$ ins Positiv-Unendliche übergehen und aus dem Negativ-Unendlichen der reellen Axe zurückkehren, so haben wir in der $t$-Ebene eine abermalige rechtwinklige Umbiegung; die Bewegung des repräsentierenden Punktes, welche vorher im Sinne der negativen reellen Axe stattfand, verläuft weiterhin im Sinne der negativ-imaginären Axe. *Im Ganzen beschreibt $t$ also einen rechtwinkligen Zug gerader Linien, während $u$ die reelle Axe durchläuft.*

Wir finden leicht, dafs dieser Linienzug sich schliefsen mufs, und berechnen überdies die Länge seiner Kanten, wenn wir die in Fig. 60 angegebenen Werte der vollen Periodenumläufe berücksichtigen. Ziehen wir nämlich die dort gezeichneten Integrationswege auf die betreffenden Stücke der reellen Axe zusammen, so zerlegt sich der volle Umlauf in zwei kongruente geradlinige Hälften, deren jede als Integralwert von $t$ die Hälfte der ganzen Perioden $2\omega$ bez. $2i\omega'$ liefert. Hieraus folgt: *Der rechteckige Linienzug in der $t$-Ebene ist die Contour eines gewöhnlichen Rechtecks* (vgl. Fig. 62); *die Länge der horizontalen Rechteckseiten beträgt $\omega$, die der vertikalen $\omega'$. Die Ecken des Rechtecks sind, in der Reihenfolge, wie sie den Verzweigungspunkten*

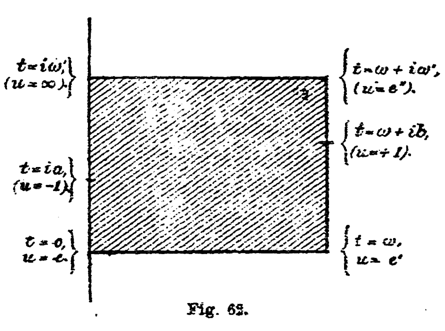


Fig. 62.

$$u = e,\ e',\ e'',\ \infty$$

*entsprechen, gegeben durch die Werte*

$$t = 0,\quad \omega,\quad \omega + i\omega',\quad i\omega'.$$

Wir treten nun mit der Variabelen $u$ in das Innere der positiven oberen Halbebene ein und überzeugen uns, dafs dann auch die Variable $t$ in das Innere unseres Rechtecks übergeht.

Da wir nämlich, wenn wir die reelle $u$-Axe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, jene Halbebene zur Linken haben, mufs sich auch in der $t$-Ebene einem allgemeinen funktionentheoretischen Prinzip zufolge das entsprechende Gebiet an den in der Richtung $i\omega'$, $0$, $\omega$, ... durchlaufenen rechteckigen Rahmen nach links hin ansetzen. Ferner haben wir uns klar zu machen, dafs das Abbild in der $t$-Ebene an keiner Stelle Lücken, Verzweigungspunkte oder Faltungen besitzt. Wir können uns zu dem Zwecke aus der Integralformel Reihenentwickelungen herstellen, welche den Wert von $t$ als konvergente Potenzreihe aus dem Werte von $u$ und umgekehrt diesen aus jenem zu berechnen gestatten. Führt man diese Andeutungen näher aus, so erkennt man, dafs den Punkten der positiven oberen Halbebene nur Punkte im Innern unseres Rechtecks entsprechen können und dafs diese Punkte den Raum zwischen unserem rechteckigen Rahmen lückenlos und einfach überdecken müssen. Wir werden also sagen können:

*Die Fläche unseres Rechtecks stellt die Abbildung vor, welche die Gröſse $t$ von der positiven oberen Halbebene der Riemannschen Fläche entwirft.*

Um den Abbildungsprozess möglichst konkret zu fassen, können wir uns etwa die betrachtete Halbebene mit einer elastischen Membran bespannt denken, welche an der reellen Axe befestigt ist. Die Stücke der reellen Axe zwischen den Verzweigungspunkten stellen wir uns hier miteinander gelenkig verbunden vor. Wir drehen nun diese Stücke gegeneinander und deformieren sie solange, bis sie in den rechteckigen Rahmen der $t$-Ebene übergegangen sind. Gleichzeitig ist dann die ursprüngliche Membran unter Aufrechterhaltung der Stetigkeit in eine das Rechteck überspannende Membran deformiert. Die eine Membran stellt sich so als eine *Verzerrung* der anderen dar. Natürlich giebt dieses Verfahren zunächst nur eine sehr ungefähre qualitative Vorstellung von dem mathematischen Zusammenhange zwischen den Variabeln $t$ und $u$. Wir können aber unsere Abbildung auch quantitativ richtig wiedergeben, wenn wir den in unserer Membran wirksamen elastischen Kräften die Eigentümlichkeit zuschreiben, nur solche Verzerrungen zuzulassen, bei welchen die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt wird, wo also irgend zwei von einem Punkte ausgehende Kurven nach der Deformation denselben Winkel einschliefsen, wie vor derselben. Durch diese Bestimmung ist die Art der Verzerrung, wie man nachweisen kann, vollständig festgelegt, wenn wir nur noch die weitere Bedingung hinzufügen, dafs etwa den drei Punkten $e$, $e'$, $e''$ der Halbebene die drei aufeinanderfolgenden Ecken unserer Rechtecksbegrenzung $0$, $\omega$, $\omega + i\omega'$ entsprechen sollen. Bekanntlich nennt man eine solche, in

den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung zweier Gebiete eine *konforme* oder *winkeltreue Abbildung.*

Ohne irgend welche Formel läfst sich also der analytische Zusammenhang zwischen den Variabeln $t$ und $u$ rein geometrisch folgendermafsen beschreiben:

*Es entsprechen sich je zwei solche Variabelnwerte $t$ und $u$, deren repräsentierende Punkte bei der konformen Abbildung der Halbebene auf die Fläche des Rechtecks (unter Zuordnung der Verzweigungspunkte zu den Ecken des Rechtecks) in einander übergehen.* —

Ein sehr schöner Apparat, welcher die Konformität der Abbildung selbstthätig bewirkt, ist von Herrn S. Finsterwalder*) konstruiert worden. Herr Finsterwalder stellt aus biegsamen Drähten ein Netzwerk her, indem er je drei Drähte durch eine mit drei Bohrungen versehene Hülse zusammenfafst, wobei es für die Herstellung am bequemsten ist, die Bohrungen unter überall gleichem Winkel gegen einander anzubringen. Die Hülsenmittelpunkte bilden dann in ihrer ursprünglichen Lage die Ecken einer regelmäfsigen Sechsecksteilung der Ebene. Da die Drähte in ihren Führungen frei auf- und abgleiten können und überdies gebogen werden können, so besitzt unser Apparat noch einen hohen Grad von Beweglichkeit. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird sogar unendlich grofs, wenn wir uns, wie es der in Rede stehenden Anwendung auf die konforme Abbildung wegen eigentlich geschehen müfste, sämtliche Dimensionen des Netzwerks unendlich klein und die Hülsen unendlich zahlreich und unendlich dicht nebeneinander liegend denken.

Man überzeugt sich nun durch das Experiment ohne Weiteres, dafs es möglich ist, der Berandung des Netzwerks jede beliebige Gestalt zu geben, d. h. das vom Netzwerk ursprünglich eingenommene Gebiet auf jedes andere Gebiet abzubilden, wobei noch drei Randpunkte des einen Gebiets dreien des anderen willkürlich zugewiesen werden können. Dafs diese Abbildung eine winkeltreue ist, folgt für die Winkel, unter denen die Drähte zusammenstofsen, unmittelbar aus der Starrheit der Hülsen; wenn aber bei einer stetigen (oder, genauer gesagt, durch analytische Funktionen vermittelten) Abbildung drei Winkel in jedem Punkte ungeändert bleiben, so gilt dasselbe nach allgemeinen Prinzipien für alle Winkel.

Durch den Finsterwalderschen Apparat wären wir also in der Lage, die durch unser elliptisches Integral vermittelte Abbildung rein experimentell zu realisieren. —

---

*) Vgl. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, 1897.

Dieselbe Betrachtung wie für die positive obere werden wir des Weiteren für die negative obere, die positive untere Halbebene u. s. w. durchführen können. *Auch diese Halbebenen bilden sich in der $t$-Ebene in Rechtecke von der soeben geschilderten Gestalt ab.*

Die Lage dieser Rechtecke gegen das Abbild der positiven oberen Halbebene hängt von dem Integrationswege ab, insbesondere davon, in welchem Intervalle wir die reelle Axe überschreiten, um von der positiven oberen in die nunmehr abzubildenden Halbebenen zu gelangen. Die positive obere Halbebene hängt beispielsweise mit der negativen oberen längs der Strecke $-\infty\, e$ zusammen. Überschreiten wir also, von $e$ beginnend, bei der Integration diese Strecke, so kommen wir zu Werten von $t$, welche der negativen oberen Halbebene entsprechen. In der $t$-Ebene füllen diese Punkte ein Rechteck aus, welches sich an die Seite $t = 0$ bis $t = i\omega'$ des ursprünglichen Rechtecks nach links hin anlegt. Treten wir andrerseits, durch die Verzweigungslinie $ee'$ hindurch, in das negative untere Blatt ein, so gelangt der repräsentierende Punkt der $t$-Ebene in das Innere eines Rechtecks, welches eine Abbildung der negativen unteren Halbebene vorstellt. Dieses Rechteck legt sich an das Abbild der Linie $ee'$, d. h. an die Rechtecksseite $t = 0$ bis $t = \omega$ nach unten hin an. Gehen wir sodann auf der Riemannschen Fläche von der negativen unteren in die positive untere Halbebene, indem wir wieder die Linie $-\infty$ bis $e$ überschreiten, so entspricht dem in der $t$-Ebene der Übergang zu einem neuen Rechteck, welches mit dem Abbilde der negativen unteren Halbebene die Seite von $-i\omega'$ bis 0 gemeinsam hat. Im Ganzen haben wir so eine Abbildung unserer vier Halbebenen, d. h. eine Abbildung der ganzen Riemannschen Fläche gewonnen. *Diese besteht aus einem grofsen Rechteck, welches den Nullpunkt der $t$-Ebene zum Mittelpunkte hat und welches sich aus unseren vier kleinen Rechtecken zusammensetzt.* Wir schraffieren von den letzteren diejenigen beiden, welche den schraffierten positiven Halbebenen entsprechen und bekommen das folgende Gesamtbild der Riemannschen Fläche (vgl. Fig. 63), durch welches diese in höchst übersichtlicher Weise auseinandergelegt erscheint. Ein solches Rechteck, welches die Perioden des elliptischen Integrals zu Seiten hat, bezeichnen wir als ein „Periodenrechteck".

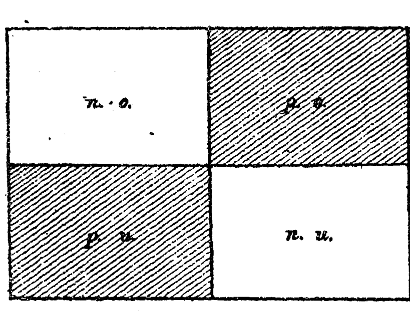



Fig. 63.

Einige Erläuterungen sind nur noch bezüglich der Randpunkte

unseres Periodenrechtecks erforderlich. Diese entsprechen, wie man gesehen hat, den Punkten der beiden Strecken $e'e''$ und $e''\infty$ in den vier Halbebenen. In diesen Strecken ist ersichtlich die Kontinuität unserer Abbildung unterbrochen. Während z. B. auf der geschlossenen Riemannschen Fläche, wie sie nach richtiger Zusammenfügung der Ränder unserer Verzweigungslinien vorliegt, die Strecke $e'e''$ des positiven oberen mit der Strecke $e'e''$ des negativen oberen Blattes direkt zusammenfällt, sind die Bilder dieser Strecken in der $t$-Ebene auf den gegenüberliegenden vertikalen Seiten des Periodenrechtecks gelegen; entsprechend liegen die Bilder der auf der Riemannschen Fläche zusammenfallenden Strecken $e''\infty$ in der $t$-Ebene auf den gegenüberliegenden horizontalen Rechtecksseiten. Wir müfsten uns, um eine durchaus stetige und durchaus eindeutige Abbildung der Riemannschen Fläche zu haben, die gegenüberliegenden Ränder des Rechtecks in der Weise zugeordnet vorstellen, dafs je zwei gegenüberliegende Randpunkte auch im Bilde als identisch gelten können. Indessen brauchen wir hierauf nicht näher einzugehen, da der beregte Mifsstand, die Diskontinuität der Abbildung, im Folgenden von selbst in Fortfall kommt, wenn wir unsere Figur weiter vervollständigen.

In der That ist unsere Abbildungsfigur noch nicht fertig. Wir sind vorher von der positiven oberen zur negativen oberen Halbebene durch die Strecke $-\infty\, e$ hindurch gegangen. Ebenso gut können wir aber auch durch $e'e''$ dahin gelangen. Thun wir das Letztere, so erhalten wir als Bild der negativen oberen Halbebene ein Rechteck, welches sich an das Abbild der Strecke $e'e''$, d. h. an die Seite $\omega$ bis $\omega + i\omega'$ unseres zuerst gezeichneten Rechtecks anlegt. Überhaupt giebt es von jeder positiven Halbebene zu den beiden negativen und von jeder negativen zu den beiden positiven auf der Riemannschen Fläche je zwei verschiedene Zugänge. Dementsprechend müssen wir die Figur so vervollständigen, dafs sich an jede freie Rechteckseite ein weiteres Rechteck anlegt, wobei jedes schraffierte Rechteck von vier nichtschraffierten, jedes nichtschraffierte von vier schraffierten umgeben wird. Als vervollständigte Abbildungsfigur bekommen wir daher ein *schachbrettartiges Muster*, wie es durch die Figur 64 dargestellt wird. Der einzelne Horizontalstreifen enthält dabei entweder nur Bilder der Halbebenen des oberen oder des unteren Blattes. Ein System von Periodenrechtecken ist durch etwas stärkeres Ausziehen der Begrenzungen aus dem System der kleineren Rechtecke herausgehoben.

Diese Rechtecksteilung zusammen mit der Vorstellung der Riemannschen Fläche giebt den einfachsten und vollständigsten Begriff von der analytischen Beziehung zwischen den Gröfsen $t$ und $u$, bez. $\sqrt{U}$.

Betrachten wir zunächst $t$ als Funktion von $u$, indem wir uns die obere Grenze $u$ als einen bestimmten Punkt der Riemannschen Fläche gegeben denken, d. h. indem wir uns aufser dem Werte von $u$ auch noch das Vorzeichen von $\sqrt{U}$ in bestimmter Weise gewählt denken. (Die untere Grenze soll wie früher in dem Verzweigungspunkte $e$ liegen.) Wir sahen bereits pag. 400, dafs der Wert von $t$ durch Angabe der oberen Grenze nicht vollständig bestimmt ist. Je nach der Gestalt des Integrationsweges erhält man unendlich viele Werte von $t$, welche sich um Vielfache der Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ unterscheiden. Dieser Sachverhalt kommt in unserer Rechtecksteilung besonders deutlich zum Ausdrucke. Da nämlich jede Halbebene der Riemannschen Fläche sich in unendlich viele Rechtecke der $t$-Ebene abbildet, giebt es zu jedem Punkte der Fläche unendlich viele zugehörige Punkte der $t$-Ebene und zwar befindet sich in jedem Periodenrechtecke ein solcher Punkt. Verschieben wir unsere ganze Figur parallel mit sich um $2\omega$ in Richtung der reellen oder um $2\omega'$ in Richtung der imaginären Axe, so kommt sie allemal mit sich zur Deckung; dabei geht jedes Rechteck in ein ebenso bezeichnetes Rechteck, jeder Punkt in einen Punkt über, dem auf der Riemannschen Fläche immer dieselbe Stelle entspricht. Wir wollen alle diese Punkte als *äquivalente Punkte* bezeichnen. Ist also $t$ irgend ein Punkt der $t$-Ebene, welcher der gegebenen Stelle $u, \sqrt{U}$ der Riemannschen Fläche entspricht, so werden die äquivalenten Punkte dargestellt durch

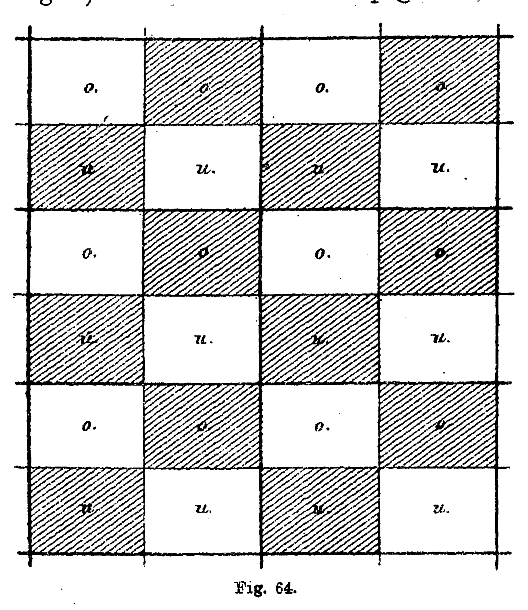


Fig. 64.

$$t + 2m\omega + 2m'i\omega',$$

wo $m$ und $m'$ irgend welche positiven oder negativen ganzen Zahlen bedeuten. Alle diese Werte von $t$ gehören zu derselben oberen Grenze $u, \sqrt{U}$ des Integrals. In analytischer Hinsicht ziehen wir hieraus namentlich den Schlufs:

*Als Funktion der oberen Grenze aufgefafst, ist t eine unendlich vieldeutige Funktion.*

Jetzt geben wir uns umgekehrt den Wert von $t$ und fragen nach zugehörigen Werten von $u$. Jedem Punkt der $t$-Ebene entspricht auf der Riemannschen Fläche und um so mehr in der $u$-Ebene ein und nur ein ganz bestimmter Punkt. Daraus folgt sofort:

*Als Funktion von $t$ aufgefafst, ist $u$ eine eindeutige Funktion.*

Nun ist es analytisch sicher vorteilhafter, mit eindeutigen wie mit vieldeutigen Funktionen zu operieren. Gleichzeitig bemerkten wir zu Anfang des vorigen Paragraphen, dafs es vom Standpunkte der Mechanik wünschenswert ist, die Elemente der Bewegung direkt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. *Beide Gründe veranlassen uns, unser elliptisches Integral „umzukehren", d. h. in Zukunft $t$ als die unabhängige Variable anzusehen und die Gröfse $u$ als Funktion von $t$ darzustellen.*

Über die Eigenschaften der Funktion $u$ von $t$ (wir schreiben kurz $u = u(t)$) können wir sogleich noch eine nähere Bestimmung hinzufügen. Wenn wir nämlich den Wert des Argumentes um Vielfache der beiden Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ vermehren, so kommen wir, wie bemerkt, in der $t$-Ebene zu Punkten, welche derselben Stelle der Riemannschen Fläche entsprechen. $u$ bleibt also ungeändert bei Vermehrung des Arguments um eine der beiden Perioden. Wir sagen: *$u$ ist eine doppeltperiodische Funktion von $t$*, oder *$u$ ist eine elliptische Funktion.*

Eigentlich müfsten wir auch ausdrücklich beweisen: *$u$ ist eine analytische Funktion, eine Funktion des komplexen Argumentes $t$.* Indessen wollen wir uns in dieser Hinsicht auf den Satz der allgemeinen Funktionentheorie berufen, dafs durch Umkehrung einer analytischen Funktion immer wieder eine analytische Funktion entsteht. Da nun $t$ seiner Integraldarstellung nach sicher eine Funktion des komplexen Argumentes $u$ ist, so schliefsen wir, dafs auch die Funktion $u(t)$ eine analytische Funktion werden mufs.

Auf die wirkliche Berechnung der Funktion $u(t)$ brauchen wir im Einzelnen nicht einzugehen, weil wir im Folgenden diese Funktion doch wieder verlassen und noch einfachere Funktionen (die sogenannten $\vartheta$-Funktionen) kennen lernen werden, aus denen sich unter Anderem auch die doppeltperiodische Funktion $u$ in bequemster Weise zusammensetzen läfst.

Wir wollen nun zeigen, dafs die Einführung des überall endlichen Integrales $t$ als unabhängiger Variabler noch für eine grofse Klasse weiterer Funktionen von wesentlichem Vorteil wird. *Wir werden nämlich sehen, dafs zahlreiche Funktionen, welche in ihrer Abhängigkeit von $u$ mehrdeutig sind, durch Einführung von $t$ eindeutig gemacht oder, wie wir kurz sagen wollen, „uniformisiert" werden.*

Es sind dieses in erster Linie *die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Funktionen*, insbesondere also die rationalen Funktionen von $u$ und $\sqrt{U}$. In der That zeigt unsere Rechtecksteilung nicht nur, dafs jedem Punkte der $t$-Ebene ein und nur ein Punkt der $u$-Ebene entspricht, sondern auch eine und nur eine Stelle der Riemannschen Fläche. Der Ort auf der Riemannschen Fläche und die sämtlichen auf ihr eindeutigen Funktionen hängen also von dem Orte in der $t$-Ebene, d. h. von dem Werte des überall endlichen Integrals in eindeutiger Weise ab.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir etwa die in der $u$-Ebene zweiwertige, auf der Riemannschen Fläche aber eindeutige Funktion $\sqrt{U}$. Dafs diese auch in der $t$-Ebene eindeutig ist, läfst sich sofort verifizieren. Da nämlich

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}},$$

so folgt

$$\sqrt{U} = \frac{du}{dt} = u'(t);$$

*durch Einführung der Variabeln $t$ wird also insbesondere die in $u$ zweiwertige Funktion $\sqrt{U}$ uniformisiert.*

Die uniformisierende Wirkung von $t$ reicht aber noch viel weiter: *Es werden nicht nur die auf der Riemannschen Fläche eindeutigen Gröfsen eindeutige Funktionen von $t$, sondern auch alle auf der Fläche mehrdeutigen Gröfsen, deren Mehrdeutigkeit von derselben Beschaffenheit ist, wie die Mehrdeutigkeit des überall endlichen Integrales selbst, d. h. welche bei allen denjenigen Umläufen ungeändert bleiben, die den Wert von $t$ ungeändert lassen.* (Insbesondere müssen die fraglichen Gröfsen natürlich relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt sein.)

Zum Beweise bedenke man, dafs jeder Umlauf auf der Riemannschen Fläche, bei dem sich der Wert der zu uniformisierenden Funktion ändert, nach Voraussetzung auch den Wert der Variabeln $t$ abändert und daher in ein anderes Gebiet der $t$-Ebene führt. Die verschiedenen Werte der fraglichen Funktion, welche eventuell zu demselben Punkte der Riemannschen Fläche gehören, kommen also in der $t$-Ebene an lauter verschiedene Stellen zu liegen.

Auf unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ findet dieses wichtige Prinzip unmittelbare Anwendung. Wir sahen ja pag. 405, dafs die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ auf der Riemannschen Fläche unverzweigt sind, und dafs sie nur bei denjenigen Umgängen (und zwar um gewisse charakteristische Faktoren) geändert werden, welche auch den Wert des überall endlichen Integrals (und zwar um die additiven Perioden $2\omega$, $2i\omega'$) abändern.

Wir können also sagen:

*Unsere auf der Riemannschen Fläche unendlich vieldeutigen, aber unverzweigten Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ werden in der $t$-Ebene eindeutig.*

Die so entstehenden eindeutigen und, wie wir hinzufügen können, analytischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ sind wie gesagt nicht doppeltperiodisch, da sie sich beim Übergang von einem Periodenrechteck zu einem anderen je um einen konstanten Faktor ändern; wir bezeichnen sie mit Hermite (s. u.) trotzdem gleichfalls als *elliptische Funktionen* und zwar genauer als *elliptische Funktionen zweiter Art*, zum Unterschied von den rein doppeltperiodischen Funktionen, die wir *elliptische Funktionen erster Art* nennen.

Des Weiteren fragen wir nach den Null- und Unendlichkeitsstellen unserer elliptischen Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in der $t$-Ebene, da sich auf die Lage dieser Stellen die spätere analytische Darstellung unserer Parameter gründet. Die Null- und Unendlichkeitsstellen der Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sind natürlich mit den logarithmischen Unendlichkeitsstellen von $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ identisch. Die Verteilung der letzteren haben wir in Figur 61 übersichtlich dargestellt, unter der Annahme

$$N > n > 0.$$

Dieselbe Annahme soll auch für das Folgende zu Grunde gelegt werden.

Insbesondere untersuchen wir etwa die Funktion $\alpha(t)$. Nach Figur 61a wird $\log\alpha$ unendlich grofs für $u = -1$ und $u = \infty$ und zwar verhält sich $\log\alpha$ nach pag. 402

$$\text{für } u = -1 \text{ wie } \log(u+1), \quad \text{für } u = \infty \text{ wie } \log\sqrt{u}.$$

Gehen wir von dem Logarithmus zum Numerus über, so sehen wir: Der Parameter $\alpha$ verschwindet für $u = -1$, er wird unendlich für $u = \infty$.

In der $t$-Ebene entspricht dem Werte $u = \infty$ nach Figur 62 der Punkt $t = i\omega'$ bez. einer der äquivalenten Punkte

$$t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'. \tag{I}$$

Ferner bildet sich die Stelle $u = -1$ des oberen Blattes, wie gleichfalls aus Figur 62 hervorgeht, in einen Punkt ab, welcher auf der imaginären Axe zwischen $t = 0$ und $t = i\omega'$ liegt — wir bezeichnen den zugehörigen $t$-Wert mit $ia$ — bez. in einen der äquivalenten Punkte; alsdann bestimmt sich $a$ durch das schon pag. 263 angegebene Integral:

$$ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die Gesamtheit der äquivalenten Stellen, d. h. aller derjenigen Punkte der $t$-Ebene, welche Bildpunkte der Stelle $u = -1$ im oberen Blatte der Riemannschen Fläche darstellen, ist daher gegeben durch

(II) $$t = ia + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Wir wissen bereits, dafs $\alpha(t)$ in den Punkten (I) unendlich grofs wird, in den Stellen (II) verschwindet. Wir wollen noch die Ordnung des Verschwindens und die Ordnung des Unendlichwerdens feststellen. Zu dem Zwecke erinnern wir daran, dafs sich $\log \alpha$ bei einem auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um die Stellen $u = -1$ und $u = \infty$ um $\pm 2\pi i$ ändert (vgl. pag. 404). Bei der konformen Abbildung auf die $t$-Ebene geht aber ein einmaliger geschlossener Umlauf auf der Riemannschen Fläche in einen ebensolchen Umlauf in der $t$-Ebene über, wie sich aus dem Begriffe der konformen Abbildung ergiebt. Die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\alpha$ sind also so beschaffen, dafs $\log \alpha$ bei einer einmaligen Umlaufung derselben den Zuwachs $\pm 2\pi i$ annimmt. Dies besagt aber gerade, dafs die Ordnung des Verschwindens und Unendlichwerdens gleich 1 ist. Mithin können wir sagen:

*Die Punkte (I) sind einfache Unendlichkeitsstellen, die Punkte (II) einfache Nullstellen der Funktion $\alpha(t)$. Andere Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt $\alpha$ nicht.*

In ähnlicher Weise ergeben sich die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ in der $t$-Ebene. Greifen wir z. B. $\gamma$ heraus. Auf der Riemannschen Fläche wird $\log \gamma$ logarithmisch unendlich für $u = \infty$ und (vgl. Fig. 61) für $u = +1$ im oberen Blatte. In der $t$-Ebene entspricht dem Unendlichen der Riemannschen Fläche die Stelle $t = i\omega'$ und die äquivalenten Stellen. Die Gesamtheit dieser Stellen wird wieder dargestellt durch

(I) $$t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Dem Punkte $u = +1$ des oberen Blattes gehört in der $t$-Ebene nach Fig. 62 ein Punkt auf der Rechtecksseite zwischen $t = \omega$ und $t = \omega + i\omega'$ zu. Der Abstand dieses Punktes von der Axe der reellen Zahlen heifse $b$; man berechnet $b$, wie schon pag. 263 angegeben, indem man das überall endliche Integral im oberen Blatte von dem Verzweigungspunkte $e'$ bis zum Punkte 1 etwa geradlinig erstreckt:

$$ib = \int_{e'}^{1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Der Wert von $t$ in dem genannten Punkte wird alsdann $t = \omega + ib$. Aufser diesem Punkte haben wir natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte

(II) $$t = \omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$$

zu berücksichtigen. Darauf schließen wir ebenso wie oben, *daß die Stellen* (I) *einfache Unendlichkeitsstellen, die Stellen* (II) *einfache Nullstellen und zwar die einzigen Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktion* $\gamma(t)$ *sind.*

Die noch fehlenden Null- und Unendlichkeitsstellen von $\beta$ und $\delta$ ergeben sich darauf aus der Bemerkung, daß $\alpha$ und $\delta$ einerseits, $\beta$ und $-\gamma$ andrerseits konjugiert imaginäre Größen sind. Dies folgte für reelle Werte von $t$ aus der ursprünglichen Definition unserer Parameter (vgl. pag. 21); es gilt aber auch für konjugiert komplexe Werte der Zeit, wie unmittelbar aus der Integraldarstellung der Logarithmen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ hervorgeht. Mithin werden auch die Nullstellen von $\beta$ und $\delta$ denen von $\alpha$ und $\gamma$ konjugiert sein; wir erhalten diese aus den unter (II) angegebenen Werten, indem wir einfach $+ia$, $+ib$ mit $-ia$, $-ib$ vertauschen. Ferner werden die Unendlichkeitsstellen von $\beta$ und $\delta$ mit denen von $\alpha$ und $\gamma$ direkt übereinstimmen, da die unter (I) angegebenen Punkte in ihrer Gesamtheit sich selbst konjugiert sind. Die vollständige Tabelle der Null- und Unendlichkeitsstellen unserer vier Parameter sieht daher folgendermaßen aus:

| | Nullstellen. | Unendlichkeitsstellen. |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $+ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$ | $i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'$. (für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$) |
| $\beta$ | $+\omega - ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$ | |
| $\gamma$ | $-\omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$ | |
| $\delta$ | $-ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$ | |

Nunmehr sind wir in der Lage, die explicite Darstellung unserer Parameter als Funktionen der Zeit zu entwickeln. Diese gründen wir auf die sogenannten $\vartheta$-Funktionen, welche seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Transcendenten eine ganz fundamentale Rolle spielen.

## § 4. Darstellung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ durch $\vartheta$-Quotienten.

Die $\vartheta$-Funktionen sind eindeutige Funktionen ihres Argumentes, welches wir mit $t$ bezeichnen, die im Endlichen nirgends unendlich werden. Sie besitzen, ähnlich wie die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ein System äquivalenter Nullstellen, von dem auf jedes Periodenrechteck eine Nullstelle entfällt; beim Übergange von einem Periodenrechteck zu einem anderen multiplizieren sie sich je mit einem charakteristischen Faktor, welcher aber nicht, wie bei den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, von $t$ unabhängig ist. Eine weitere Eigenschaft der $\vartheta$-Funktionen, welche für unsere Zwecke

besonders wertvoll ist, besteht darin, daſs sie sich auſserordentlich gut konvergenter und für die numerische Rechnung geeigneter Reihendarstellungen erfreuen.*)

In der Bezeichnung der $\vartheta$-Funktionen herrscht bei den verschiedenen Autoren leider eine groſse Verschiedenheit. Wir werden uns hier an keine der üblichen Bezeichnungen genau halten, was insofern unbedenklich ist, als unsere Darstellung für sich genommen verständlich sein soll.

Während Jacobi vier nicht wesentlich unterschiedene $\vartheta$-Funktionen neben einander betrachtet, werden wir mit einer solchen auskommen. Wir bezeichnen sie durch $\vartheta(t)$ und richten die Definition so ein, daſs $\vartheta$ eine ungerade Funktion von $t$ wird, daſs sie also im Nullpunkte der $t$-Ebene sowie in den sämtlichen äquivalenten Punkten und nur in diesen verschwindet. Formal sei unsere $\vartheta$-Funktion durch die folgende Reihe gegeben:

$$(1)\qquad \vartheta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)}\, e^{-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\pi i}$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$(2)\qquad q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \qquad s = \frac{t\pi}{2\omega}$$

können wir, was gelegentlich bequem sein wird, hierfür auch schreiben:

$$(3)\qquad \vartheta(t) = 2q^{1/4}\sin s - 2q^{9/4}\sin 3s + 2q^{25/4}\sin 5s - \cdots.$$

Die Jacobische Bezeichnung für unsere Funktion würde lauten:

$$\mathrm{H}\left(\frac{2\omega s}{\pi}\right) = \mathrm{H}(t).$$

Die Eigenschaften der $\vartheta$-Funktion, welche oben bereits allgemein angedeutet wurden, lassen sich nun für unsere spezielle Auswahl derselben auf Grund der Gleichung (1) leicht verifizieren.

Zunächst sieht man, daſs unsere Funktion eindeutig und für alle endlichen Werte von $t$ endlich ist. Die Reihe (1) konvergiert nämlich, wie man leicht nachweist, in der ganzen $t$-Ebene.

---

*) Statt der $\vartheta$-Funktion wird in der Litteratur jetzt meist die von Weierstrass eingeführte $\sigma$-Funktion gebraucht, welche sich von der $\vartheta$-Funktion nur um einen Exponentialfaktor unterscheidet. Wir ziehen die $\vartheta$-Funktion für unsere Zwecke vor, weil ihre Verwendung weniger Vorbereitungen erfordert und die spezifischen Vorzüge der $\sigma$-Funktion hier doch nicht zur Geltung kommen. Überdies ist die $\vartheta$-Funktion für die numerische Berechnung, die wir stets im Auge behalten müssen, hinterher doch unentbehrlich.

Wir bestimmen sodann das Verhalten der $\vartheta$-Funktion bei Vermehrung ihres Argumentes um Periodenvielfache. Offenbar ändert eine Hinzufügung der reellen Periode $2\omega$ in jedem einzelnen Gliede der Reihe (3) nur das Vorzeichen. Wir haben also

$$\vartheta(t + 2\omega) = -\vartheta(t). \tag{4}$$

Fügen wir die imaginäre Periode $2i\omega'$ hinzu, setzen also $t + 2i\omega'$ statt $t$, so wird der Exponent des allgemeinen Gliedes in (1)

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\pi - \frac{\omega'}{\omega}(2n-1)\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n-1}{2}\pi i =$$

$$-\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi + \frac{\omega'}{\omega}\pi + \frac{t+\omega}{\omega}\,\frac{2n+1}{2}\pi i - \frac{t+\omega}{\omega}\pi i.$$

Dieser Exponent hat also den von $n$ unabhängigen Zuwachs

$$\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t+\omega}{\omega}\pi i$$

bekommen und aufserdem hat sich der Stellenzeiger $n$ um eine Einheit vermehrt. Durch letzteren Umstand wird aber der Wert der Reihe nicht geändert, da $n$ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Wir finden daher

$$\vartheta(t + 2i\omega') = -e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi - \frac{t\pi i}{\omega}}\,\vartheta(t). \tag{5}$$

Die Funktionaleigenschaften (4) und (5) können umgekehrt zusammen mit der Forderung, dafs $\vartheta$ nirgends unendlich werden soll, dazu dienen, um die $\vartheta$-Funktion bis auf einen konstanten Faktor zu definieren, was wir nur historisch anführen.

Um von hieraus zu der in Aussicht gestellten Darstellung unserer Parameter zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Derselbe wird null bez. unendlich grofs an den Stellen $t = ia$ bez. $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen, und zwar beides von der ersten Ordnung. Dieser Ausdruck besitzt also dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie unsere Funktion $\alpha(t)$ (vgl. den vorigen Paragraphen). Er unterscheidet sich von der letzteren demnach nur um einen Faktor, welcher für keinen endlichen Wert von $t$ verschwindet oder unendlich grofs wird, dessen Logarithmus also für keinen endlichen Wert von $t$ unendlich grofs werden kann. Einem solchen Faktor können wir stets die Form geben

$$e^{G(t)},$$

wo $G(t)$ eine Funktion ist, die im Endlichen nirgends unendlich wird, eine sogenannte ganze transcendente Funktion. Wir haben also die Gleichung

$$\alpha(t) = e^{G(t)}\,\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}. \tag{6}$$

In unserem Falle folgt nun aus den Eigenschaften des Parameters $\alpha(t)$ einerseits und der $\vartheta$-Funktion andrerseits, daſs sich die *transcendente ganze* Funktion auf eine *lineare ganze* Funktion reduzieren muſs. Nach den soeben bewiesenen Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktion multipliziert sich nämlich der $\vartheta$-Quotient auf der rechten Seite bei Vermehrung von $t$ um eine der beiden Perioden mit einem konstanten Faktor, nämlich mit

$$+1$$

bei Hinzufügung von $2\omega$, mit

$$e^{-\frac{a-\omega'}{\omega}\pi}$$

bei Hinzufügung von $2i\omega'$. Ferner wissen wir (vgl. pag. 414), daſs auch $\alpha(t)$ bei Vermehrung von $t$ um eine der beiden Perioden einen von $t$ unabhängigen Faktor annimmt. Die Faktoren der rechten und linken Seite in unserer Gleichung müssen übereinstimmen; wir haben daher, unter $c$ und $c'$ zwei Konstanten verstanden, die sich aus den genannten Faktoren zusammensetzen,

$$G(t+2\omega) - G(t) = c,$$
$$G(t+2i\omega') - G(t) = c',$$

woraus durch Differentiation nach $t$ folgt:

$$G'(t+2\omega) = G'(t),$$
$$G'(t+2i\omega') = G'(t).$$

Hiernach wäre $G'(t)$ eine doppeltperiodische Funktion, welche im Endlichen nirgends unendlich wird. In der Funktionentheorie wird aber gezeigt, daſs eine solche Funktion notwendiger Weise eine Konstante ist. Wir haben also etwa

$$G'(t) = l$$

und

$$e^{G(t)} = k e^{lt}, \tag{7}$$

wo $k$ und $l$ gewisse von $t$ unabhängige Gröſsen sind, welche wir sogleich näher angeben werden.

Die explicite Form der Funktion $\alpha(t)$ ist nun auf Grund der Gleichungen (6) und (7) bekannt. Fügen wir die analog gebauten und ebenso abzuleitenden Ausdrücke für $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ hinzu, so erhalten wir:

$$\tag{8} \begin{cases} \alpha = k_1 e^{l_1 t}\dfrac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \beta = k_2 e^{l_2 t}\dfrac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}, \\ \gamma = k_3 e^{l_3 t}\dfrac{\vartheta(t+\omega-ib)}{\vartheta(t+i\omega')}, \\ \delta = k_4 e^{l_4 t}\dfrac{\vartheta(t+ia)}{\vartheta(t+i\omega')}. \end{cases}$$

Wir sind damit zu dem Resultate gelangt: *Unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ werden dargestellt je durch einen einfachen $\vartheta$-Quotienten, zu dem noch eine Exponentialgröfse und eine Konstante als Faktor hinzutritt.*

Übrigens ist es nur nötig, zwei dieser Ausdrücke, etwa $\alpha$ und $\beta$ zu berechnen, weil alsdann die beiden anderen Parameter als konjugiert imaginäre Gröfsen mitbestimmt sind.

Man bemerke noch, dafs die hier eingeschlagene Methode recht eigentlich dem schönen Prinzipe entspricht, welches Riemann in allen seinen Untersuchungen zur Geltung gebracht hat: Zuerst die Eigenschaften der zu behandelnden Funktionen zu diskutieren und alles Formelmäfsige bis zum Schlufs zurückzudrängen, wo es sich gleichsam von selbst aus den festgestellten Eigenschaften der Funktionen ergeben mufs. So haben wir in der That unsere analytische Darstellung (8) als eine notwendige Konsequenz der vorhergehenden Untersuchungen über die Eindeutigkeit unserer Funktionen, über die Lage ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen gewonnen.

Um die prinzipielle Bedeutung der Ausdrücke (8) ins rechte Licht zu setzen, schicken wir einige historische Bemerkungen hinsichtlich der elliptischen Funktionen voraus.

Ursprünglich verstand man seit Jacobi unter einer elliptischen Funktion ausschliefslich eine solche Funktion, welche bei Vermehrung des Argumentes um Periodenvielfache *völlig ungeändert* bleibt.

Man zeigt*), dafs eine so definierte elliptische Funktion in dem von den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ gebildeten Rechtecke (oder allgemeiner gesagt, Parallelogramme) jeden Wert, insbesondere die Werte Null und Unendlich die gleiche Anzahl von Malen annimmt. Diese Anzahl ($n$) heifst der Grad der elliptischen Funktion. Ferner beweist man, dafs zwischen den Argumenten der in einem einzelnen Periodenrechteck gelegenen Nullstellen ($a_\nu$) und denen der Unendlichkeitsstellen ($b_\nu$) die Relation besteht:

$$\Sigma a_\nu - \Sigma b_\nu = 2\mu\omega + 2i\mu'\omega',$$

unter $\mu$ und $\mu'$ zwei ganze Zahlen verstanden. Es ist nun immer möglich, eine elliptische Funktion durch einen $\vartheta$-Quotienten auszudrücken, in der Form:

$$k e^{\lambda t} \prod_{\nu=1,\ldots n} \frac{\vartheta(t-a_\nu)}{\vartheta(t-b_\nu)}.$$

In der That besitzt dieser Ausdruck vermöge der oben angegebenen Funktionaleigenschaften der $\vartheta$-Funktion die geforderte Periodicität

*) Diese allgemeinen Sätze sind wohl zuerst von Liouville erkannt worden. Vgl. seine Note: Sur les fonctions elliptiques. Liouvilles Journal, Bd. XX, 1855.

wenn man noch die Gröſse $l$ gleich $\frac{i\pi\mu'}{\omega}$ wählt. Insbesondere bemerken wir noch, daſs ein reiner $\vartheta$-Quotient $(l=0)$ jedenfalls dann eine doppeltperiodische Funktion darstellt, wenn die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist.

Später hat Hermite*) darauf aufmerksam gemacht, daſs man namentlich in den mechanischen Anwendungen auf allgemeinere $\vartheta$-Quotienten geführt wird, zwischen deren Null- und Unendlichkeitsstellen die soeben angegebene Relation nicht besteht, und daſs es der Mühe wert ist, diese Quotienten als selbständige Elemente in die Theorie einzuführen. Er belegt sie mit dem schon pag. 415 benutzten Namen der *elliptischen Funktionen zweiter Art* und unterscheidet die rein periodischen Funktionen von ihnen als *elliptische Funktionen erster Art.* Eine elliptische Funktion zweiter Art ändert sich, wenn man das Argument $t$ um Perioden wachsen läſst, je um einen konstanten Faktor; sie verhält sich, wie wir sagen, *multiplikativ.*

Die Anzahl der im Zähler (oder Nenner) stehenden $\vartheta$-Funktionen giebt allemal den Grad der Funktion an. Dabei besteht folgender Unterschied zwischen den elliptischen Funktionen erster und zweiter Art: *Es giebt keine elliptischen Funktionen erster Art ersten Grades; dagegen sind elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades sehr wohl möglich.*

Wäre nämlich bei einer elliptischen Funktion erster Art $n=1$, so hätten wir im Periodenparallelogramm nur eine Nullstelle und, wegen der für die $a_\nu$, $b_\nu$ bestehenden Relation, eine mit jener zusammenfallende Unendlichkeitsstelle. Man könnte dann die $\vartheta$-Funktion des Zählers gegen die des Nenners fortheben, sodaſs sich die Funktion auf eine Konstante reduzieren müſste.

Diese Bemerkung findet auf elliptische Funktionen zweiter Art keine Anwendung, weil bei ihnen die Relation zwischen den $a_\nu$ und $b_\nu$ in Fortfall kommt. Natürlich sind unter den elliptischen Funktionen zweiter Art diejenigen des ersten Grades die allereinfachsten und wichtigsten. Wir sehen nun:

*Unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sind in der Hermiteschen Terminologie gerade solche elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades. Die in kinematischer Hinsicht einfachsten Elemente der Kreiselbewegung erscheinen also auch in der analytischen Darstellung so einfach wie irgend möglich.*

Nicht so einfach — und darin beruht gerade die analytische Überlegenheit unserer Parameter — stellt sich die explicite Darstellung der

*) In der pag. 151 citierten Schrift.

Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ oder richtiger ihrer trigonometrischen Funktionen.

Die Funktion $\cos\vartheta = u(t)$ haben wir schon im vorigen Paragraphen betrachtet. Diese Funktion ist, da sie bei Vermehrung des Argumentes um Perioden völlig ungeändert bleibt, eine elliptische Funktion erster Art, aber nicht vom ersten Grade (doppelperiodische Funktionen ersten Grades sind ja nach Obigem überhaupt unmöglich), sondern vom zweiten Grade. In der That sieht man sofort, dafs $u(t)$ an zwei (verschiedenen oder zusammenfallenden) Stellen des Periodenrechtecks null und unendlich wird. Dem Punkte $u = 0$ der $u$-Ebene entsprechen nämlich auf der Riemannschen Fläche zwei verschiedene Stellen, eine im unteren und eine im oberen Blatte, und daher auch in jedem Periodenrechtecke der $t$-Ebene zwei verschiedene Punkte. Die Stelle $u = \infty$ andrerseits ist ein Verzweigungspunkt; ihr Bild in der $t$-Ebene ($t = i\omega'$) ist daher doppelt zu zählen. Dementsprechend werden in der Darstellung der Funktion $u(t)$ vier $\vartheta$-Funktionen auftreten, zwei im Zähler und zwei (unter sich gleiche, mit dem Argumente $t - i\omega'$) im Nenner.

Ähnlich liegt die Sache bei dem Winkel $\psi$. Zunächst werden wir, da der Multiplikator der logarithmischen Unendlichkeitsstellen von $\psi$ nach pag. 400 $\pm \frac{i}{2}$ beträgt, statt $\psi$ lieber $2i\psi$ betrachten. Dadurch kommen wir auch hier zu dem Multiplikator $\pm 1$ zurück. Gehen wir nun zu der zugehörigen Exponentialfunktion $e^{2i\psi}$ über, so zeigen wir ebenso wie bei den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, dafs diese Funktion auf der Riemannschen Fläche unverzweigt und in der $t$-Ebene daher eindeutig ist. Ihre Null- und Unendlichkeitsstellen sind nach Früherem bekannt. Da $\psi$ für $u = \pm 1$ logarithmisch unendlich wird, so verschwindet $e^{2i\psi}$ auf der Riemannschen Fläche an diesen beiden Stellen je in einem der beiden Blätter und wird in dem anderen Blatte von der ersten Ordnung unendlich.

Die entsprechenden Stellen der $t$-Ebene sind die Punkte $\pm ia$ und $\pm ib$ (bez. die äquivalenten Stellen). Auf diese vier Stellen verteilen sich also die Null- und Unendlichkeitsstellen von $\psi$. Dementsprechend wird sich die analytische Darstellung aus den $\vartheta$-Funktionen: $\vartheta(t + ia)$, $\vartheta(t - ia)$, $\vartheta(t + ib)$, $\vartheta(t - ib)$ in dem Sinne zusammensetzen, dafs zwei dieser Funktionen im Zähler, zwei im Nenner auftreten. Wir haben es also jedenfalls mit einer *elliptischen Funktion zweiten Grades* zu thun. Aus den Eigenschaften des elliptischen Integrales für $\psi$ folgt ferner, dafs $e^{2i\psi}$ beim Übergang zu einem anderen Periodenrechtecke der $t$-Ebene nicht ungeändert bleibt, sondern sich

mit einem von $t$ unabhängigen Faktor multipliziert. $e^{2i\psi}$ stellt also wieder eine *elliptische Funktion zweiter Art dar.*

Berücksichtigen wir noch, dafs der Winkel $\varphi$ sich ähnlich verhält wie $\psi$, so können wir zusammenfassend sagen:

*Die trigonometrischen Funktionen*

$$\cos\vartheta, \quad \cos 2\psi + i\sin 2\psi, \quad \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

*der Eulerschen Winkel sind nicht, wie unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ elliptische Funktionen ersten, sondern zweiten Grades (und zwar teils von der ersten, teils von der zweiten Art).*

Übrigens können wir auch direkt die Darstellung der vorgenannten trigonometrischen Funktionen auf die Darstellung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ durch $\vartheta$-Quotienten zurückführen. Wir brauchen zu dem Zwecke nur die Schemata (7) und (9) von pag. 20 und 21 zu vergleichen. Aus der letzten Horizontal- oder Vertikalreihe ergiebt sich nämlich:

$$(8') \quad \begin{cases} \cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma, & \sin\vartheta = \sqrt{-4\alpha\beta\gamma\delta}, \\ e^{2i\psi} = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}, & e^{2i\varphi} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (8) haben wir in diesen Gleichungen die *explicite Darstellung der Eulerschen Winkel als Funktionen der Zeit* vor uns.

Um diese Betrachtungen abzuschliefsen, haben wir noch die Bestimmung der Konstanten $k_i$ und $l_i$ aus den Gleichungen (8) nachzutragen.

Zunächst zeigen wir, dafs sich diese Konstanten paarweise auf einander reduzieren lassen, dafs wir nämlich haben:

$$(9) \quad \begin{cases} l_4 = -l_1, & l_3 = -l_2, \\ k_4 = \phantom{-}k_1, & k_3 = \phantom{-}k_2. \end{cases}$$

Die beiden letzten Relationen ergeben sich folgendermafsen: Wir setzen in (8) $t = 0$ und erhalten zunächst, unter $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ die Anfangswerte von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ verstanden:

$$(10) \quad \begin{cases} k_1 = \alpha_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-ia)}, \quad k_2 = \beta_0 \dfrac{\vartheta(-i\omega')}{\vartheta(-\omega+ib)}, \quad k_3 = \gamma_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+\omega-ib)}, \\ k_4 = \delta_0 \dfrac{\vartheta(+i\omega')}{\vartheta(+ia)}. \end{cases}$$

Die $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ können wir nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 durch die Anfangswerte $\vartheta_0$, $\varphi_0$, $\psi_0$ der Eulerschen Winkel ausdrücken. Von diesen sind aber die Gröfsen $\varphi_0$, $\psi_0$, welche die Anfangslage der $X$- und $x$-Axe gegen die Knotenlinie angeben, gänzlich willkürlich. In der That hängt der Charakter der eintretenden Bewegung in keiner Weise davon ab, wie wir die $X$-Axe in der

Äquatorebene des Kreisels und die $x$-Axe in der Horizontalebene orientieren. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir also etwa anfangs die $X$- und $x$-Axe mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen, d. h. $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ nehmen.*) Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs $\alpha_0 = \delta_0$, $\beta_0 = \gamma_0$ ist. Gleichzeitig wird nach (10) mit Rücksicht darauf, dafs die hier vorkommenden $\vartheta$-Quotienten paarweise gleich sind, wie behauptet wurde,

$$k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3.$$

Die beiden ersten Relationen (9) folgern wir daraus, dafs die Produkte $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ leicht angebbare doppeltperiodische Funktionen sind. Wir haben nämlich (wieder nach den Gleichungen (8) von pag. 21):

$$\alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}. \tag{11}$$

Die beiden rechts stehenden Gröfsen sind aber ebenso wie $u$ selbst doppeltperiodische Funktionen.

Wir wollen ihre Darstellung durch $\vartheta$-Funktionen angeben. Es verschwindet $\frac{u+1}{2}$, wenn $u = -1$, d. h. $t = \pm ia$. Ebenso verschwindet $\frac{u-1}{2}$, wenn $u = +1$, d. h. $t = \pm(\omega - ib)$. Ferner wird sowohl $\frac{u+1}{2}$ wie $\frac{u-1}{2}$ unendlich, wenn $u = \infty$, d. h. $t = \pm i\omega'$ ist. Wir bilden nun die $\vartheta$-Quotienten

$$\frac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dieses sind, (da beidemal die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist), direkt doppeltperiodische Funktionen von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$. Von diesen können sich unsere $\vartheta$-Quotienten nur je um eine Konstante unterscheiden. Wir schreiben daher

$$\begin{cases} \dfrac{u+1}{2} = k^2\,\dfrac{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}, \\[2ex] \dfrac{u-1}{2} = k'^2\,\dfrac{\vartheta(t+\omega-ib)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-i\omega')}. \end{cases} \tag{12}$$

*) Wollten wir diese vereinfachende Annahme nicht machen, so würden die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in den Schlufsformeln je mit einem Faktor vom absoluten Betrage 1 behaftet erscheinen, nämlich bez. mit

$$e^{\frac{i(\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0+\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(\varphi_0-\psi_0)}{2}}, \quad e^{\frac{i(-\varphi_0-\psi_0)}{2}},$$

welcher notwendig unbestimmt bleibt und für alles Folgende belanglos ist.

Die hier eingeführten Konstanten $k^2$ und $k'^2$ ergeben sich leicht, wenn wir in der ersten Gleichung (12) etwa $t = \omega + ib$ und dementsprechend $u = +1$, in der zweiten $t = ia$ und $u = -1$ setzen. Dann erhalten wir nämlich

$$(13) \quad \begin{cases} k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}, \\ k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}. \end{cases}$$

Nunmehr tragen wir diese Werte von $\frac{u+1}{2}$ und $\frac{u-1}{2}$ in (11) ein und setzen gleichzeitig für $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ die aus (8) sich ergebenden Ausdrücke. Dann heben sich die von $t$ abhängigen $\vartheta$-Quotienten heraus und wir erhalten:

$$k_1 k_4 e^{(l_1 + l_4)t} = k^2,$$
$$k_2 k_3 e^{(l_2 + l_3)t} = k'^2.$$

Es muſs also sein

$$l_1 + l_4 = 0, \quad l_2 + l_3 = 0$$
$$k_1 k_4 = k^2, \qquad k_2 k_3 = k'^2.$$

Die erste Reihe liefert die Bestätigung der in den Gleichungen (9) ausgesprochenen Behauptung. Die zweite Reihe giebt mit Rücksicht auf dieselben Gleichungen:

$$(14) \qquad k_1 = k_4 = k, \quad k_2 = k_3 = k'.$$

*Die Bestimmung der Konstanten $k_i$ ist damit geleistet;* es erübrigt nur noch, ein Wort über die Vorzeichen zu sagen, mit denen die Quadratwurzeln in $k$ und $k'$ gerechnet werden sollen. Dieselben ergeben sich aus den Anfangswerten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da $\varphi_0$ und $\psi_0$ gleich Null genommen wurden und $\frac{\vartheta_0}{2}$ jedenfalls einen spitzen Winkel bedeutet, also $\cos\frac{\vartheta_0}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ positive Gröſsen sind, so wird nach den Definitionsgleichungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von pag. 21 $\alpha_0$ positiv reell, $\beta_0$ positiv imaginär. Die Vorzeichen von $k$ und $k'$ sind also so zu wählen, daſs sich für $t = 0$ aus den Gleichungen (8) von pag. 420 ein positiver Wert von $\alpha$ und ein positiv imaginärer Wert von $\beta$ ergiebt. Berücksichtigt man nun, daſs, unter $\tau$ eine positive reelle Zahl $< 2\omega'$ verstanden, $\vartheta(+i\tau)$ positiv imaginär, $\vartheta(-i\tau)$ negativ imaginär, $\vartheta(\omega \pm i\tau)$ positiv reell, $\vartheta(-\omega \pm i\tau)$ negativ reell ist, wie leicht aus der Reihe (3) zu schlieſsen ist, so erkennt man, *daſs $k$ und $k'$ beide reell sind, und daſs $k$ mit positivem, $k'$ mit negativem Vorzeichen zu rechnen sein wird.* Diese Vorzeichenbestimmung wolle man für das Folgende, wo wir nicht ausdrücklich darauf zurückkommen werden, im Gedächtnis behalten.

Schliefslich haben wir noch die gemeinsamen Werte der Konstanten $l_1$ und $-l_4$, sowie $l_2$ und $-l_3$ zu finden.

Zu dem Zweck differentiieren wir die erste der Gleichungen (8) logarithmisch nach $t$ und finden zunächst:

$$(15)\qquad l_1 = \frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{\vartheta'(t-ia)}{\vartheta(t-ia)} + \frac{\vartheta'(t-i\omega')}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Hier setzen wir für $t$ irgend einen speziellen Wert ein, z. B. $t = ia$. Dann zerstören sich rechterhand, wie wir sogleich nachweisen werden, die beiden ersten Terme gegenseitig und es ergiebt sich

$$(16)\qquad l_1 = \frac{\vartheta'(ia-i\omega')}{\vartheta(ia-i\omega')}.$$

Für $t = ia$ wird nämlich $u = -1$, so dafs wir nach dem Taylorschen Satze haben:

$$(17)\qquad u+1 = c(t-ia) + \cdots,\quad c = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia}$$

Ferner schreiben wir

$$\frac{d\log\alpha}{dt} = \frac{d\log\alpha}{du}\cdot\frac{du}{dt}.$$

Es wird aber nach pag. 402 für $u = -1$

$$\frac{d\log\alpha}{du} = \frac{1}{u+1}$$

bis auf Terme, die mit $u+1$ verschwinden. Wir haben also mit Rücksicht auf (17)

$$\left(\frac{d\log\alpha}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{1}{u+1}\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=ia} = \frac{c}{u+1} = \frac{1}{t-ia}.$$

Gleichzeitig wird, da die $\vartheta$-Funktion eine ungerade Funktion ihres Argumentes ist, die mit ihrem Argument von der ersten Ordnung verschwindet:

$$\left(\frac{\vartheta'(t-ia)}{\vartheta(t-ia)}\right)_{t=ia} = \frac{1}{t-ia}$$

abermals bis auf Terme, welche mit $t-ia$ oder $u+1$ verschwinden. Die beiden unendlich werdenden ersten Terme in Gleichung (15) heben sich also in der That für $t = ia$ gegenseitig auf und es ergiebt sich für $l_1$ der in (16) angegebene einfache Wert.

In ganz entsprechender Weise findet man für $l_2$ den Wert

$$(16')\qquad l_2 = \frac{\vartheta'(\omega-ib-i\omega')}{\vartheta(\omega-ib-i\omega')}.$$

Die somit bestimmten Gröfsen $l_i$ sind, wie man sich leicht überzeugt, sämtlich rein imaginär. Aus der Definitionsgleichung (3) der $\vartheta$-Funktion folgt nämlich, dafs diese Funktion für ein rein imaginäres

Argument selbst rein imaginär ist, und dafs gleichzeitig ihr Differentialquotient reell wird. Dasselbe findet statt, wie ebenfalls aus Gleichung (3) ersichtlich, wenn der reelle Teil des Argumentes (wie in dem Ausdrucke von $l_2$) gleich $-\omega$ ist. Wir schreiben daher, indem wir unter $l$ und $l'$ zwei reelle Gröfsen verstehen, $l_1 = il$, $l_2 = il'$.

Die vollständige Tabelle der Konstanten $l_i$ und $k_i$, durch welche unsere letzten Resultate zusammengefafst werden, lautet nun folgendermafsen:

$$(18)\begin{cases} k_1 = k, \quad k_2 = k', \quad k_3 = k', \quad k_4 = k \\ l_1 = il, \quad l_2 = il', \quad l_3 = -il', \quad l_4 = -il \\ k^2 = \dfrac{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)\,\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)}, \quad k'^2 = \dfrac{\vartheta(ia + i\omega')\,\vartheta(ia - i\omega')}{\vartheta(\omega + ia + ib)\,\vartheta(\omega - ia + ib)} \\ l = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}, \quad l' = i\,\dfrac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)}. \end{cases}$$

*Tragen wir diese Werte der Konstanten in die Formeln* (8) *von pag. 420 ein, so sind unsere Parameter* $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\gamma$ *in sehr übersichtlicher Weise als Funktionen von* $t$ *dargestellt.*

Hinsichtlich der Konstanten des Problems kann man dabei noch einen doppelten Standpunkt einnehmen.

Man kann erstens, wie es in den früheren Entwickelungen stets geschah, diejenigen Gröfsen, durch welche die Anfangslage und Anfangsbewegung sowie die Massenverteilung des Kugelkreisels gegeben wird, als die fundamentalen Konstanten des Problems ansehen. Es waren dieses die Gröfsen $e$, $n$, $N$, $P$ und $A$, wobei es aber, wie man leicht erkennt, bei den letztgenannten vier Gröfsen nur auf die Verhältnisse $n : N : P : A$ ankommt. Diese vier Gröfsen stellen also zusammen mit $e$ nur vier wesentliche numerische Daten vor. Wir wollen diese vier Daten die „*elementaren Konstanten des Problems*“ nennen. Von diesem ersten Standpunkte aus hätte man, bevor man unsere Schlufsformeln anwenden kann, die mit $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$ bezeichneten Werte des Integrals erster Gattung aus den elementaren Konstanten zu berechnen, wofür die geeigneten Methoden im vierten Kapitel entwickelt sind.

Man kann zweitens aber auch eben diese vier Integralwerte als die fundamentalen, den Kugelkreisel charakterisierenden Daten ansehen und kann diese in ganz beliebiger Weise als reelle Gröfsen vorgeben. Wir nennen diese vier Gröfsen kurzweg die „*transcendenten Konstanten des Problems*“. Von diesem zweiten Standpunkte aus ist die Kenntnis der elementaren Konstanten für die Beherrschung der Bewegungen überflüssig, da in den Schlufsformeln nur die als gegeben angenommenen transcendenten Konstanten vorkommen. Übrigens lassen sich umgekehrt jene aus diesen mit Hülfe von $\vartheta$-Reihen jederzeit berechnen.

Das Voranstellen der elementaren Konstanten liegt allerdings in geometrischer und mechanischer Hinsicht zunächst näher. Indessen bringt die Bevorzugung der transcendenten Konstanten in analytischer Hinsicht den Vorteil gröſserer Symmetrie und Einfachheit mit sich, so daſs wir von den beiden eben genannten Standpunkten den zweiten als den höheren und analytisch befriedigenderen bezeichnen möchten. Er wird namentlich in den späteren Paragraphen dieses Kapitels für uns maſsgebend sein.

Zum Schluſs einige historische Notizen.

Grundlegend hat sich mit der Darstellung der Bewegung des schweren Kreisels durch elliptische Funktionen Jacobi*) beschäftigt. Indessen ist er nicht dazu gekommen, seine Resultate zu publizieren. In der Litteratur wird der Gegenstand im Anschluſs an Jacobi zum ersten Male von Lottner**) behandelt, der auch die bezüglichen Teile des Jacobischen Nachlasses herausgegeben hat. Beide Autoren gehen darauf aus, die neun Richtungscosinusse, welche die Axen des beweglichen mit dem festen Koordinatensystem***) bilden, durch $\vartheta$-Funktionen auszudrücken. Wir haben die Darstellung der neun Richtungscosinusse auf Grund unserer Darstellung der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unmittelbar in der Hand. Wir brauchen nur die Werte der letzteren in das Schema (9) von pag. 21 einzutragen, wobei sich elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades ergeben würden, und Reelles und Imaginäres zu trennen. Da dieses Verfahren indessen den Übergang von dem Einfacheren zum Komplizierteren bedeuten würde, so können wir auf seine Durchführung füglich verzichten.

Ganz nahe der Einführung unserer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kommt Hr. W. Heſs†) in einer Arbeit „Über das Gyroskop". Gegen Ende derselben findet sich als Resultat ziemlich umfangreicher, an die Lottnersche Darstellung anschlieſsender Rechnungen die Bemerkung, daſs die „Elemente der Eulerschen Rotation", d. h. in unserer Bezeichnung die Quaternionengröſsen

$$A = \frac{\beta + \gamma}{2i}, \quad B = \frac{-\beta + \gamma}{2}, \quad C = \frac{\alpha - \delta}{2i}, \quad D = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

*) Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave etc. und Sur la rotation d'un corps etc. Ges. W. Bd. II, p. 477 und 493. Vorher schon Rueb, vgl. p. 473 Anm. **)

**) Reduktion eines schweren, um einen festen Punkt rotierenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, Crelles Journ. Bd. 50, 1855.

***) Genau genommen handelt es sich bei Jacobi und Lottner um zwei Axenkreuze, welche sich relativ gegen die genannten mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die $Z$- bez. $z$-Axe drehen. Die Einführung dieser Koordinatensysteme entspricht zum Teil der Reduktion des schweren symmetrischen Kreisels auf den Kugelkreisel, zum Teil der Absonderung eines Präcessionsbestandteils von dem rein periodischen Nutationsbestandteile der Bewegung.

†) Math. Annalen Bd. 29, 1887, vgl. insbesondere die beiden letzten Seiten.

ein viel einfacheres Gepräge zeigen, wie die Richtungscosinus, welche Jacobi und Lottner betrachten, „indem erstere nur von je einem, letztere dagegen von zwei konstanten Parametern abhängig sind", d. h. in unserer Terminologie, indem erstere im Wesentlichen elliptische Funktionen ersten, letztere dagegen zweiten Grades sind. Indessen hat der Verfasser aus dieser Bemerkung keine weiteren Konsequenzen gezogen, wie denn die Quaternionengröfsen hier nur ganz beiläufig und keineswegs als Grundlage der Theorie auftreten.

## § 5. Die Bahnkurve der Kreiselspitze, Polhodie- und Herpolhodiekurve u. s. w., dargestellt durch $\vartheta$-Quotienten.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln enthalten implicite die Beantwortung aller Fragen, welche die Kreiselbewegung betreffen. Es kann sich im Folgenden nur noch darum handeln, die Konsequenzen der allgemeinen analytischen Darstellung bezüglich einiger besonderer Punkte ausdrücklich hervorzuheben.

Unser Hauptinteresse haben wir früher auf die Schilderung der „Bahnkurve" gerichtet. Wir wollen daher auch hier zunächst nach der Bahnkurve der Kreiselspitze fragen. Wir werden sehen, dafs ihre Gleichung mit Hülfe der $\vartheta$-Funktionen äufserst elegant herauskommt.

Dabei haben wir jetzt die geometrisch-funktionentheoretischen Methoden des ersten Kapitels (vgl. § 3 desselben) wieder aufzunehmen.

Wir betrachteten dort (vgl. pag. 29) zwei vereinigt gelegene Einheitskugeln mit dem Mittelpunkte in $O$, eine im Raume und eine im Kreisel feste, welche im Riemannschen Sinne Träger je einer komplexen Variabeln $\lambda$ und $\Lambda$ waren. Die Variable $\lambda$, welche den Punkten der im Raume festen Einheitskugel zugeordnet war, hing mit den rechtwinkligen Koordinaten $xyz$ dieser Punkte durch die Gleichung zusammen (s. pag. 28, Gleichung (11)):

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z}. \tag{1}$$

Ebenso lautet die Beziehung zwischen der Variabeln $\Lambda$ und den rechtwinkligen Koordinaten $XYZ$ der im Kreisel festen Punkte der zweiten Einheitskugel:

$$\Lambda = \frac{X + iY}{1 - Z}. \tag{1'}$$

Endlich aber besteht zwischen den Variabeln $\lambda$ und $\Lambda$, welche je zwei momentan zusammenfallenden Punkten der beiden Kugeln entsprechen, die folgende einfache Relation:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}, \tag{2}$$

in der die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dieselben Gröſsen sind, die wir im vorigen Paragraphen als Funktionen von $t$ darstellten.

Um von hieraus zur Bahnkurve der Kreiselspitze zu gelangen, setzen wir in (1') die Koordinaten $X, Y, Z$ der Kreiselspitze, nämlich $X=0$, $Y=0$, $Z=+\sqrt{1-X^2-Y^2}$ ein, wobei $\Lambda=\infty$ wird. Vermöge dieses Wertes geht Gleichung (2) über in

$$\lambda=\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Hier tragen wir die Werte von $\alpha$ und $\gamma$ aus dem vorigen Paragraphen ein und erhalten zunächst

$$\lambda=\frac{k}{k'}e^{i(l+l')t}\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+\omega-ib)}\frac{\vartheta(t+i\omega')}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Berücksichtigen wir noch die Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktionen, so können wir setzen:

$$(3)\qquad \frac{\vartheta(t+i\omega')}{\vartheta(t-i\omega')}=-e^{-\frac{i\pi t}{\omega}},\qquad \frac{k^2}{k'^2}=\frac{\vartheta^2(\omega-i\omega'+ib)}{\vartheta^2(ia-i\omega')}e^{-\frac{i\pi}{\omega}(\omega+ib-ia)}.$$

Somit wird bei richtiger Vorzeichenbestimmung (vgl. pag. 426 unten)

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda=Ke^{iLt}\dfrac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t+\omega-ib)};\\[2ex] K=\dfrac{\vartheta(\omega-i\omega'+ib)}{\vartheta(ia-i\omega')}e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega+ib-ia)},\qquad L=l+l'-\dfrac{\pi}{\omega}.\end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Bahnkurve. *Wie wir sehen, bestimmt sich die Bahnkurve der Kreiselspitze wieder durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.*

Um die einfache geometrische Bedeutung unserer Darstellungsweise zu verstehen, erinnern wir an die geometrische Bedeutung der komplexen Variabeln $\lambda$. Wir bezogen die Einheitskugel, deren Punkte durch die Variable $\lambda$ unterschieden waren, mittels stereographischer Projektion vom Nordpol der Einheitskugel auf ihre Äquatorebene. Alsdann war $\lambda$ derjenige komplexe Wert, welcher dem stereographischen Bilde des einzelnen Kugelpunktes nach der üblichen Gauſsischen Deutung der imaginären Gröſsen zukommt. Wir brauchen $\lambda$ nur in einen reellen und imaginären Bestandteil aufzulösen, um die rechtwinkligen Koordinaten des stereographischen Bildpunktes in der Äquatorebene zu erhalten.

*Die Gleichung (4) liefert daher direkt das ebene stereographische Bild der im Raume verlaufenden Bahnkurve; sie kann unmittelbar als Unterlage für die zeichnerische Darstellung der Bahnkurve in stereographischer Projektion dienen.*

Wir erinnern ferner daran, dafs (vgl. pag. 207) für die Zwecke der Zeichnung die stereographische Projektion vor der sonst üblichen orthographischen gewisse Vorzüge voraus hat. Es ist erfreulich, dafs unsere analytische Darstellung der Bahnkurve sich gerade mit dem praktischen Bedürfnisse der Zeichnung deckt.

Vergleichen wir hiermit diejenige Darstellung der Bahnkurve, welche der *orthographischen* Projektion auf die Äquatorebene entspricht.

Wir gelangen zu dieser, wenn wir nach den rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$, $z$ der Kreiselspitze im Raume fragen; sehen wir hier von der dritten Koordinate $z$ ab, so bestimmen uns die beiden übrigen die gewünschte orthographische Projektion. Übrigens empfiehlt es sich, von den $x$, $y$ selbst zu der komplexen Verbindung derselben $\xi = x + iy$ (oder $\eta = -x + iy$) im Sinne von pag. 20 überzugehen, also auch das orthographische Bild der Kreiselspitze, wie vorher das stereographische, durch eine in der Äquatorebene ausgebreitete komplexe Variable festzulegen.

Nun lauten die Koordinaten der Kreiselspitze in dem mit dem Kreisel fest verbundenen $XYZ$-System bez. $X = Y = 0$, $Z = 1$. Die zugehörigen pag. 20 definierten komplexen Verbindungen werden daher $\Xi = \mathsf{H} = 0$, $\mathsf{Z} = -1$. Den gesuchten Wert von $\xi$, ausgedrückt durch unsere $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ entnehmen wir darauf dem Schema (9) von pag. 21. Er wird

$$\xi = -2\alpha\beta.$$

Tragen wir hier die Werte von $\alpha$ und $\beta$ ein, so erhalten wir als Gleichung der Bahnkurve in orthographischer Projektion die folgende:

$$(5)\quad \xi = Ke^{iLt}\frac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')},\quad K = -2kk',\quad L = l + l'.$$

Diese Darstellung steht ersichtlich der früheren an Einfachheit nach. *Die Bahnkurve in orthographischer Projektion bestimmt sich durch eine elliptische Funktion (zweiter Art) zweiten Grades, während sie bei stereographischer Projektion durch eine elliptische Funktion ersten Grades, einen einfachen $\vartheta$-Quotienten, gegeben wird.*

Dafs dieser Umstand nicht zu unterschätzen ist, wird im folgenden Paragraphen klar werden, wenn wir uns zur numerischen Berechnung der Bahnkurve wenden. Da wir in (5) vier (resp. drei verschiedene) $\vartheta$-Werte, in (4) dagegen nur zwei solche Werte nötig haben, so wird die Rechenarbeit bei orthographischer Projektion der Bahnkurve nahezu die doppelte von der Arbeit, welche die Berechnung der stereographisch projicierten Bahnkurve verursacht.

Die Darstellung (5) hat Hermite in seiner p. 151 citierten Schrift bei der Behandlung des sphärischen Pendels gewählt.

Übrigens hatten wir in den Figurenserien von Kapitel IV als Projektionscentrum bei der stereographischen Abbildung nicht den Nordpol, sondern den Südpol der festen Einheitskugel gewählt. Es empfiehlt sich dies immer dann, wenn die Bahnkurve ganz oder hauptsächlich auf der nördlichen Halbkugel verläuft, weil sonst das stereographische Bild übermäfsig vergröfsert und verzerrt erscheinen würde. Wir können aber leicht von der einen Projektionsart zu der anderen übergehen. Geometrisch erreichen wir dies durch eine sog. Inversion am Einheitskreise der $xy$-Ebene; dem entspricht analytisch, dafs wir den Wert der komplexen Variabeln $\lambda$ ersetzen durch den konjugiert reciproken Wert $1 : \bar{\lambda}$. Nehmen wir diesen Übergang in Gleichung (4) vor, so ergiebt sich für die stereographische Projektion vom Südpol die folgende Darstellung:

$$(4') \quad \begin{cases} \lambda = K e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}; \\[2ex] K = \dfrac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - ib + ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Ohne die geringste Mühe können wir nun auch die Bahnkurve angeben, welche ein ganz beliebiger Punkt des Kreisels bei der Bewegung beschreibt. Wir wollen der Kürze halber annehmen, dafs der betreffende Punkt von $O$ den Abstand 1 habe, so dafs er dauernd mit einem Punkte der beweglichen Kugel zusammenfällt. (Im anderen Falle brauchten wir die anzugebende Formel nur mit der Entfernung des Punktes von $O$ zu multiplizieren.) Wir charakterisieren dann die Lage unseres Punktes auf der beweglichen Kugel durch den komplexen Wert $\Lambda = \Lambda_0$ in der früher beschriebenen Weise. Die wechselnden Lagen des Punktes im Raume, d. h. die gesuchte Bahnkurve bez. ihr durch stereographische Projektion vom Nordpole erhaltenes ebenes Abbild wird darauf nach Gleichung (2) gegeben durch

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\alpha \Lambda_0 + \beta}{\gamma \Lambda_0 + \delta}.$$

Die in Gleichung (6) enthaltenen Ausdrücke sind bei beliebigem $\Lambda_0$ nicht mehr direkt elliptische Funktionen erster oder zweiter Art, sondern nur mehr lineare Kombinationen von solchen. —

Die vorstehenden Entwickelungen gelten wie alle Resultate dieses Kapitels zunächst nur für den Fall des Kugelkreisels. Wir können aber von hier aus nach § 5 des vierten Kapitels sehr leicht zu einem symmetrischen Kreisel übergehen, welcher dasselbe äquatoriale Trägheitsmoment $A$ wie der Kugelkreisel und ein beliebiges Trägheitsmoment $C$ um die Figurenaxe hat; dies soll an den Gleichungen der Bahnkurve wirklich ausgeführt werden.

Zu dem Zwecke haben wir nach pag. 234 die Geschwindigkeitskoordinate $\varphi'$ des Kugelkreisels um die konstante Gröfse

$$N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right),$$

welche wir mit $c$ bezeichnen wollen, zu vermehren, während $\vartheta$ und $\psi$ ungeändert bleiben. Die entsprechenden Änderungen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestehen (vgl. die ursprüngliche Definition dieser Gröfsen auf pag. 21) darin, dafs wir

(7)

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| mit | $e^{+\frac{ic}{2}t}$ | $e^{-\frac{ic}{2}t}$ | $e^{+\frac{ic}{2}t}$ | $e^{-\frac{ic}{2}t}$ |

multiplizieren. Infolgedessen lautet die Gleichung für die Bahnkurve eines Punktes $\Lambda_0$ beim symmetrischen Kreisel folgendermafsen:

$$\lambda = \frac{\alpha e^{ict}\Lambda_0 + \beta}{\gamma e^{ict}\Lambda_0 + \delta},$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werte dieser Parameter beim Kugelkreisel bedeuten. Insbesondere ergiebt sich für die Bahnkurve der Kreiselspitze ($\Lambda_0 = \infty$) beim symmetrischen genau dieselbe Gleichung wie beim Kugelkreisel — wie dies nach § 5 des vierten Kapitels selbstverständlich ist. —

Wir gehen jetzt dazu über, in ähnlicher Weise die *Gleichungen der Polhodie- und Herpolhodiekurve des Kugelkreisels* abzuleiten, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Drehungsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Die Koordinaten dieses Punktes bezeichnen wir wie früher mit

$$p,\ q,\ r \quad \text{oder} \quad \pi,\ \varkappa,\ \varrho,$$

je nachdem wir sie auf das im Kreisel oder im Raume feste System beziehen. Dabei sind die dritten Koordinaten $r$ und $\varrho$ beim Kugelkreisel natürlich konstant, da sie aus den Impulskomponenten $N$ und $n$ durch Division mit dem Trägheitsmomente $A$ hervorgehen. Die beiden ersten Koordinaten fassen wir in die komplexen Verbindungen $p + iq$, $\pi + i\varkappa$ zusammen und entnehmen die Ausdrücke dieser Gröfsen sowie der Konstanten $r$ und $\varrho$ durch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Gleichungen (5) und (6) von pag. 43, 44:

$$(8)\quad \begin{cases} p + iq = 2i\left(+\beta\dfrac{d\delta}{dt} - \delta\dfrac{d\beta}{dt}\right), \\ -r = 2i\left(-\alpha\dfrac{d\delta}{dt} + \gamma\dfrac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

$$(8')\qquad \begin{cases} \pi + i\varkappa = 2i\left(+\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right), \\ -\varrho = 2i\left(+\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{cases}$$

Setzen wir hier die Werte der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ein, so haben wir die explicite Darstellung der Koordinaten von Polhodie- und Herpolhodiekurve vor uns. Die beiden ersten Gleichungen für sich betrachtet, liefern uns dabei die orthographische Projektion der Polhodiekurve auf die Äquatorebene des Kreisels bez. der Herpolhodiekurve auf die Horizontalebene. Die beiden letzten Gleichungen bestimmen gleichzeitig die Höhe, in welcher unsere Kurven über der Äquatorebene bez. über der Horizontalebene verlaufen.

*Wir wollen zeigen, daſs sich die vorstehenden Gleichungen in sehr bemerkenswerter Weise zusammenziehen.* Betrachten wir z. B. $p + iq$: Wir schreiben

$$(9)\qquad p + iq = 2i\beta\delta\Theta$$

und überzeugen uns zunächst, daſs die Gröſse

$$\Theta = \frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}$$

eine doppeltperiodische Funktion zweiten Grades ist. Wir bemerken nämlich allgemein, daſs die Funktion

$$\frac{d\log\vartheta(t-t_0)}{dt}$$

nach den Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktion überhaupt ungeändert bleibt bez. sich um $-\frac{\pi i}{\omega}$ additiv vermehrt, wenn wir zum Argument $2\omega$ bez. $2i\omega'$ hinzufügen. Mithin wird die Differenz zweier solcher Funktionen jedenfalls eine doppeltperiodische Funktion. Aus solchen Differenzen und konstanten Gliedern setzt sich aber unsere Gröſse $\Theta$ zusammen.

Der explicite Ausdruck von $\Theta$ läſst sich den Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zufolge nach einigen leichten Reduktionen folgendermaſsen schreiben:

$$\Theta = -\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega + ib - i\omega')}{\vartheta(\omega + ib - i\omega')} + \frac{\vartheta'(t + ia)}{\vartheta(t + ia)} - \frac{\vartheta'(t - \omega + ib)}{\vartheta(t - \omega + ib)}.$$

Die im Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen von $\Theta$ sind hiernach ersichtlich $t = -ia$ und $t = \omega - ib$. Ferner werden die Nullstellen sein

$$t = -i\omega' \quad \text{und} \quad t = \omega + i\omega' - ia - ib;$$

im ersteren Falle kompensieren sich nämlich das erste und dritte sowie das zweite und vierte Glied, im letzteren Falle das zweite und dritte sowie das erste und vierte Glied.

Hiernach können wir unserer Gröfse $\Theta$ auch die Gestalt geben:

$$(10) \qquad \Theta = C\,\frac{\vartheta(t+i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t+ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)};$$

der rechts stehende Ausdruck ist nämlich, da die Argumentensumme des Zählers gleich der des Nenners ist, eine doppeltperiodische Funktion von denselben Null- und Unendlichkeitsstellen wie $\Theta$. Die hinzugefügte Gröfse $C$ ist eine Konstante.

Gleichung (9) nimmt nun folgende einfache Gestalt an:

$$(11) \qquad p + iq = K e^{i(l'-l)t}\,\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'+ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Um die Konstante $K$ zu bestimmen, in welche die soeben benutzte noch unbekannte Gröfse $C$ eingeht, vergleichen wir die Werte von $p+iq$ aus (11) und (8) für einen geeignet gewählten Zeitpunkt $t$. Wir haben z. B. für $t = -ia$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = k e^{-la}\,\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(-ia+i\omega')}, \quad \beta = k' e^{l'a}\,\frac{\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

also wird nach (8)

$$p + iq = 2ikk' e^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(ia+i\omega')};$$

andrerseits ergiebt sich aus (11):

$$p + iq = K e^{(l'-l)a}\,\frac{\vartheta(+\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(ia+i\omega')};$$

mithin folgt

$$K = 2ikk'\,\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(ia+\omega-ib)}{\vartheta(-ia+i\omega')\,\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}.$$

Setzen wir endlich noch für $k$ und $k'$ die Werte aus den Gleichungen (18) von pag. 428 ein, so erhalten wir einfach:

$$(11') \qquad K = \frac{-2\,\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+ia+ib)}\cdot e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}}.$$

Durch die Gleichungen (11) und (11') ist die Polhodiekurve in orthographischer Projektion dargestellt. Wir heben die Einfachheit dieser Darstellung besonders hervor, indem wir bemerken:

*Die komplexe Variable, welche die senkrechte Projektion des Drehungsvektors auf die Äquatorebene des Kreisels bestimmt, ist wieder direkt eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades.*

Um auch die dritte Komponente $r$, welche, wie bemerkt, konstant $\left(=\frac{N}{A}\right)$ ist, durch unsere transcendenten Konstanten $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$

auszudrücken, können wir in Gleichung (8) einen speziellen Wert von $t$ einsetzen. Wir wählen z. B. $t = \omega + ib$, wobei $\gamma = 0$ und (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$ wird. Alsdann ergiebt sich

$$-r = -2i\alpha\delta\frac{d\log\delta}{dt} = -2i\frac{d\log\delta}{dt}$$
$$= 2i\left(il - \frac{\vartheta'(\omega + ia + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)} + \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}\right),$$

also, wenn wir den Wert von $l$ eintragen:

$$(12)\qquad -r = 2i\left(-\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} + \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} - \frac{\vartheta'(\omega + ia + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\right).$$

Die entsprechende *Darstellung der Herpolhodiekurve* können wir aus den vorstehenden Gleichungen der Polhodiekurve unmittelbar abnehmen. Wir erhielten nämlich pag. 44 die Koordinaten $-\pi$, $-\varkappa$, $-\varrho$ aus den Koordinaten $p$, $q$, $r$, indem wir $\alpha$ und $\delta$ vertauschten und $\beta$ und $\gamma$ im Vorzeichen umkehrten.

Diese Vertauschung und Vorzeichenveränderung können wir aber, wie eine genaue Prüfung der Gleichungen (8) und (18) des vorigen Paragraphen zeigt, einfach dadurch erreichen, dafs wir $-a$ statt $+a$ schreiben, wobei $-l$ in $l - \frac{\pi}{\omega}$ übergeht. *Die Gleichungen der Herpolhodiekurve können wir daher folgendermafsen schreiben:*

$$(13)\qquad \pi + i\varkappa = K'e^{i\left(l + l' - \frac{\pi}{\omega}\right)t}\frac{\vartheta(t - \omega - i\omega' - ia + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$(13')\qquad K' = \frac{2\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega - ia + ib)}e^{\frac{\pi(b-a)}{2\omega}},$$

$$(14)\qquad -\varrho = 2i\left(\frac{\vartheta'(i\omega' + ia)}{\vartheta(i\omega' + ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} + \frac{\vartheta'(\omega - ia + ib)}{\vartheta(\omega - ia + ib)}\right).$$

Zu denselben Gleichungen gelangen wir auch von dem pag. 238 entwickelten Prinzip aus, nach welchem wir nur, um von der Polhodie- zu der Herpolhodiekurve überzugehen, die Werte von $n$, $N$ bez. durch $-N$, $-n$ zu ersetzen und die Vorzeichen der Koordinaten umzukehren brauchen. Thun wir dieses, so wird die Ungleichung

$$N > n > 0,$$

welche der bisherigen Darstellung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ durch $\vartheta$-Quotienten zu Grunde lag, in dem Sinne abgeändert, dafs für die einzutragenden Werte $N = -n$, $n = -N$ die Beziehung gilt:

$$0 > N > n.$$

Wie sich in diesem Falle die logarithmischen Unendlichkeitsstellen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ auf die Punkte $\pm 1$ der Riemannschen Fläche verteilen,

wurde in Fig. 61 b dargestellt. Wir ersehen aus ihr, dafs die Nullstellen von $\beta$ und $\gamma$ durch die vorgenannte Vertauschung nicht geändert werden, dafs aber die von $\alpha$ und $\delta$, d. h. die Stellen $\pm ia$ der $t$-Ebene sich austauschen. Wir haben also wieder die Vorzeichenumkehr von $a$ und damit den Übergang von (11), (12) zu (13), (14).

Die soeben entwickelten Gleichungen können sofort auch zur Darstellung der Impulskurven dienen, d. h. derjenigen Kurven, welche der Endpunkt des Impulsvektors im Körper und im Raume beschreibt. Da nämlich die letzteren Kurven beim Kugelkreisel zu den Kurven der Polhodie und Herpolhodie in dem geometrischen Verhältnisse der Ähnlichkeit stehen, so brauchen wir die Gleichungen (11), (12), (13) und (14) rechterhand nur mit dem Werte des Trägheitsmomentes $A$ zu multiplizieren, um die Darstellung der Impulskoordinaten $L + iM$, $N$, $l + im$, $n$ zu erhalten. Wir sprechen daraufhin den zusammenfassenden Satz aus:

*Die zuletzt betrachteten Kurven, die Impulskurven sowie die Polhodie- und Herpolhodiekurve lassen sich beim Kugelkreisel sämtlich durch elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades berechnen.*

Dieses Resultat bleibt auch beim Übergange zum symmetrischen Kreisel bestehen, soweit es sich auf die Impulskurven und auf die Polhodiekurve bezieht.

Die *Polhodiekurve des symmetrischen Kreisels* können wir nämlich aus der des Kugelkreisels dadurch ableiten, dafs wir in der ersten der Gleichungen (8) die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des Kugelkreisels mit den in (7) angegebenen Faktoren multiplizieren. Dementsprechend haben wir für $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ bez.

$$e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{ic}{2}\beta\right), \quad e^{-\frac{ic}{2}t}\left(\frac{d\delta}{dt} - \frac{ic}{2}\delta\right)$$

einzutragen, unter $\beta$, $\delta$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ die Werte dieser Gröfsen beim Kugelkreisel verstanden. Da sich die hinzutretenden Terme $-\frac{ic}{2}\beta$ und $-\frac{ic}{2}\delta$ in der auf der rechten Seite von (8) stehenden Differenz aufheben, so brauchen wir die rechte Seite von (11) nur mit dem Faktor $e^{-ict}$ zu multiplizieren, um die Gröfse $p + iq$ des symmetrischen Kreisels zu erhalten. Diese wird also ebenfalls durch eine elliptische Funktion ersten Grades gegeben.

Von den Koordinaten der Polhodiekurve unterscheiden sich die Koordinaten derjenigen Impulskurve, welche den *Ort des Impuls-Endpunktes im Körper* darstellt, nur um die konstanten Faktoren der Hauptträgheitsmomente. Diese Kurve wird also im Wesentlichen durch dieselben Gleichungen wie die Polhodiekurve beschrieben.

Was endlich die *Bahn des Impuls-Endpunktes im Raume* betrifft, so unterscheidet sich diese beim symmetrischen Kreisel von derselben Kurve beim Kugelkreisel überhaupt nicht. In der That sahen wir Kap. IV, § 5, dafs diese Kurve für alle Kreisel der l. c. betrachteten Serie genau dieselbe ist. Die Gleichungen (13) und (14) geben also (nach Multiplikation mit $A$) direkt die in Rede stehende Impulskurve für einen symmetrischen Kreisel, dessen eines Hauptträgheitsmoment $A$ dem unseres Kugelkreisels gleich und dessen anderes Hauptträgheitsmoment $C$ beliebig ist.

Weniger einfach wird die Darstellung der *Herpolhodiekurve beim symmetrischen Kreisel.* Um auch hier aus den vorhergehenden Umrechnungen Nutzen zu ziehen, drücken wir in der allgemeingültigen Gleichung (8′) die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des symmetrischen Kreisels durch die des Kugelkreisels nach der Tabelle (7) aus und bekommen:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt}\right) + 2c\alpha\beta.$$

Den ersten Term der rechten Seite haben wir oben in (13) auf seine einfachste Form gebracht. Im zweiten Term setzen wir die bekannten Werte von $\alpha$ und $\beta$ ein, wobei wir die multiplizierende Konstante kurz mit $K$ bezeichnen. Es ergiebt sich dann:

$$\pi + i\varkappa = e^{i(l+l')t}\left(K' e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}\frac{\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-i\omega')} + K\frac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\right),$$

oder

$$(15)\quad \begin{cases} \pi + i\varkappa = \\ e^{i(l+l')t}\dfrac{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta^2(t-i\omega')}\left(K + K' e^{-\frac{i\pi t}{\omega}}\dfrac{\vartheta(t-i\omega')\,\vartheta(t-\omega-i\omega'-ia+ib)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}\right). \end{cases}$$

Wir behaupten, dafs dieser Ausdruck abermals als $\vartheta$-Quotient geschrieben werden kann, wobei aber zwei $\vartheta$-Funktionen im Zähler und zwei im Nenner auftreten. Zunächst folgt aus den Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktionen, dafs die Klammer völlig ungeändert bleibt bei Vermehrung von $t$ um eine der Perioden $2\omega$, $2i\omega'$. Die Klammer ist also eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades mit den Unendlichkeitsstellen $t = ia$ und $t = \omega - ib$. Eine solche Funktion besitzt, wie pag. 421 erwähnt, in dem einzelnen Periodenparallelogramm notwendig zwei Nullstellen, welche wir mit $c_1$ und $c_2$ bezeichnen, und kann durch den folgenden $\vartheta$-Quotienten dargestellt werden

$$K_1\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta(t-ia)\,\vartheta(t-\omega+ib)}.$$

Tragen wir aber diesen Wert der Klammer in (15) ein, so folgt in der That:

$$(16)\qquad \pi + i\varkappa = K_1 e^{i(l+l')t}\frac{\vartheta(t-c_1)\,\vartheta(t-c_2)}{\vartheta^2(t-i\omega')}.$$

Auf die genauere Bestimmung von $c_1$, $c_2$ und $K_1$ wollen wir nicht eingehen. Wir konstatieren nur:

*Die Horizontalprojektion der Herpolhodiekurve ist beim symmetrischen Kreisel durch eine elliptische Funktion zweiter Art zweiten Grades gegeben.**)

In ähnlicher Weise können wir, von der zweiten der Gleichungen (8') ausgehend, die *Vertikalprojektion* $\varrho$ *der Herpolhodie* bestimmen. Wir finden für diese *eine elliptische Funktion erster Art zweiten Grades*, nämlich eine lineare Funktion der doppelperiodischen Gröfse $\cos\vartheta = u(t)$, wie bereits aus Gleichung (2) von pag. 235 hervorgeht. —

Zum Schlufs eine Bemerkung allgemeineren Inhalts. Wir sind im Vorstehenden zu wiederholten Malen auf elliptische Kurven zweiter Art geführt worden. Solche Kurven treten aufser bei dem schweren symmetrischen Kreisel auch bei dem kräftefreien unsymmetrischen Kreisel auf (vgl. § 8 dieses Kapitels), sowie in zahlreichen anderen geometrischen und mechanischen Problemen (als sphärische Kettenlinie, als sog. elastische Kurve etc. etc.). Sie bilden eine grofse Klasse unter sich verwandter transcendenter Kurven, welche in geometrischer Hinsicht und namentlich auch mit Rücksicht auf die Anwendungen den algebraischen Kurven an Interesse nicht nachstehen. Es wäre daher wohl der Mühe wert, allgemein eine *geometrische Theorie dieser transcendenten Kurven* aufzustellen. Man hätte dann etwa die möglichen Singularitäten solcher Kurven zu untersuchen, die gestaltlichen Verhältnisse zu diskutieren etc. Unsere elliptischen Kurven ersten Grades würden in dieser Theorie natürlich eine besonders wichtige Rolle spielen. Ohne Frage öffnet sich hier der geometrischen Forschung ein weites Gebiet.

## § 6. Numerische Berechnung der Bewegung durch $\vartheta$-Reihen.

Eines der Endziele, die wir bei jedem Problem der Mechanik im Auge haben müssen, wird jedenfalls dieses sein: Die Bewegung soweit zu beherrschen, dafs wir die Lage des beweglichen Systems in jedem Augenblicke numerisch bestimmen können. Dafs dieses Ziel durch die

---

*) Sollte es nicht möglich sein, auch diese Kurve, welche ja nach pag. 235 auf einer gewissen Kugel verläuft, durch elliptische Funktionen *ersten* Grades darzustellen, indem man sie stereographisch auf die Äquatorebene der sie tragenden Kugel projiciert und nach der Gleichung für die komplexe Variable des stereographischen Bildpunktes fragt?

vorangehende Theorie auf bequemem Wege erreicht wird, soll in diesem Paragraphen dargethan werden. Zunächst möge das einzuschlagende Verfahren allgemein skizziert werden.

Ist uns irgend ein realer Kreisel gegeben, so besteht der erste Schritt darin, daſs wir, sei es durch das Experiment, sei es durch Berechnung, seine Massenverteilung, d. h. die auf den Unterstützungspunkt bezogenen Werte von $A$, $C$ und $P$, festzustellen suchen.

Sodann müssen wir Anfangslage und Anfangsbewegung des Kreisels kennen. Die Anfangslage wird hinlänglich durch den Neigungswinkel $\vartheta_0$ der Figurenaxe gegen die Vertikale beschrieben; die Anfangswerte der Winkel $\varphi$ und $\psi$, welche für den Charakter der Bewegung belanglos sind, werden wir wie pag. 425 direkt gleich 0 nehmen.

Die Anfangsbewegung charakterisieren wir am besten durch die Lage und Gröſse des Impulsvektors. Gestatten wir uns die pag. 199 sub 4 verabredete Vereinfachung, daſs der Impulsvektor zu Anfang in derselben Vertikalebene wie die Figurenaxe enthalten sei, so wird unser Vektor durch seine beiden Komponenten $n$ und $N$ festgelegt. Wir wissen dann gleichzeitig, daſs der Parallelkreis $u = \cos\vartheta_0 = e$ einer der Begrenzungskreise für die Bahnkurve sein und daſs die Kreiselspitze zu Beginn in horizontaler Richtung fortschreiten muſs.

Mittels der Konstanten $n$, $N$ und $e$ bilden wir uns darauf die quadratische Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, deren Wurzeln den zweiten Begrenzungskreis $e'$ sowie die Gröſse $e''$ definieren.

Jetzt sind wir in der Lage, die Legendresche Theorie der elliptischen Integrale und die Legendreschen Tafeln für unsere Zwecke zu verwerten. Wir berechnen uns vor allem den Legendreschen Modul $k$, den komplementären Modul $k'$ und die Hülfsgröſsen $M$, $\varphi_a$, $\varphi_b$ von pag. 264. Darauf schlagen wir die Werte von $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tafel I von Legendre und die Werte von $F(k', \varphi_a)$, $F(k', \varphi_b)$ in der Tafel IX auf. Durch Multiplikation mit $M$ ergeben sich hieraus die Werte von $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$. Durch diese letzteren, transcendenten Konstanten ist die Bewegung der Kreiselspitze und die Bewegung des Impuls-Endpunktes im Raume ebenso vollständig bestimmt, wie durch die ursprünglich vorliegenden Konstanten $A$, $C$, $P$, $n$, $N$, $e$. In der That brauchen wir uns bei der Berechnung der genannten Bahn- und Impulskurve um die Massenverteilung des Kreisels, um seine Anfangsbewegung und Anfangslage in keiner Weise mehr zu kümmern. Unsere ganze Aufgabe besteht darin, gewisse $\vartheta$-Reihen auszurechnen, in deren Koeffizienten die Gröſsen $\omega$ und $\omega'$, in deren Argument überdies die Gröſsen $a$ und $b$ eingehen. Das Schema, nach dem wir zu rechnen haben,

ist so für alle Kreisel und für alle Kreiselbewegungen dasselbe. Die ganze Mannigfaltigkeit der Bewegungsformen ruht lediglich in der Verschiedenheit der in unser Schema einzusetzenden Werte unserer vier transcendenten Konstanten.

(Auf die Werte der ursprünglichen Konstanten brauchen wir nur dann zurückzugehen, wenn wir weiterhin etwa direkt die Werte der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beim symmetrischen Kreisel oder die Bahnkurve eines von der Kreiselspitze verschiedenen Punktes oder die Polhodie- und Herpolhodiekurve zu berechnen wünschen, in deren Gleichungen die Gröfse $N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)$ vorkommt.)

Immerhin kann uns die Rücksicht auf gröfstmögliche Bequemlichkeit der Rechnung veranlassen, unser Verfahren unter Umständen etwas zu modifizieren. Wir bemerken, dafs die $\vartheta$-Reihe von pag. 418

$$(1) \qquad \vartheta(t) = 2q^{1/4} \sin s - 2q^{9/4} \sin 3s + 2q^{25/4} \sin 5s - \cdots$$

$$(2) \qquad q = e^{-\frac{\omega' \pi}{\omega}}, \quad s = \frac{t\pi}{2\omega},$$

um so schneller konvergiert, je kleiner $q$ ist, je gröfser also das Verhältnis $\frac{\omega'}{\omega}$ ausfällt. Insbesondere wird sich die Rechnung in einem Periodenrechteck von gröfserer Höhe wie Breite ($\omega' > \omega$) bequemer gestalten, als in einem Periodenrechteck von gröfserer Breite wie Höhe ($\omega > \omega'$). Es ist daher wichtig, eine Umformung der $\vartheta$-Funktion zu kennen, welche den letzteren Fall allemal auf den ersteren zu reduzieren gestattet.

Man wird auf die gedachte Umformung geführt, wenn man sich überzeugt, dafs die $\vartheta$-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bei Vermehrung des Argumentes $t$ um Periodenvielfache genau dieselben Faktoren annimmt wie das Produkt der $\vartheta$-Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ und der Exponentialgröfse $e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}$. Da nun die $\vartheta$-Funktion nach pag. 419 durch ihr Verhalten bei Vermehrung des Arguments um Periodenvielfache bis auf einen von $t$ unabhängigen Faktor festgelegt ist, so schliefst man, dafs die $\vartheta$-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ bis auf eine multiplizierende Konstante dem genannten Produkte gleich sein mufs. Auf die Bestimmung dieser Konstanten, welche einige Weiterungen verursacht, gehen wir hier nicht ein. Die definitive Formel lautet:

$$(3) \qquad \vartheta(t, \omega, \omega') = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\, e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}}\, \vartheta(it, \omega', \omega).$$

Dabei ist die rechterhand stehende $\vartheta$-Funktion ersichtlich durch die folgende Reihe zu berechnen:

$$(4)\qquad \vartheta(it, \omega', \omega) = 2q'^{1/4}\sin s' - 2q'^{9/4}\sin 3s' + 2q'^{25/4}\sin 5s' - \cdots$$

$$(5)\qquad q' = e^{-\frac{\omega\pi}{\omega'}}, \quad s' = \frac{it\pi}{2\omega'}.$$

Die Nützlichkeit der Formel (3) ist evident. Wenn wir eine $\vartheta$-Funktion $\vartheta(t, \omega, \omega')$ auszurechnen haben, in welcher $\omega > \omega'$ und daher $q$ verhältnismäfsig grofs ist, so werden wir zunächst die Reihe $\vartheta(it, \omega', \omega)$ berechnen, welche wegen $q' < q$ besser konvergieren wird. Gleichung (3) gestattet uns dann, von dieser zu der ursprünglich gesuchten $\vartheta$-Funktion mit leichter Mühe zurückzugehen.

Dafs die in Rede stehende Gleichung neben diesem praktischen auch ein allgemeines theoretisches Interesse (in der Lehre von der Transformation der $\vartheta$-Funktionen) besitzt, möge hier nur kurz angedeutet werden.

Allerdings kann es vorkommen, dafs der geschilderte Vorteil, welcher in der Verkleinerung des $q$ beruht, teilweise durch eine eventuelle Vergröfserung der trigonometrischen Funktionen in der $\vartheta$-Reihe wettgemacht wird. In der That wird beim Übergang zu der Funktion $\vartheta(it, \omega', \omega)$ im Argumente der Sinus-Funktionen der Faktor $i$ eingeführt, welcher zumal bei reellem $t$ die Konvergenz erheblich verschlechtern kann. Es wird im einzelnen Falle darauf ankommen, die durch die Umformung (3) herbeigeführten Vorteile und Nachteile gegen einander abzuwägen.

Teils um die Rapidität zu verdeutlichen, mit der die $\vartheta$-Reihen konvergieren, teils um die Durchrechnung eines Beispiels vorzubereiten, wollen wir uns jetzt ein Urteil darüber bilden, wie viel Glieder der $\vartheta$-Reihe wir für unsere Zwecke zu berücksichtigen haben. Es hängt dies natürlich von der Genauigkeit ab, welche wir erreichen wollen.

In unserem Falle würde es keinen Zweck haben, die Genauigkeit soweit zu treiben, wie dies beispielsweise bei den mechanischen Problemen der Astronomie üblich ist. In der That kann es sich bei der Durchführung eines numerischen Beispiels nur um eines der beiden folgenden Ziele handeln: Die geometrische Auffassung des mechanischen Vorganges durch Zeichnung quantitativ richtiger Figuren zu beleben; und andererseits: Den theoretisch gefundenen Bewegungsvorgang mit dem Experimente zu vergleichen. In ersterer Hinsicht genügt offenbar eine mäfsige Genauigkeit, weil doch auch die Zeichnung nur mit verhältnismäfsig geringer Genauigkeit ausgeführt werden kann. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dafs die Verhältnisse des Experimentes durch Nebenumstände, namentlich durch Reibungsvorgänge, soweit entstellt werden, dafs eine erhebliche Übereinstimmung mit der abstrakten Theorie

überhaupt nicht zu erwarten ist. Es wird daher in unserem Falle etwa die Genauigkeit $\frac{1}{1000}$ genügen; *wir werden dementsprechend als erlaubte Fehlergrenze* $\frac{1}{1000}$ *des ganzen Wertes zulassen*, d. h. wir werden solche Gröfsen vernachlässigen, deren absoluter Betrag, dividiert durch den absoluten Betrag des ganzen Wertes, kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Nach dieser Verabredung zeigen wir ein für allemal, dafs wir bei geeigneter Anordnung der Rechnung *immer nur die beiden ersten Glieder der $\vartheta$-Reihe zu berücksichtigen brauchen.* Wir setzen dabei voraus: 1) dafs $\omega' \geqq \omega$ und 2) dafs das Argument der $\vartheta$-Reihe dem den Nullpunkt umgebenden Periodenrechtecke angehört. Wäre nämlich $\omega' < \omega$, so könnten wir nach Gleichung (3) zu einer Reihe übergehen, in welcher die Werte der Perioden vertauscht sind; läge ferner der das Argument repräsentierende Punkt der $t$-Ebene in einem der anderen Periodenrechtecke, so könnten wir die Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktion heranziehen und, indem wir ein geeignetes Periodenvielfaches absondern, den Punkt auf das Ausgangsrechteck reduzieren.

Zum Beweise der vorstehenden Behauptung ersetzen wir in Gleichung (1) jedes Glied durch seinen absoluten Betrag. Für den Rest $R$ der Reihe vom dritten Gliede inklusive ab bekommen wir so

$$(6) \qquad |R| < 2q^{25/4}\,|\sin 5s| + 2q^{49/4}\,|\sin 7s| + \cdots$$

Wir zeigen zunächst allgemein, dafs stets

$$(7) \qquad |\sin(a+ib)| \leqq e^{|b|}.$$

In der That haben wir

$$|\sin(a+ib)|^2 = \frac{e^{-2b}+e^{+2b}-2\cos 2a}{4} \leqq \left(\frac{e^{-b}+e^{+b}}{2}\right)^2,$$

also

$$|\sin(a+ib)| \leqq \frac{e^{-b}+e^{+b}}{2} \leqq e^{|b|}.$$

Nun können wir uns nach Obigem auf solche Werte von $t$ beschränken, deren imaginärer Teil absolut genommen nicht gröfser als $\omega'$ ist. Bezeichnen wir den imaginären Teil von $s$ mit $b$, so wird nach Gleichung (2)

$$|b| \leqq \frac{\omega'\pi}{2\omega}$$

und mithin wegen (7)

$$|\sin 5s| \leqq e^{\frac{5}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi}, \quad |\sin 7s| \leqq e^{\frac{7}{2}\frac{\omega'}{\omega}\pi} \cdots$$

Die rechten Seiten dieser Ungleichungen können nach (2) bez. mit

$q^{-\frac{5}{2}}, q^{-\frac{7}{2}}, \ldots$ bezeichnet werden. Die Ungleichung (6) geht daher über in

$$|R| < 2(q^{15/4} + q^{35/4} + \cdots).$$

Man überzeugt sich leicht, dafs die Glieder der rechten Seite stärker abnehmen, wie die Glieder der folgenden geometrischen Reihe:

$$2(q^{15/4} + q^{30/4} + q^{45/4} + \cdots) = \frac{2q^{15/4}}{1 - q^{15/4}}.$$

Infolgedessen wird

$$(8) \qquad |R| < \frac{2q^{15/4}}{1 - q^{15/4}}.$$

Den absoluten Betrag dieses Restwertes $R$, bez. die soeben festgestellte obere Grenze desselben, haben wir mit dem absoluten Betrag des ganzen Wertes $\vartheta(t)$, bez. mit irgend einer unteren Grenze desselben, zu dividieren, um eine obere Grenze für den relativen Fehler zu erhalten. Dabei ist zu berücksichtigen, dafs die $\vartheta$-Funktion verschwindet für ein verschwindendes $t$, so dafs wir bei sehr kleinem Werte von $|t|$ für unseren relativen Fehler scheinbar ein sehr ungünstiges Resultat erhalten würden. Deshalb wollen wir noch die ausdrückliche Beschränkung hinzufügen, dafs der Wert von $|t|$ nicht zu klein, sagen wir etwa nicht kleiner als $\frac{2\omega}{100}$ sein darf, wenn wir unser Verfahren anwenden wollen. Unter dieser Voraussetzung ist $|s| > \frac{\pi}{100}$; gleichzeitig gilt für alle Punkte im Innern unseres Periodenrechtecks:

$$(9) \qquad |\sin s| > \sin\frac{\pi}{100} > 0{,}03.$$

Wir haben demnach jetzt unter der Voraussetzung $|t| \geqq \frac{2\omega}{100}$ eine untere Grenze für den Wert von $|\vartheta(t)|$ festzustellen.

Zunächst schreiben wir mit Benutzung der oben eingeführten Abkürzung $R$:

$$|\vartheta(t)| = 2q^{1/4}|\sin s| \cdot \left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s} + \frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|.$$

Sodann benutzen wir den Satz, dafs der absolute Betrag einer Summe gröfser oder gleich der Differenz der absoluten Beträge der Summanden ist. Hiernach wird

$$(10) \qquad |\vartheta(t)| \geqq 2q^{1/4}|\sin s| \left\{\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| - \left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right|\right\}.$$

Die Klammer werden wir nun weiter verkleinern, indem wir den ersten Term kleiner und den zweiten Term gröfser machen. Setzen wir in

letzterem für $|R|$ den in (8) gefundenen zu großen, für $|\sin s|$ den in (9) angegebenen zu kleinen Wert, so ergiebt sich

$$\left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right| < \frac{q^{14/4}}{1-q^{15/4}}\,\frac{1}{0{,}03}.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß wir uns auf den Fall $\omega' \geqq \omega$, d. h. $q \leqq e^{-\pi}$ beschränken wollten, so erhalten wir selbst in dem ungünstigsten Falle $\omega' = \omega$, d. h. $q = e^{-\pi}$, wenn wir ausrechnen:

$$\left|\frac{R}{2q^{1/4}\sin s}\right| < 0{,}0006. \tag{11}$$

Andererseits wollen wir in dem ersten Terme der vorgenannten Klammer den Bruch $\sin 3s : \sin s$ ausdividieren. Ersetzen wir abermals den absoluten Betrag der so entstehenden Summe durch die Differenz der absoluten Beträge, so finden wir:

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| = |1 - 3q^2 + 4q^2\sin^2 s| > 1 - 3q^2 - 4q^2|\sin^2 s|.$$

Es ist aber nach (7) für alle Punkte unseres Periodenrechtecks:

$$|\sin^2 s| < e^{\frac{2\omega'\pi}{2\omega}}, \quad \text{d. h.} \quad |\sin^2 s| < q^{-1}.$$

Mithin haben wir

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| > 1 - 4q - 3q^2$$

oder, wenn wir abermals zu dem ungünstigsten Falle $q = e^{-\pi}$ übergehen:

$$\left|1 - q^2\frac{\sin 3s}{\sin s}\right| > 1 - 0{,}1724 - 0{,}0054, \quad \text{d. h.} > 0{,}8222. \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) ergiebt sich also für $|\vartheta(t)|$ die folgende untere Grenze

$$|\vartheta(t)| > 2q^{1/4}|\sin s| \cdot 0{,}8214,$$

oder mit Rücksicht auf (9)

$$|\vartheta(t)| > 2q^{1/4} \cdot 0{,}0246. \tag{13}$$

Mit Hülfe der Ungleichungen (8) und (13) läßt sich nun die fragliche obere Grenze für den relativen Fehler $|R| : |\vartheta(t)|$ sofort berechnen. Wir haben nämlich

$$\frac{|R|}{|\vartheta(t)|} < \frac{q^{14/4}}{1-q^{15/4}}\,\frac{1}{0{,}0246};$$

wertet man aber diesen Ausdruck für den ungünstigsten Fall $q = e^{-\pi}$ aus, so findet man

$$\frac{|R|}{|\vartheta(t)|} < \frac{1{,}68}{2{,}46}\,10^{-3} < \frac{1}{1000}.$$

Wir werden daher sagen können:

*Bei der verlangten Genauigkeit* $\frac{1}{1000}$ *genügt es allemal, die beiden ersten Glieder der* $\vartheta$*-Reihe beizubehalten, es sei denn, dafs das Argument der* $\vartheta$*-Reihe von Null sehr wenig verschieden ist,* $\left(|t| < \frac{2\omega}{100}\right)$.

Übrigens ist die zuletzt genannte Ausnahme nur durch den Gang unserer Rechnung, nicht durch die Natur der Sache bedingt. Durch besondere Überlegungen, welche wir hier indessen nicht ausführen wollen, liefse sie sich beseitigen, so dafs unser Satz allgemeine Gültigkeit erhält.

Dabei ist noch zu bemerken, dafs wir bei unserer Abschätzung recht grobe Vernachlässigungen vorgenommen haben, dafs sich also in Wirklichkeit die Sache noch erheblich günstiger stellen wird. Dieser Umstand möge es rechtfertigen, wenn wir im Folgenden auch die Reihe für den Differentialquotienten $\vartheta'(t)$, welche nur wenig schlechter konvergiert, wie die $\vartheta$-Reihe selbst, ohne Weiteres mit dem zweiten Gliede abbrechen werden. Übrigens wäre eine eigene Fehlerabschätzung auch bei dieser Reihe nicht schwer und fast genau so durchzuführen wie die obige. Ferner werden wir uns aus eben jenem Grunde für berechtigt halten, wenn mehrere $\vartheta$-Reihen zu Quotienten oder Produkten zusammentreten, jede einzelne Reihe mit dem zweiten Gliede abzubrechen, obwohl bei einer Kombination von $n$ $\vartheta$-Reihen als obere Grenze des Fehlers zunächst das $n$-fache der früher festgestellten Fehlergrenze angenommen werden müfste. —

Wir gehen jetzt zur wirklichen Durchführung eines numerischen Beispiels über.

Dabei legen wir etwa den pag. 299 betrachteten Kreisel zu Grunde, welcher aus einem Schwungrade von quadratischem Querschnitt bestand. Die Seitenlänge des Querschnittquadrates betrug 2 cm, der Abstand seines Mittelpunktes von der Figurenaxe 5 cm, der Unterstützungspunkt lag $\frac{5}{2}$ cm unter dem Schwerpunkte. Für die Trägheitsmomente und für das Drehmoment der Schwerkraft fanden wir l. c., unter $\varrho$ die Dichtigkeit des Materiales verstanden, die folgenden, im absoluten Mafssystem gemessenen Werte:

$$C = 1000\,\varrho\pi, \quad A = 750\,\varrho\pi, \quad P = 100\,\varrho\pi g.$$

Über die Anfangslage des Kreisels setzen wir etwa fest, dafs zu Beginn der Bewegung der Winkel $\vartheta_0$ zwischen Figurenaxe und Vertikale gleich $60^0$ sei. Wir haben dann

$$e = \cos\vartheta_0 = \frac{1}{2}.$$

Sodann legen wir den anfänglichen Bewegungszustand durch die Impulskomponenten $N$ und $n$ fest. Wir wollen $N$ so wählen, dafs wir es mit einem starken Kreisel zu thun haben. Hierzu ist nach pag. 249 in dem vorliegenden Falle $P > 0$ erforderlich

$$N^2 > 2AP(1+e)$$

d. h. bei unserem Kreisel, da ungefähr $g = 100\pi^2$ ist,

$$N^2 > 3 \cdot 750 \cdot (100)^2 \varrho^2 \pi^4.$$

Dieser Ungleichung genügen wir, wenn wir beispielsweise annehmen

$$N = 4800\, \varrho \pi^2.$$

Der zugehörige Wert der Rotationskomponente $r$ wird dann

$$r = \frac{N}{C} = 4{,}8\, \pi,$$

d. h. (vgl. pag. 11) 2, 4 Umdrehungen in der Sekunde. Ferner wollen wir über den Wert der Impulskomponente $n$ so verfügen, dafs $n$ etwas kleiner wie $N$ und positiv wird, in welchem Falle wir die auf der Ungleichung $0 < n < N$ beruhenden Angaben über die Nullstellen der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (vgl. pag. 402) und ihre hieran anschliefsende Darstellung durch $\vartheta$-Funktionen genau in der früheren Form in Anwendung bringen können. Wir wählen etwa

$$n = 4200\, \varrho \pi^2.$$

Demnächst berechnen wir die Werte von $e'$ und $e''$ aus der Gleichung $U_1 = 0$ von pag. 240, welche in unserem Falle lautet:

$$-\left(u + \frac{1}{2}\right)(4200^2 + 4800^2)\varrho^2\pi^4 + 2\left(1 + \frac{u}{2}\right) 4200 \cdot 4800\, \varrho^2 \pi^4$$
$$-\frac{3}{2}(1-u^2)\, 750 \cdot 100\, \varrho^2 \pi^2 g = 0.$$

Benutzen wir wieder für $g$ den Wert $100\pi^2$, so folgt

$$125 u^2 - 228 u + 97 = 0$$

oder

$$u^2 - 1{,}824 u + 0{,}776 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 0,6759 und 1,1481. Mithin haben wir in der pag. 261 festgesetzten Reihenfolge:

$$(14) \qquad e = 0{,}5000, \quad e' = 0{,}6759, \quad e'' = 1{,}1481.$$

Jetzt berechnen wir den Legendreschen Modul

$$k = \sqrt{\frac{e'-e}{e''-e}} = 0{,}5210$$

und gehen von diesem zu dem Winkel

$$\Theta = \text{arc} \sin k = 31{,}40^0$$

über. Der zu dem komplementären Modul $k'$ in entsprechender Weise hinzugehörende Winkel $\Theta'$ ist daher

$$\Theta' = 90^0 - \Theta = 58{,}60^0.$$

Die Hülfsgröfsen $M$, $\varphi_a$, $\varphi_b$ von pag. 264 werden gleichzeitig:

$$\log M = 0{,}1851 - 1, \quad \varphi_a = 71{,}10^0, \quad \varphi_b = 70{,}60^0.$$

Darauf sehen wir in der Legendreschen Tafel I die Werte von $\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ nach. Wir finden auf pag. 228 und pag. 233 dieser Tafel

$$\log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2298, \quad \log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3263.$$

Mithin haben wir

$$\begin{array}{llll} & \log F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2298 & & \log F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3263 \\ & \log M \quad = 0{,}1851 - 1 & & \log M \quad = 0{,}1851 - 1 \\ \hline & \log \omega \quad = 0{,}4149 - 1 & & \log \omega' \quad = 0{,}5114 - 1 \\ (15) & \omega \quad = 0{,}2600 & & \omega' \quad = 0{,}3246. \end{array}$$

In unserem Beispiel liegt also der für die Berechnung der $\vartheta$-Funktionen günstige Fall vor, dafs die Höhe des Periodenrechtecks gröfser ist als die Breite. Wir werden also keinen Grund haben, die in Gleichung (3) angegebene Umformung der $\vartheta$-Reihen vorzunehmen.

Aus $\log \omega$ und $\log \omega'$ bilden wir nach Gleichung (2) die Gröfse $q$. Es ergiebt sich

$$\log q = 0{,}2959 - 2, \quad q = 0{,}0198.$$

Ferner haben wir die Gröfsen $a$ und $b$ aus der Legendreschen Tafel IX zu bestimmen, wobei eine kleine Interpolation nötig wird. Es ergiebt sich nach pag. 339 dieser Tafel:

$$F(k', \varphi_a) = 1{,}5129, \quad F(k', \varphi_b) = 1{,}4988.$$

Mithin wird

$$\begin{array}{llll} & \log F(k', \varphi_a) = 0{,}1798 & & \log F(k', \varphi_b) = 0{,}1757 \\ & \log M \quad = 0{,}1851 - 1 & & \log M \quad = 0{,}1851 - 1 \\ \hline & \log a \quad = 0{,}3649 - 1 & & \log b \quad = 0{,}3608 - 1 \\ (16) & a \quad = 0{,}2317 & & b \quad = 0{,}2295 \end{array}$$

Wir stellen sogleich einige bei der Berechnung unserer $\vartheta$-Reihen häufig vorkommende Gröfsen in einer kleinen Tabelle zusammen:

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = 4{,}0563, \quad e^{-\frac{a\pi}{2\omega}} = 0{,}2465, \quad e^{\frac{3a\pi}{2\omega}} = 66{,}74, \quad e^{-\frac{3a\pi}{2\omega}} = 0{,}02,$$

$$-i\sin\frac{ia\pi}{2\omega} = 1{,}9049, \quad \cos\frac{ia\pi}{2\omega} = 2{,}1514,$$

$$-iq^2\sin\frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130, \quad q^2\cos\frac{3ia\pi}{2\omega} = 0{,}0130;$$

$$e^{\frac{b\pi}{2\omega}} = 4{,}0031, \quad e^{-\frac{b\pi}{2\omega}} = 0{,}2498, \quad e^{\frac{3b\pi}{2\omega}} = 64{,}15, \quad e^{-\frac{3b\pi}{2\omega}} = 0{,}02,$$

$$-i\sin\frac{ib\pi}{2\omega} = 1{,}8766, \quad \cos\frac{ib\pi}{2\omega} = 2{,}1265,$$

$$-iq^2\sin\frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125, \quad q^2\cos\frac{3ib\pi}{2\omega} = 0{,}0125;$$

$$e^{\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 1{,}7531, \quad e^{-\frac{(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}5704, \quad e^{\frac{3(\omega'-a)\pi}{2\omega}} = 5{,}39, \quad e^{-\frac{3(\omega-a)\pi}{2\omega}} = 0{,}19,$$

$$-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}5913, \quad \cos\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 1{,}1617,$$

$$-iq^2\sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011, \quad q^2\cos\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega} = 0{,}0011;$$

$$e^{\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 1{,}7766, \quad e^{-\frac{(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}5629, \quad e^{\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 5{,}60, \quad e^{-\frac{3(\omega'-b)\pi}{2\omega}} = 0{,}18,$$

$$-i\sin\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}6068, \quad \cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 1{,}1697,$$

$$-iq^2\sin\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011, \quad q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega} = 0{,}0011.$$

Nunmehr können wir zur Berechnung der Bahnkurve übergehen, welche die Kreiselspitze auf der Einheitskugel beschreibt. Da $e$ und $e'$ beide positiv sind, die Bahnkurve also ganz auf der nördlichen Halbkugel verläuft, so werden wir die Kurve so zeichnen, wie sie bei stereographischer Projektion vom *Südpole* erscheint. Dementsprechend wählen wir als analytische Darstellung der Bahnkurve die Gleichung (4′) von pag. 433

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda = Ke^{iLt}\dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}; \\ K = \dfrac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega-ib+ia)}, \quad L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Alsdann bedeutet, wie wir wissen, $\lambda$ direkt diejenige komplexe Variable, welche im gewöhnlichen Gaufsischen Sinne dem Bildpunkte der Kreiselspitze in der Äquatorebene der Einheitskugel bei stereographischer Projektion vom Südpole entspricht.

Hier sind zunächst die Konstanten $K$ und $L$ zu finden.

Wir haben, wenn wir die $\vartheta$-Reihen mit dem zweiten Gliede abbrechen und die in der vorigen Tabelle angegebenen Werte benutzen:

$$K = \frac{-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2 \sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{\cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}}\, e^{\frac{\pi}{2\omega}(a-b)}$$

$$= \frac{0{,}5913 - 0{,}0011}{1{,}1697 + 0{,}0011}\,\frac{4{,}0563}{4{,}0031} = 0{,}511.$$

Sodann berechnen wir zur Bestimmung von $L$ die Gröfsen $l$ und $l'$ nach den Gleichungen (18) von pag. 428:

$$l = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}, \qquad l' = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)};$$

hier wollen wir $l'$ noch ein wenig umformen, indem wir schreiben:

$$l = i\left(\frac{\vartheta'(-i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(-i\omega' - \omega + ib)} - \frac{i\pi}{\omega}\right) = -i\,\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} + \frac{\pi}{\omega};$$

also wird

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = -i\,\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)}.$$

Da wir auch die Reihe für $\vartheta'$ mit dem zweiten Gliede abbrechen wollten, so ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Tabelle:

$$l = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\cos\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} - 3q^2\cos\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}}{-i\sin\frac{i(\omega'-a)\pi}{2\omega} + iq^2\sin\frac{3i(\omega'-a)\pi}{2\omega}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{1{,}1617 - 0{,}0083}{0{,}5913 - 0{,}0011} = \frac{\pi}{2\omega}\,1{,}963,$$

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{-i\sin\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} - 3iq^2\sin\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}}{\cos\frac{i(\omega'-b)\pi}{2\omega} + q^2\cos\frac{3i(\omega'-b)\pi}{2\omega}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2\omega}\,\frac{0{,}6068 + 0{,}0033}{1{,}1697 + 0{,}0011} = -\frac{\pi}{2\omega}\,0{,}521.$$

Hieraus folgt

$$L = \frac{\pi}{2\omega}(1{,}963 - 0{,}521) = \frac{\pi}{2\omega}\,1{,}442.$$

Diese Werte der Konstanten setzen wir in Gleichung (11) ein, brechen abermals die $\vartheta$-Reihen mit dem zweiten Gliede ab und lösen die trigonometrischen Funktionen in einen reellen und imaginären Teil auf. Setzen wir noch zur Abkürzung $\frac{t\pi}{2\omega} = s$ und ziehen unsere Tabelle von pag. 450 zu Rate, so ergiebt sich:

$$(18)\quad \lambda = 0{,}511\,e^{1{,}442\,is}\,\frac{(2{,}1265\cos s + 0{,}0125\cos 3s) - i(1{,}8766\sin s + 0{,}0125\sin 3s)}{(2{,}1514\sin s - 0{,}0130\sin 3s) + i(1{,}9049\cos s - 0{,}0130\cos 3s)}.$$

Wir wollen auf dem einzelnen Halbbogen zwischen den Parallelkreisen $e$ und $e'$ zehn Punkte berechnen, welche bez. den äquidistanten

Werten $t = 0, \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{9}, \ldots \frac{9\omega}{9}$ zugehören mögen. Die entsprechenden Werte von $s$ sind $s = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \ldots \frac{\pi}{2}$ oder $s = 0^0, 10^0, 20^0, \ldots 90^0$. Die zugehörigen Werte von $\lambda$ mögen mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_9$ bezeichnet werden. Man berechnet praktischer Weise zuerst den absoluten Betrag dieser Gröfsen; das Verhältnis des reellen und imaginären Teiles ergiebt sich dann auf trigonometrischem Wege. Das Resultat der verhältnismäfsig bequemen Rechnung zeigt die folgende Tabelle:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \quad\quad\;\; - 0{,}577\, i \\
\lambda_1 &= 0{,}164 - 0{,}549\, i \\
\lambda_2 &= 0{,}304 - 0{,}470\, i \\
\lambda_3 &= 0{,}406 - 0{,}356\, i \\
\lambda_4 &= 0{,}464 - 0{,}227\, i \\
\lambda_5 &= 0{,}480 - 0{,}108\, i \\
\lambda_6 &= 0{,}471 + 0{,}017\, i \\
\lambda_7 &= 0{,}439 + 0{,}118\, i \\
\lambda_8 &= 0{,}393 + 0{,}205\, i \\
\lambda_9 &= 0{,}338 + 0{,}281\, i.
\end{aligned}$$

Der letzte Wert liefert eine erwünschte Kontrolle unserer Rechnung; es mufs nämlich sein absoluter Betrag gleich dem Radius des in die Äquatorebene stereographisch projicierten Parallelkreises $e'$, d. h. gleich $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc}\cos e'\right)$ sein. In der That wird

$$\log |\lambda_9| = 0{,}6434 - 1 = \log \operatorname{tang} (23^0\, 45')$$

und in Übereinstimmung mit Gleichung (14) bis auf einen Fehler, der weniger als $\frac{1}{1000}$ des ganzen Wertes beträgt,

$$\cos (47^0\, 30') = 0{,}6756 = e'.$$

Die vorstehenden Werte von $\lambda$ geben uns für die Zeichnung der Bahnkurve in stereographischer Projektion die rechtwinkligen Koordinaten von zehn ihrer Punkte, welche in der folgenden Figur durch die Zahlen 0, 1, 2, . . . markiert sind. Man hat dabei nur zu beachten, dafs die positive reelle und imaginäre Axe der $\lambda$-Ebene durch Projektion aus denjenigen beiden Meridianen der Einheitskugel entstehen, welche bez. durch die positive $x$- und $y$-Axe hindurchgehen. Da die erstere in die letztere von der Vertikalen gesehen durch eine Drehung *im* Sinne des Uhrzeigers übergeführt wird (vgl. die in Figur 4 auf pag. 18 enthaltene Festsetzung), so gilt das Entsprechende für die

positive reelle und imaginäre Axe der $\lambda$-Ebene. Zählen wir die reelle Axe positiv nach rechts, so müssen wir die imaginäre Axe nach *unten*, also umgekehrt wie es in der Gaufsischen Ebene zu geschehen pflegt, positiv rechnen. Hierauf beziehen sich die Pfeile in der Figur.

Die Bahnkurve setzt, wie die Figur zeigt, auf der negativ imaginären Axe ein und umläuft die Vertikale im Sinne des Uhrzeigers. Die Verschiedenheit in den Längen der Teilbögen 0 1, 1 2, 2 3, . . ., welche sämtlich in demselben Zeitintervalle $\frac{\omega}{9}$ durchlaufen werden, giebt uns gleichzeitig ein Bild von der wechselnden Geschwindigkeit der Kreiselspitze. Der weitere Verlauf der Bahnkurve jenseits des Punktes 9 ist den Symmetrieverhältnissen entsprechend vervollständigt worden.

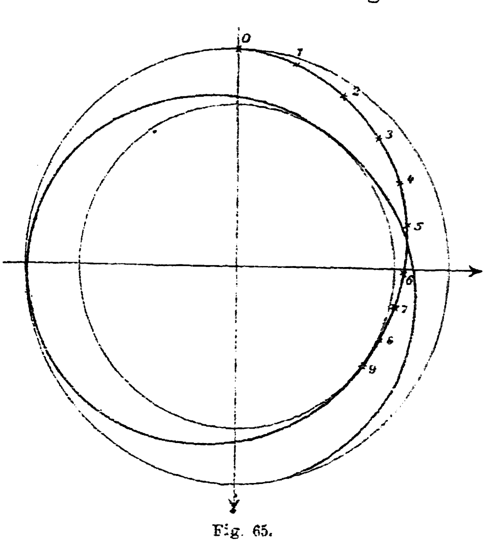


Fig. 65.

Insbesondere bemerken wir noch, dafs die Spannweite des einzelnen Halbbogens unserer Bahnkurve, die Gröfse $\psi_\omega$, von deren Berechnung bereits pag. 269 gesprochen wurde, allgemein durch den Wert des Exponenten $Lt$ für $t = \omega$ gegeben ist. Unsere Bahnkurvengleichung liefert nun für $\psi_\omega$ den Wert

$$\psi_\omega = L\omega = (l + l')\,\omega - \pi.$$

In unserem Beispiele wird also speziell

$$\psi_\omega = 1{,}442\,\frac{\pi}{2} = 129^0\,46'\,48''.$$

Auch die Berechnung der übrigen Elemente der Kreiselbewegung, z. B. die Berechnung der Horizontalprojektionen unserer beiden Impulskurven, bietet nun gar keine Schwierigkeit mehr. Die Ähnlichkeit in der analytischen Darstellung dieser Kurven mit der Darstellung unserer Bahnkurve wird dabei eine qualitative Ähnlichkeit in dem Verlauf dieser Kurven mit der eben angezeichneten bewirken.

Zum Schlusse möchten wir nachdrücklichst auf die merkwürdige Einfachheit und den ganz elementaren Charakter der somit gewonnenen numerischen Berechnungsweise der Kreiselbahnen hinweisen. Der analytische Apparat der elliptischen Funktionen versieht uns nicht nur

mit der theoretisch genauen Bahnkurvengleichung (17), sondern auch, was nicht minder bemerkenswert ist, mit einer höchst elementaren, praktisch ausreichenden Näherungsformel (in unserem Beispiele Gleichung (18)), welche weit vollständiger und bequemer ist, als die am Schlusse des vierten Kapitels entwickelten angenäherten Methoden. Natürlich ist die Zulässigkeit der in Rede stehenden Näherungsformel an die Bedingung gebunden, dafs man das Argument der $\vartheta$-Funktion vorher auf das den Nullpunkt umgebende Periodenparallelogramm reduziert und dafs man, falls es nötig ist, ein Periodenrechteck von gröfserer Breite als Höhe in ein solches von gröfserer Höhe als Breite transformiert hat. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Reduktion (durch die Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktionen) bez. diese Transformation (durch die Transformationsgleichung (3)) bei den $\vartheta$-Funktionen ausgeführt werden kann, bildet einen der Vorzüge, welche die Rechnung mit den $\vartheta$-Funktionen vor der direkten Auswertung der elliptischen Integrale auszeichnet.

Dafs in unserer Näherungsformel die transcendenten Konstanten $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$ vorkommen, kann den elementaren Charakter der Näherungsmethode ebenso wenig beeinträchtigen, wie das Vorkommen der Exponentialgröfsen oder der trigonometrischen Funktionen, da jene Gröfsen ebenso wie diese ohne Umstände aus den betreffenden Tafeln entnommen werden können. Wenn man also eine elementare analytische Behandlung der Kreiselbewegung wünscht, so ist diese gerade auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen zu suchen und durch Abbrechen der $\vartheta$-Reihen zu realisieren.

Überhaupt können wir sagen, indem wir die Ergebnisse dieses Paragraphen etwas verallgemeinernd aussprechen: *Eine $\vartheta$-Reihe bedeutet praktisch nichts anderes als eine Summe von zwei trigonometrischen Termen. Jede Formel mit elliptischen Funktionen läfst sich für die Zwecke des numerischen Rechnens durch eine solche mit wenigen trigonometrischen Funktionen ersetzen.*

## § 7. Darstellung der Bewegungen des kräftefreien Kreisels durch elliptische Funktionen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels, welche früher (vgl. pag. 149 ff.) nur bis zur Aufstellung der elliptischen Integrale geführt worden ist, nach dem Vorbilde der Theorie des schweren symmetrischen Kreisels eingehender untersuchen und durch die elliptischen Funktionen explicite darstellen.

Wir werden uns hier auf die analytische Seite des Problems beschränken dürfen, da wir die geometrischen Eigenschaften dieser Be-

wegung schon früher (Kap. III § 2) im Anschlusse an **Poinsot** ausgiebig diskutiert haben. In erster Linie wünschen wir zu zeigen, wie auch hier unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die einfachste und vollständigste Beschreibung des Bewegungsvorganges vermitteln.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, belegen wir die ganze Klasse der hier zu betrachtenden Bewegungen mit dem schon früher benutzten Namen der *Poinsot-Bewegungen.*

Wir setzen zunächst die früher (pag. 148—150) gewonnenen Formeln her, welche für das Folgende hauptsächlich in Betracht kommen. Es sind dieses zunächst die beiden algebraischen Integrale der kräftefreien Kreiselbewegung, die Sätze von der Konstanz der lebendigen Kraft und der Impulslänge:

$$(1)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \end{cases}$$

Bezeichnet ferner $u$ das Quadrat der Länge des Drehungsvektors

$$u = p^2 + q^2 + r^2,$$

so berechneten sich $p^2$, $q^2$ und $r^2$ als lineare Funktionen von $u$, wobei insbesondere

$$(2)\qquad r^2 = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}$$

war; die Zeit $t$ aber wurde das folgende elliptische Integral

$$(3)\qquad t = \frac{1}{m}\int\frac{du}{pqr},$$

in welchem die Konstante $m$, (welche pag. 149 mit $c$ bezeichnet wurde), den Wert

$$(4)\quad m = 2\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) = -2\,\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC}$$

hat. Die im Raume feste Impulsaxe wählten wir bequemer Weise zur dritten Koordinatenaxe des im Raume festen Systems $x$, $y$, $z$. Dann drückten sich die Richtungskosinusse $c$, $c'$, $c''$ dieser Axe gegen die im Körper festen Hauptträgheitsaxen $X$, $Y$, $Z$ einfach durch die folgenden Gleichungen aus:

$$(5)\qquad c = \frac{Ap}{G},\quad c' = \frac{Bq}{G},\quad c'' = \frac{Cr}{G}.$$

Um die Behandlung des kräftefreien Kreisels möglichst enge an die des schweren Kreisels anzuschließen, wollen wir jetzt statt der Integrationsvariabeln $u$ eine neue $v$ einführen, welche gleich $\cos\vartheta = c''$ ist. Wir haben dann nach (5)

$$(6)\qquad v = \frac{Cr}{G};$$

die Beziehung zwischen $u$ und $v$ lautet daher nach (2)

$$(7)\qquad \frac{G^2 v^2}{C^2} = \frac{uAB - 2h(A+B) + G^2}{(C-A)(C-B)}.$$

Um $t$ durch $v$ auszudrücken, berechnen wir aus (6) und (7)

$$(8)\qquad \frac{du}{r} = \frac{G(C-A)(C-B)}{ABC}\,dv.$$

Ferner folgt aus (1) durch Elimination von $q^2$ oder $p^2$:

$$A(B-A)p^2 = (2hC - G^2v^2)\cdot\frac{B}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

$$B(A-B)q^2 = (2hC - G^2v^2)\frac{A}{C} - G^2 + G^2v^2,$$

mithin

$$(9)\qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{G^2(B-C)}{AC(B-A)}\left(\dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2} - v^2\right), \\[2mm] q^2 = \dfrac{G^2(A-C)}{BC(A-B)}\left(\dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2} - v^2\right). \end{cases}$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$(9')\qquad \begin{cases} e^2 = \dfrac{(2hA-G^2)C}{(A-C)G^2}, \quad e'^2 = \dfrac{(2hB-G^2)C}{(B-C)G^2}, \\[2mm] V = \dfrac{(A-C)(B-C)}{AB}\,\dfrac{G^2}{C^2}(e^2-v^2)(v^2-e'^2), \end{cases}$$

so können wir schreiben

$$(10)\qquad pq = \frac{G}{A-B}\sqrt{V}.$$

Unser Integral (3) lautet daher, in die neue Variable $v$ transformiert, mit Rücksicht auf (8), (10) und den in (4) angegebenen Wert von $m$:

$$t = \int^{v} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Unter der Quadratwurzel steht jetzt das Polynom vierten Grades $V$. Seine Nullstellen $v = \pm e$ und $v = \pm e'$ geben die sämtlichen Verzweigungspunkte der *zweiblättrigen Riemannschen Fläche* $(v, \sqrt{V})$ an, auf welcher wir im Folgenden zu operieren haben. Je zwei übereinanderliegende Punkte der Riemannschen Fläche sind durch gleiche Werte von $v$ und entgegengesetzt gleiche von $\sqrt{V}$ charakterisiert.

Um die gegenseitige Lage der Verzweigungspunkte beurteilen zu können, berechnen wir aus (9) zunächst

$$(10')\qquad e'^2 - e^2 = \frac{(2hC-G^2)(A-B)C}{(A-C)(B-C)G^2};$$

ferner setzen wir bezüglich der Hauptträgheitsmomente $A, B, C$ voraus:

$$A > B > C.$$

Dann werden nach (9′) und (10′) die Vorzeichen von $e^2$, $e'^2$ und $e'^2 - e^2$ bez. gleich den Vorzeichen der Gröfsen

$$2hA - G^2, \quad 2hB - G^2, \quad 2hC - G^2.$$

Die letzteren ergeben sich aber, wenn wir aus den Gleichungen (1) der Reihe nach $p^2$, $q^2$ und $r^2$ eliminieren. Dann entsteht nämlich

$$(11) \qquad \begin{cases} 2hA - G^2 = B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2, \\ 2hB - G^2 = A(B-A)p^2 + C(B-C)r^2, \\ 2hC - G^2 = A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2. \end{cases}$$

Hier ist die rechte Seite der ersten Gleichung, da $p^2$, $q^2$, $r^2$ bei der thatsächlich stattfindenden Kreiselbewegung reelle positive Gröfsen sind, wegen der für die Hauptträgheitsmomente festgesetzten Ungleichung jedenfalls positiv, die rechte Seite der letzten Gleichung sicherlich negativ. Dagegen kann die rechte Seite der zweiten Gleichung (wegen $B - A < 0$ und $B - C > 0$) sowohl positiv wie negativ sein. Wir teilen daher die Bewegungen des kräftefreien Kreisels in zwei verschiedene Klassen $2hB - G^2 > 0$ und $2hB - G^2 < 0$ ein; den Grenzfällen $2hB - G^2 = 0$, welche beiden Klassen gemeinsam sind, gehört unter Anderem die instabile Rotation um die mittlere Hauptträgheitsaxe mit $p = 0$, $r = 0$ zu. Wir wollen aber im Folgenden vorerst nur solche Bewegungen betrachten, welche zu der Klasse $2hB - G^2 > 0$ gehören. Dann haben wir

$$2hA - G^2 > 0, \quad 2hB - G^2 > 0, \quad 2hC - G^2 < 0,$$

und dementsprechend

$$e^2 > 0, \quad e'^2 > 0, \quad e^2 > e'^2.$$

*Die vier Verzweigungspunkte $\pm e$, $\pm e'$ liegen also sämtlich auf der reellen Axe und folgen auf einander in der Reihenfolge:*

$$-\infty < -e < -e' < +e' < e < +\infty.$$

Die folgende Figur stellt einen durch die reelle Axe gelegten Ausschnitt aus der Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor. Auf der so ent-

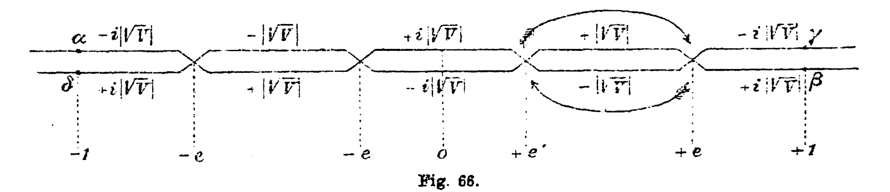



Fig. 66.

stehenden Doppelgeraden unterscheiden wir die vier Segmente $(-e, -e')$, $(-e', +e')$, $(+e', +e)$ und das im Unendlichen geschlossene Segment $(+e, \infty, -e)$. Nach Gleichung (9′) ist $V$ in dem ersten und

dritten dieser Segmente positiv, in dem zweiten und vierten negativ. Damit also $t$ reell ausfällt, ist die Integrationsvariable $v$ auf eins der erstgenannten Segmente, sagen wir auf das Segment $(+e', +e)$ zu beschränken. Um dieses haben wir sie, damit $dt$ überdies positiv wird, fortgesetzt in demselben Sinne (vgl. den Pfeil der Figur) herumzuführen. Die untere Grenze des Integrals legen wir in den Verzweigungspunkt $v = e$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $2\omega$ den Zuwachs, den $t$ bei einem vollen Umlauf um unser Integrationssegment $ee'$ erfährt, setzen also

$$\omega = \int_e^{e'} \frac{dv}{\sqrt{V}}. \tag{12}$$

Derselbe Zuwachs $2\omega$ entsteht dann auch bei einem (in geeignetem Sinne gerechneten) Umlauf um das Segment $(-e, -e')$. Andrerseits bezeichnen wir (aus später ersichtlichen Gründen) den Zuwachs, den $t$ bei einem Umlauf um eins der beiden anderen Segmente $(-e', e')$ bez. $(e, \infty, -e)$ annimmt, mit $4i\omega'$, so daſs also beispielsweise wird

$$2i\omega' = \int_{+e}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}. \tag{12'}$$

Die Gröſsen $2\omega$ und $4i\omega'$ heiſsen *die Perioden unseres überall endlichen Integrals* $t$.

Vor allem müssen wir uns jetzt mit unseren Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ beschäftigen. Wir leiten zunächst Integralausdrücke für die Logarithmen dieser Gröſsen aus den pag. 43 gegebenen Gleichungen (4) ab.

Beispielsweise haben wir nach der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{d \log \alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2} \frac{\beta}{\alpha}. \tag{13}$$

Um hier den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ durch bekannte Gröſsen auszudrücken, vergleichen wir die dritten Horizontalreihen in den Schematen (3) und (9) von pag. 17 und 21 miteinander. Wir finden dann

$$\alpha\gamma = \frac{ic' - c}{2}, \quad \beta\delta = \frac{ic' + c}{2}, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = c''. \tag{14}$$

Verbindet man die letzte dieser Gleichungen mit der Identität $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so ergiebt sich

$$\alpha\delta = \frac{c'' + 1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{c'' - 1}{2}. \tag{14'}$$

Aus (14) und (14') folgt nun durch Division

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{ic' + c}{c'' + 1} = \frac{c' - 1}{ic' - c}$$

Hier tragen wir noch die in (5) angegebenen Werte von $c, c', c''$ ein und erhalten:

$$(15)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{Ap + iBq}{Cr + G} = \frac{G - Cr}{Ap - iBq}.$$

Mithin geht Gleichung (13) über in

$$(16)\qquad \frac{d\log\alpha}{dt} = \frac{ir}{2} + \frac{q + ip}{2}\,\frac{Ap + iBq}{Cr + G}.$$

Auf der rechten Seite wollen wir $p, q, r$ durch $v$ ausdrücken. Bringen wir auf gleichen Nenner, so ergiebt sich rechts

$$\frac{i(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + iGr + (A - B)pq}{2(Cr + G)}.$$

Im Zähler ist der erste Term nach dem Satze der lebendigen Kraft konstant $= 2ih$; der letzte Term wird nach Gleichung (10) gleich $G\sqrt{V}$. Mithin nimmt (16), wenn wir für $r$ den Wert aus Gleichung (6) substituieren, die Form an:

$$(16')\qquad \frac{d\log\alpha}{dt} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v+1)}.$$

Ersetzen wir endlich die Differentiation nach $t$ durch eine solche nach $v$, so ergiebt sich

$$(16'')\qquad \frac{d\log\alpha}{dv} = \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v+1)}\,\frac{1}{\sqrt{V}}.$$

*Die Integraldarstellung von* $\log\alpha$ *lautet daher*, wenn wir die unwesentliche Integrationskonstante weglassen:

$$(17)\qquad \log\alpha = \int \frac{\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v+1)}\,\frac{dv}{\sqrt{V}};$$

*in entsprechender Weise findet man*

$$(17)\qquad \begin{cases} \log\beta = \displaystyle\int \frac{-\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v-1)}\,\frac{dv}{\sqrt{V}}, \\[2ex] \log\gamma = \displaystyle\int \frac{\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v-1)}\,\frac{dv}{\sqrt{V}}, \\[2ex] \log\delta = \displaystyle\int \frac{-\frac{2ih}{G} - \frac{iG}{C}v + \sqrt{V}}{2(v+1)}\,\frac{dv}{\sqrt{V}}. \end{cases}$$

Wir haben nun das Verhalten dieser Integrale auf unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$, insbesondere die Lage der Unendlichkeitsstellen zu untersuchen.

Betrachten wir z. B. $\log \alpha$. Von den Unendlichkeitsstellen des Integranden, d. i. den Stellen $v = \pm e, \pm e'$; $v = -1$, $v = \infty$ kommen die Verzweigungspunkte $\pm e$ und $\pm e'$ als Unendlichkeitsstellen des Integrals nicht in Betracht, weil hier die Ordnung des Unendlichwerdens kleiner als 1 ist. Die beiden anderen Stellen $v = -1$ und $v = \infty$ repräsentieren auf der Riemannschen Fläche je zwei übereinanderliegende Punkte. Wir werden nun sehen, daſs $\log \alpha$ in den *beiden* übereinanderliegenden Punkten $v = \infty$, aber nur in einem der Punkte $v = -1$ logarithmisch unendlich wird.

Bei der Untersuchung der Stelle $v = \infty$ können wir im Zähler der Integraldarstellung (17) die beiden ersten Terme gegen den dritten $\sqrt{V}$ fortlassen, weil jene von niedrigerer Ordnung unendlich werden wie dieser. Streichen wir auch im Nenner 1 gegen $v$, so behalten wir einfach übrig

$$\log \alpha = \int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2} \log v. \tag{18}$$

Diese Rechnung gilt gleichmäſsig für beide Punkte $v = \infty$ der Riemannschen Fläche und für alle vier Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Wir sehen also:

*Für $v = \infty$ werden die Logarithmen aller vier Parameter in beiden Blättern der Fläche logarithmisch unendlich.*

Wir fügen noch, indem wir uns auf die Erklärungen von pag. 404 und auf die Darstellung von $\log \alpha$ in Gleichung (18) stützen, hinzu:

*Bei einem positiven, auf der Riemannschen Fläche geschlossenen einmaligen Umlauf um eine der beiden Stellen $v = \infty$ erfahren die Logarithmen unserer vier Parameter den Zuwachs $-\pi i$.*

Indem wir zur Stelle $v = -1$ übergehen, bemerken wir zunächst, daſs, wenn $v + 1 = 0$, d. h. $Cr + G = 0$ ist, nach den beiden letzten Gliedern von Gleichung (15) gleichzeitig auch entweder $Ap + iBq$ oder $Ap - iBq$ verschwindet. Das eine findet im einen, das andere im anderen Blatte der Riemannschen Fläche statt.

In demjenigen Blatte nun, wo $Ap + iBq$ verschwindet, bleibt nach Gleichung (16) $\frac{d \log \alpha}{dt}$ und also auch $\log \alpha$ endlich, weil hier das Nullwerden des Nenners durch das des Zählers aufgehoben wird. Wir merken insbesondere noch den Wert von $\sqrt{V}$ an, der sich aus dem soeben erwiesenen Verschwinden des Zählers in Gleichung (17) ergiebt:

$$\sqrt{V} = -\left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v\right).$$

In dem anderen Blatte dagegen, wo $Ap - iBq$ verschwindet, findet ein Unendlichwerden von $\log \alpha$ statt. Die Art des Unendlich-

werdens ergiebt sich folgendermafsen. Da die Werte von $\sqrt{V}$ in übereinanderliegenden Punkten der Riemannschen Fläche sich nur im Vorzeichen unterscheiden, so wird für die in Rede stehende Stelle der Wert von $\sqrt{V}$ dem soeben angegebenen entgegengesetzt gleich; wir haben jetzt:

$$\sqrt{V} = + \left(\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C} v\right).$$

Der Zähler in Gleichung (17) wird also einfach gleich $2\sqrt{V}$, so dafs sich ergiebt:

$$(18') \qquad \log \alpha = \int \frac{dv}{v+1} = \log (v + 1).$$

Untersucht man in entsprechender Weise das Verhalten von $\log \beta$, $\log \gamma$, $\log \delta$ an den Stellen $v = \pm 1$, so kommt man zu dem folgenden zusammenfassenden Resultat:

*Die Logarithmen unserer Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ werden je in einem der vier zu den Werten $v = \pm 1$ gehörigen Punkten der Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ logarithmisch unendlich. Der Zuwachs, den diese Logarithmen bei einem positiven einmaligen Umlauf um die betreffende Unendlichkeitsstelle erfahren, ist, wie aus Gleichung* (18′) *hervorgeht, gleich* $+ 2\pi i$.

Die Verteilung der Unendlichkeitsstellen auf die beiden Blätter der Riemannschen Fläche ist in Fig. 66 pag. 457 durch Beifügung der Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ angedeutet.

Das Verhalten unserer Parameter auf der Riemannschen Fläche im vorliegenden Falle ist hiernach nicht ganz so einfach wie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Ihre Logarithmen sind jetzt nicht wie früher Normalintegrale dritter Gattung, da sie im Ganzen an drei Stellen der Riemannschen Fläche unendlich werden, nämlich je an zwei bei $v = \infty$ und je an einer bei $v = \pm 1$ gelegenen Stelle. Dieser Umstand hat für die spätere Darstellung durch die $\vartheta$-Funktionen seine gewichtigen Konsequenzen.

Nunmehr gehen wir von den Logarithmen zu den Parametern selbst über. Dabei verwandelt sich die logarithmische Unstetigkeit (18′) in eine einfache Nullstelle, die Unstetigkeit (18) aber in eine Unendlichkeitsstelle, in deren Umgebung sich $\alpha$ (und entsprechend $\beta$, $\gamma$ und $\delta$) wie $C\sqrt{v}$ verhält. Hieraus folgt, *dafs unsere Parameter im Unendlichen der Riemannschen Fläche verzweigt sind;* sie ändern sich nämlich bei einem auf der Fläche geschlossenen Umlauf um einen der beiden Punkte $v = \infty$ im Vorzeichen. Überall sonst sind sie relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt und bleiben dementsprechend bei allen denjenigen Umläufen ungeändert, welche den Wert von $t$ ungeändert lassen. Ferner

nehmen sie bei den „Periodenumläufen“, bei denen sich $t$ um $2\omega$ bez. $4i\omega'$ vermehrt, gewisse charakteristische Faktoren an, deren Logarithmen als Perioden der Integrale (17) berechnet werden könnten.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir den Umkehrgedanken aus § 3 dieses Kapitels auf. Wir betrachten also von jetzt an $t$ als unabhängige Variable und deuten diese in einer komplexen $t$-Ebene. In dieser Ebene zeichnen wir das früher beschriebene schachbrettartige Muster (vgl. Figur 64), welches die Ebene in unendlich viele Rechtecke einteilt, mit dem Unterschiede, dafs die Länge der horizontalen und vertikalen Rechtecksseiten jetzt $2\omega$ und $4\omega'$ beträgt. Jedes einzelne dieser Rechtecke stellt eine konforme Abbildung unserer Riemannschen Fläche $(v, \sqrt{V})$ vor.

Es genügt nun (wie früher) die Werteverteilung der Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ in einem dieser Rechtecke zu verfolgen, weil der Übergang zu den benachbarten Rechtecken durch Multiplikation mit den vorher genannten Konstanten bewerkstelligt wird. Betrachten wir z. B. (vgl. Fig. 67) das Rechteck mit den Ecken

$$\omega + 2i\omega', \quad -\omega + 2i\omega', \quad -\omega - 2i\omega', \quad \omega - 2i\omega'.$$

Da jeder Parameter auf der Riemannschen Fläche an einer Stelle 0 und an zwei Stellen $\infty$ wird, mufs es auch in unserem Rechtecke, welches ja ein eindeutiges Abbild der Fläche ist, für jeden Parameter eine Nullstelle und zwei Unendlichkeitsstellen geben. Wie liegen diese Stellen?

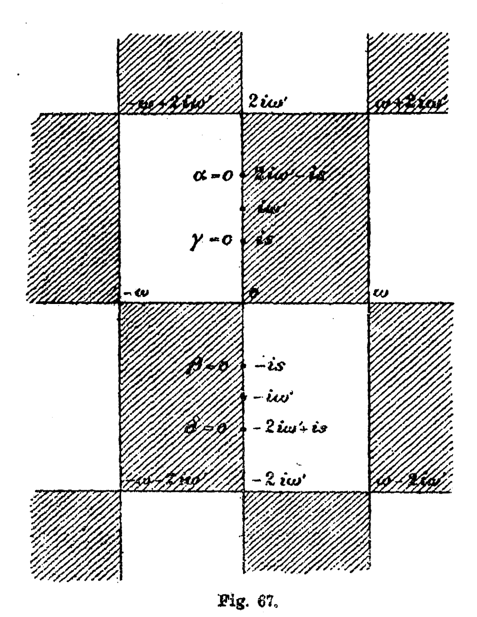


Fig. 67.

Um die Nullstellen zu ermitteln, berechnen wir den Wert des Integrals erster Gattung $t$ von $e$ bis 1. Da $e$ einen Cosinus bedeutet (den Cosinus des kleinsten Winkels, welchen die Axe $Z$ mit der Axe $z$ bei der Kreiselbewegung bildet), so ist jedenfalls $e \leqq 1$ und der Wert des genannten Integrales imaginär. Wir setzen ihn gleich $is$ und haben, da $\sqrt{V}$ nur die Quadrate von $v$ enthält:

$$(19) \qquad is = \int_e^1 \frac{dv}{\sqrt{V}} = -\int_{-e}^{-1} \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

*Hiernach sind die Nullstellen von $\gamma$ und $\beta$ direkt gegeben durch $t = +is$ und $t = -is$.* Um ferner zu den Nullstellen von $\alpha$ und $\delta$ zu gelangen, gehen wir entweder im oberen oder unteren Blatte von $e$ durch das Unendliche hindurch nach $-e$ und von da nach dem Punkte $v = -1$. Das Integral $t$ nimmt hierbei einen der Werte $\pm 2i\omega' \pm is$ an. Von diesen liegen, als Punkte der $t$-Ebene gedeutet, die Werte $2i\omega' - is$ und $-2i\omega' + is$ in unserem Periodenrechteck. *Der eine von ihnen liefert die Nullstelle von $\alpha$, der andere die von $\delta$.* Wie sich im Einzelnen die Nullstellen von $\gamma$ und $\beta$ auf die Punkte $\pm is$ und die Nullstellen von $\delta$ und $\alpha$ auf die Punkte $\pm(2i\omega' - is)$ verteilen, ist nicht schwer zu entscheiden. Wir gehen hierauf indessen nicht ein, sondern verweisen dieserhalb auf Figur 67.

Die Lage der Unendlichkeitsstellen ferner ist durch den Wert des Integrales

$$\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

charakterisiert. Hierfür können wir auch schreiben, da $V$ nur gerade Potenzen von $v$ enthält:

$$\frac{1}{2}\left(\int_e^\infty \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{-e} \frac{dv}{\sqrt{V}}\right)$$

Der Wert dieses Ausdruckes ist aber nach Gleichung (12') bekannt, nämlich gleich $i\omega'$. Verlegen wir den Integrationsweg in das andere Blatt, so ergiebt sich ersichtlich $-i\omega'$ statt $+i\omega'$. *In der $t$-Ebene entsprechen daher den beiden übereinander liegenden Punkten $v = \infty$, den Unendlichkeitsstellen unserer Parameter, die Punkte $t = \pm i\omega'$.*

Aufser den angegebenen und in Figur 67 verzeichneten Punkten sind natürlich die sämtlichen äquivalenten Punkte, welche sich von jenen um die Periodenvielfache $2m\omega + 4m'i\omega'$ unterscheiden, gleichfalls Null- bez. Unendlichkeitsstellen. Die Ordnung des Null- und Unendlichwerdens ist dabei dieselbe wie auf der Riemannschen Fläche. Die Ordnung der Nullstellen ist durchweg gleich 1, die der Unendlichkeitsstellen gleich $\frac{1}{2}$.

Auf die Lage der Null- und Unendlichkeitsstellen gründen wir nun die analytische Darstellung unserer Parameter durch $\vartheta$-Quotienten. Dabei ist wohl zu bemerken, dafs an der Definition der $\vartheta$-Funktion (vgl. pag. 418) eine kleine Änderung deshalb vorzunehmen ist, weil die Perioden unseres Integrals erster Gattung, welche früher $2\omega$ und $2i\omega'$ hiefsen, jetzt mit $2\omega$ und $4i\omega'$ bezeichnet wurden. Dementsprechend

ist in der Reihendarstellung sowie in den Funktionalgleichungen der $\vartheta$-Funktion etc. durchweg $2\omega'$ durch $4\omega'$ zu ersetzen. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, wollen wir diese $\vartheta$-Funktion mit $\Theta(t)$ bezeichnen — allerdings sehr im Gegensatz zu der von Jacobi eingeführten Bedeutung dieses Zeichens — während wir die Bezeichnung $\vartheta(t)$ für die mit den Gröfsen $2\omega$, $2i\omega'$ gebildete Reihe reservieren. Ausführlich geschrieben lautet daher die Definition der beiden im Folgenden neben einander zu benutzenden Funktionen $\vartheta(t)$ und $\Theta(t)$ folgendermafsen:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 2i\omega') = e^{-\frac{\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{9\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

$$\Theta(t) = \vartheta(t, 2\omega, 4i\omega') = e^{-\frac{2\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{18\omega'\pi}{4\omega}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \cdots$$

Um zur Darstellung von $\alpha$ zu gelangen, betrachten wir nun den Quotienten

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}}.$$

Dieser wird an denselben Stellen und von derselben Ordnung null und unendlich wie unser Parameter $\alpha$. Überdies ändert er sich ebenso wie dieser bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ bez. um $4i\omega'$ nur um konstante Faktoren. Dividieren wir also $\alpha$ durch diesen Quotienten, so bekommen wir eine nirgends im Endlichen verschwindende und nirgends unendlich werdende eindeutige Funktion, welche sich mit konstanten Faktoren multipliziert, wenn $t$ um eine der Perioden vermehrt wird. Von einer solchen Funktion weist man aber genau so wie pag. 420 nach, dafs sie die Form $k e^{lt}$ haben mufs. *Mithin folgt:*

$$\alpha = k_1 e^{l_1 t} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}. \tag{20}$$

*In entsprechender Weise ergiebt sich:*

$$\begin{cases} \beta = k_2 e^{l_2 t} \dfrac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \gamma = k_3 e^{l_3 t} \dfrac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}, \\ \delta = k_4 e^{l_4 t} \dfrac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega') \cdot \Theta(t + i\omega')}}. \end{cases} \tag{20}$$

Hier sind noch die Konstanten $k$ und $l$ zu bestimmen.

Bezüglich der Konstanten $l$ zeigen wir zunächst, dafs

$$l_4 = -l_1, \quad l_3 = -l_2 \tag{21}$$

sein mufs. Aus den Gleichungen (14')

$$\alpha\delta = \frac{v+1}{2}, \qquad \beta\gamma = \frac{v-1}{2}$$

folgt nämlich, daſs diese Produkte ebenso wie $v$ selbst doppelperiodische Funktionen mit den Perioden $2\omega$ und $4i\omega'$ sind. Vermehren wir nun $t$ um $2\omega$, so würde sich $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ bez. um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)2\omega}$$

ändern, da die in $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ auftretenden $\Theta$-Funktionen im Quotienten ungeändert bleiben. Andrerseits würden sich dieselben Gröſsen, wenn wir $t$ um $4i\omega'$ vermehren, um die Faktoren

$$e^{(l_1+l_4)4i\omega'} \text{ bez. } e^{(l_2+l_3)4i\omega'}$$

ändern. Diese sämtlichen vier Faktoren sind also gleich 1 zu setzen, was nur dadurch zu erreichen ist, daſs wir, wie oben angegeben, $l_4 = -l_1$, $l_3 = -l_2$ nehmen.

Wir wollen ferner zeigen, daſs

$$l_2 = l_1 + \frac{\pi i}{2\omega} \tag{22}$$

ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einer der Gleichungen (14) aus, welche wir mit Rücksicht auf (5) so schreiben können:

$$\alpha\gamma = \frac{iBq - Ap}{2G}. \tag{23}$$

Nun zeigen aber die in den Gl. (9) für $p^2$ und $q^2$ berechneten Werte, daſs $p$ und $q$ bei einem einmaligen Umgang um die Verzweigungspunkte $v = e$ und $v = e'$, bei welchem $t$ um $2\omega$ wächst, sich im Vorzeichen ändern, daſs sie aber bei einem Umgange um die Punkte $v = e$ und $v = -e$, während dessen $t$ um $4i\omega'$ wächst, ungeändert bleiben. Andrerseits würde nach den Gleichungen (20) und (21), wenn wir $t$ um $2\omega$ bez. $4i\omega'$ vermehren, $\alpha\gamma$ die Faktoren annehmen

$$e^{(l_1-l_2)2\omega} \text{ bez. } e^{(l_1-l_2)4i\omega'}\, e^{-\frac{2\pi\omega'}{\omega}}.$$

Der erste dieser Faktoren ist also gleich $-1$, der zweite gleich $+1$ zu setzen. Dies führt mit Notwendigkeit auf die angegebene Relation (22).

Somit bleibt nur noch die eine Gröſse $l_1$ übrig. Ihr Wert ergiebt sich aus (20) durch logarithmische Differentiation:

$$l_1 = \frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\Theta(t-2i\omega'+is)}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\log\Theta(t+i\omega')}{dt} + \frac{d\log\Theta(t-i\omega')}{dt}\right\}. \tag{24}$$

Hier können wir für $t$ irgend einen speziellen Wert einsetzen, für den der zugehörige Wert von $v$ und also auch (nach (16')) der Wert

von $\frac{d\log\alpha}{dt}$ bekannt ist. Z. B. kann man $t = -is$ nehmen, worauf

$$v = +1,\ \sqrt{V} = -\frac{2ih}{G} + \frac{iG}{C},\quad \frac{d\log\alpha}{dt} = \frac{iG}{2C}$$

wird. Es folgt dann

$$(24') \qquad l_1 = \frac{iG}{2C} + \frac{\Theta'(2i\omega')}{\Theta(2i\omega')} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(i\omega' - is)}{\Theta(i\omega' - is)} - \frac{\Theta'(i\omega' + is)}{\Theta(i\omega' + is)}\right\}.$$

Hieraus erkennt man, dafs $l_1$ rein imaginär ist, so dafs wir $l_1$ lieber gleich $il$ setzen, wo $l$ reell ist.

Man könnte den Ausdruck für $l_1$ bez. für $l$ leicht noch etwas vereinfachen; indessen legen wir hierauf keinen Wert, da wir im Folgenden *die Gröfse $l$ selbst* neben den Gröfsen $\omega$, $\omega'$ und $s$, welche allein zur Festlegung der Bewegung nicht ausreichen, *als eine der charakteristischen Konstanten der Poinsot-Bewegung* ansehen werden.

Die vollständige Tabelle unserer Konstanten $l_i$ lautet nun folgendermafsen:

$$(25) \quad l_1 = il,\quad l_2 = i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right),\quad l_3 = -i\left(l + \frac{\pi}{2\omega}\right),\quad l_4 = -il.$$

Um auch die Konstanten $k$ zu bestimmen, gehen wir auf die Anfangswerte der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zur Zeit $t = 0$ zurück und drücken diese nach der ursprünglichen Definition von pag. 21 durch die Anfangswerte der Eulerschen Winkel $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ aus. Wir haben dann

$$\alpha_0 = \cos\frac{\vartheta_0}{2}\, e^{\frac{i(\varphi_0 + \psi_0)}{2}} \quad \text{etc.}$$

Die Anfangszeit $t = 0$ ist nun so gewählt, dafs in ihr $v = e$ und also, nach den Gleichungen (9), $q = 0$ wird. Aus (5) ergiebt sich aber, dafs mit $q$ auch der Richtungscosinus $c'$ zwischen der $Y$- und der $z$-Axe verschwindet. Der Winkel zwischen diesen beiden Axen ist also ein Rechter. Wir nannten aber diejenige Gerade der $XY$-Ebene, welche senkrecht zur $z$-Axe steht, die Knotenlinie. Mithin fallen für $t = 0$ die Knotenlinie und die $Y$-Axe zusammen. Es ist demnach $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Der Winkel $\psi_0$ ferner ist gänzlich in unsere Willkür gegeben. In der That kann der Verlauf der Bewegung in keiner Weise davon abhängen, wie wir das $xyz$-System im Raume orientieren. Wir können insbesondere also auch die $x$-Axe in der Anfangslage mit der Knotenlinie zusammenfallen lassen und dementsprechend $\psi_0 = 0$ wählen. Dann aber zeigen die genannten Gleichungen von pag. 21, dafs

$$(26) \qquad \alpha_0 = -\delta_0,\quad \beta_0 = -\gamma_0$$

wird. Setzen wir andrerseits in den Gleichungen (20) $t = 0$, so er-

kennen wir, dafs nach diesen Gleichungen

$$(26')\qquad \frac{\alpha_0}{k_1} = -\frac{\delta_0}{k_4}, \quad \frac{\beta_0}{k_2} = -\frac{\gamma_0}{k_3}$$

wäre. Damit die letzten Gleichungen mit den vorhergehenden verträglich sind, mufs notwendig

$$(27)\qquad k_1 = k_4, \quad k_2 = k_3$$

genommen werden.

Um schliefslich den gemeinsamen Wert von $k_1$ und $k_4$ einerseits, von $k_2$ und $k_3$ andrerseits zu bestimmen, gehen wir auf die Gleichungen (14′)

$$(28)\qquad \alpha\delta = \frac{v+1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{v-1}{2}$$

zurück. Hier wollen wir die rechterhand stehenden doppeltperiodischen Funktionen von $t$

$$\frac{v \pm 1}{2}$$

durch $t$ darstellen. Da $v+1$ für $t = \pm(2i\omega' - is)$ verschwindet und für $t = \pm i\omega'$ unendlich wird, so hat der Ausdruck

$$\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}$$

dieselben Null- und Unendlichkeitsstellen in der $t$-Ebene wie $v+1$. Er ist überdies gleichfalls eine doppeltperiodische Funktion und kann sich daher von $\frac{v+1}{2}$ nur um eine Konstante unterscheiden. Wir haben also

$$(29)\qquad \frac{v+1}{2} = C\,\frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)\,\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}$$

und entsprechend

$$(29')\qquad \frac{v-1}{2} = C'\,\frac{\Theta(t - is)\,\Theta(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}.$$

Die Werte der hiermit eingeführten Konstanten $C$ und $C'$, welche natürlich nicht mit dem Trägheitsmomente $C^*$ verwechselt werden dürfen, ergeben sich leicht, wenn wir etwa in (29) $t = is$, in (29′) $t = 2i\omega' - is$ einsetzen. Dann werden die linken Seiten gleich $+1$ bez. $-1$, und die $\Theta$-Quotienten der rechten Seiten gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}$$

bez. gleich

$$\frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(3i\omega' - is)} = \frac{\Theta(2i\omega' - 2is)\cdot\Theta(2i\omega')}{\Theta(i\omega' - is)\cdot\Theta(i\omega' + is)}\, e^{-\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}}$$

Mithin haben wir

$$(30)\qquad C = \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}, \quad C' = -e^{\frac{(\omega' - s)\pi}{\omega}}\,C.$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (28) linkerhand die Werte der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ aus (20) ein und drücken wir die rechten Seiten nach (29) aus, so heben sich die von $t$ abhängigen Bestandteile heraus und wir erhalten unmittelbar:

$$k_1 k_4 = C, \quad k_2 k_3 = C',$$

also mit Rücksicht auf (27):

$$k_1 = \sqrt{C}, \quad k_2 = \sqrt{C'}, \quad k_3 = \sqrt{C'}, \quad k_4 = \sqrt{C} \quad . \tag{31}$$

Die Vorzeichen dieser sowie der in (20) vorkommenden Quadratwurzeln sind so zu wählen, dafs die aus letzteren entspringenden Werte von $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$ mit dem vorher besprochenen Anfangszustande übereinstimmen.

*Alles Vorhergehende zusammenfassend können wir also unsere Parameter durch das nachstehende elegante Gleichungssystem darstellen:*

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{C}\, e^{ilt} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}},\\
\beta &= i\sqrt{C}\, e^{ilt}\, e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)} \frac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}},\\
\gamma &= i\sqrt{C}\, e^{-ilt}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}},\\
\delta &= \sqrt{C}\, e^{-ilt} \frac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}};\\
C &= \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Durch diese Gleichungen sind die sämtlichen Poinsot-Bewegungen in ein einheitliches analytisches Schema gebracht. Wenn wir für die vier darin auftretenden Konstanten $\omega$, $\omega'$, $s$ und $l$ alle möglichen reellen Werte einsetzen, müssen sich alle möglichen Bewegungen des kräftefreien Kreisels ergeben. Durch eine Abzählung überzeugt man sich übrigens leicht, dafs unsere vier Konstanten wirklich von einander unabhängig sind, ihre Zahl also nicht weiter herabgedrückt werden kann. Alle weiteren Sätze, welche wir im Folgenden aufstellen werden, sind einfache Folgerungen aus diesem analytischen Schema.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die Bahnkurve, welche irgend ein Punkt des Kreisels, der von $O$ den Abstand 1 hat, im Raume beschreibt. (Die Bahnkurven aller übrigen Kreiselpunkte, deren Abstand von $O$ nicht gleich 1 ist, sind natürlich jenen Bahnkurven geometrisch ähnlich.) Die Lage des betreffenden Punktes gegen den Kreisel charakterisieren wir wie früher durch die komplexe Gröfse $\Lambda$, die Lage im Raume durch $\lambda$.

Dann besteht zwischen $\lambda$ und $\Lambda$ die uns von früher her bekannte Beziehung:

$$\lambda = \frac{\alpha\Lambda + \beta}{\gamma\Lambda + \delta}. \tag{33}$$

Tragen wir hier für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die gefundenen Werte ein, so ist $\lambda$ als Funktion von $t$ bekannt. Diese Funktion liefert dann in der früher beschriebenen Weise direkt die stereographische Projektion der Bahnkurve auf die $xy$-Ebene.

*Besonders einfach wird die Gleichung für die Bahnkurve der im Abstande* 1 *von* $O$ *auf der* $Z$-*Axe gelegenen Punkte.* Wir wählen den auf der positiven $Z$-Axe gelegenen Punkt aus; (für den auf der negativen $Z$-Axe gilt das Folgende mutatis mutandis gleichfalls). Diesem entspricht nach Gleichung (1′) von pag. 430 der Wert $\Lambda = \infty$; der zugehörige Wert von $\lambda$ werde mit $\lambda_Z$ bezeichnet. Die Gleichung der Bahnkurve in stereographischer Projektion lautet daher nach (33) einfach

$$\lambda_Z = \frac{\alpha}{\gamma}$$

oder, wenn wir aus (32) einsetzen:

$$\lambda_Z = -ie^{2ilt + \frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\Theta(t - is)}. \tag{34}$$

*Ganz entsprechende Darstellungen müssen sich aber auch für die Bahnkurven von Punkten der anderen Hauptaxen aufstellen lassen*, da man ja die Bezeichnung der Axen vertauschen kann. Diese Darstellungen lassen sich auch direkt aus der Gleichung (33) herleiten. Wir setzen hier für $\Lambda$ diejenigen Werte ein, welche den im Abstande 1 von $O$ auf der positiven $Y$- und $X$-Axe gelegenen Punkten zukommen. Es sind dieses (s. Gleichung (1′) von pag. 430) die Werte $\Lambda = i$ und $\Lambda = 1$. Die Gleichung der Bahnkurve für diese Punkte lautet daher:

$$\lambda_Y = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}, \quad \lambda_X = \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}.$$

Man überzeugt sich nun, indem man aus (32) einsetzt, dafs auch diese Ausdrücke als einfache Theta-Quotienten geschrieben werden können. Dabei sind aber die Perioden der hier auftretenden Thetas nicht wie bisher $2\omega$, $4i\omega'$, sondern vielmehr bei $\lambda_Y$ $4\omega$, $2i\omega'$ und bei $\lambda_X$ $4\omega$, $2\omega + 2i\omega'$. Der Grund für diese Verschiedenartigkeit der Perioden liegt, wie man noch näher ausführen könnte, offenbar darin, dafs wir bei der Auswahl der Integrationsvariabeln $v$ und bei der Berechnung von $t$ die auf unsere drei Axen $XYZ$ bezüglichen Daten ($p$, $q$, $r$, $A$, $B$, $C$ etc.) in unsymmetrischer Weise benutzt haben.

Die Umrechnung der vorstehenden Thetaausdrücke in die neuen mit halbierten bez. verdoppelten Perioden gehört in ein von den Mathematikern

vielfach angebautes und in theoretischer Hinsicht wichtiges Gebiet, in die sog. *Transformationstheorie der elliptischen Funktionen.* Es ist sehr interessant, dafs diese aus rein abstrakten Gesichtspunkten entwickelte Theorie, die wir im Folgenden noch mehrfach streifen werden, bei unserer Behandlung der Poinsot-Bewegung eine konkrete Anwendung findet. Leider können wir hier unmöglich ausführlich auf diese Theorie eingehen; wir müssen uns darauf beschränken, soviel als für den gerade vorliegenden Zweck erforderlich ist, davon mitzuteilen und ad hoc abzuleiten.

Durch die angedeuteten Überlegungen erkennt man nun die Richtigkeit der folgenden zusammenfassenden Angabe:

*Die Bahnkurve, welche ein im Abstande* 1 *von* $O$ *gelegener Punkt einer der drei Hauptaxen bei der Poinsotbewegung beschreibt, läfst sich allemal in bemerkenswert einfacher Form durch eine elliptische Funktion zweiter Art ersten Grades beschreiben. Die Perioden dieser elliptischen Funktion sind, je nachdem es sich um einen Punkt der* $Z$-, $Y$- *oder* $X$-*Axe handelt,* $2\omega$, $4i\omega'$, *oder* $4\omega$, $2i\omega'$ *oder endlich* $4\omega$, $2\omega + 2i\omega'$.

Dagegen verhalten sich die Ausdrücke für $\lambda$, welche nach Gl. (33) den Bahnkurven der übrigen Kreiselpunkte entsprechen, bei Vermehrung von $t$ um eine der Perioden $2\omega$, $4i\omega'$ nicht rein multiplikativ; sie sind daher nicht als elliptische Funktionen zu bezeichnen.

Sodann betrachten wir der Vollständigkeit halber die neun Richtungscosinus $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, welche die Axen des beweglichen $XYZ$-Systems mit den Axen des festen $xyz$-Systems bilden. Wir wollen mit Hülfe von Umrechnungen, welche abermals in die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hineingehören, zeigen, dafs auch diese Gröfsen sich in sehr einfacher Weise, *nämlich als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mit den Perioden* $2\omega$, $2i\omega'$ darstellen lassen. Genauer gesagt, gilt dieses nicht von den Richtungscosinussen selbst, sondern einerseits von den komplexen Verbindungen derselben

$$a + ib, \quad a' + ib', \quad a'' + ib'',$$

(sowie den konjugierten Gröfsen) und andrerseits von den Cosinussen

$$c, \quad c', \quad c''.$$

Wir schreiben uns zunächst die Ausdrücke dieser Gröfsen in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hin, welche sich unmittelbar durch Vergleich der Schemata (3) und (9) von pag. 17 und 21 ergeben und verifizieren an den fertigen Ausdrücken die Richtigkeit des angegebenen Resultates. Die fraglichen Ausdrücke lauten:

$$(35)\quad \begin{cases} a + ib = \alpha^2 - \beta^2, & a' + ib' = \phantom{-}i(\alpha^2 + \beta^2), \; a'' + ib'' = -2\alpha\beta, \\ \phantom{a+i}c = -\alpha\gamma + \beta\delta, & c' = -i(\alpha\gamma + \beta\delta), \qquad c'' = \alpha\delta + \beta\gamma \end{cases}$$

Betrachten wir etwa die erste dieser Gröfsen, $a + ib$. Nach Gleichung (32) haben wir:

$$(36)\qquad a + ib = C e^{2ilt} \frac{\Theta^2(t - 2i\omega' + is) + e^{\frac{i\pi}{\omega}(t - i\omega' + is)}\,\Theta^2(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}.$$

Der Nenner verschwindet für $t = i\omega' + 2m\omega + 4m'i\omega'$, sowie für $t = -i\omega' + 2m\omega + 4mi\omega'$. In ihrer Gesamtheit sind also die Nullstellen des Nenners gegeben durch

$$t = -i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega',$$

Ferner verschwindet der Zähler, wie man leicht aus den Eigenschaften der $\Theta$-Funktion folgert für $t = \omega + i\omega' - is + 2m\omega + 4m'i\omega'$ und für $t = \omega - i\omega' - is + 2m\omega + 4m'i\omega'$. Die Gesamtheit dieser $t$-Werte läfst sich so schreiben

$$t = \omega + i\omega' - is + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Überdies ändern sich Zähler und Nenner, nachdem man sie noch mit dem gemeinsamen Faktor $e^{-\frac{i\pi t}{2\omega}}$ multipliziert hat, bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren

$$-1,\ +e^{\frac{\pi\omega'}{\omega} - \frac{i\pi}{\omega}(t + is - i\omega')}\quad \text{(Zähler)},$$

$$-1,\ -e^{\frac{\pi\omega'}{\omega} - \frac{i\pi}{\omega}(t + i\omega')}\quad \text{(Nenner)}.$$

Dies sind aber gerade diejenigen Faktoren, um welche sich auch Zähler und Nenner des folgenden mit den Perioden $2\omega$, $2i\omega'$ gebildeten $\vartheta$-Quotienten ändern, mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen von $a + ib$ übereinstimmen:

$$\frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

Von diesem kann sich also die obige Kombination von $\Theta$-Reihen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir bekommen somit die folgende Relation zwischen den $\Theta$-Funktionen von den Perioden $2\omega$, $4i\omega'$ und den $\vartheta$-Reihen von den Perioden $2\omega$, $2i\omega'$:

$$(37)\qquad \begin{cases} C\,\dfrac{\Theta^2(t - 2i\omega' + is) + e^{\frac{i\pi}{\omega}(t - i\omega' + is)}\,\Theta^2(t + is)}{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')} = \\ C_1\,\dfrac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von $C_1$ setzen wir $t = -is$, worauf die linke Seite wegen des in (32) angegebenen Wertes von $C$ übergeht in

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')}.$$

Wir haben also zunächst

$$(37') \qquad C_1 = \frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} \cdot \frac{\vartheta(is - i\omega')}{\vartheta(\omega + i\omega')}.$$

Dieser Wert läfst sich aber noch weiter vereinfachen und ganz auf $\vartheta$-Funktionen zurückführen. Wir stellen zu dem Zwecke die folgende allgemeine Relation*) voran:

$$(38) \qquad \frac{\Theta(2t)}{\Theta(2t_1)} = \frac{\vartheta(t)\,\vartheta(t + \omega)}{\vartheta(t_1)\,\vartheta(t_1 + \omega)}.$$

Um ihre Richtigkeit einzusehen, bemerke man, dafs sich die Zähler der rechten und linken Seite bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und $2i\omega'$ genau um die gleichen Faktoren ändern. Die Zähler sind also bis auf eine multiplikative Konstante einander gleich. Setzt man noch $t = t_1$, so sieht man, dafs diese Konstante richtig gewählt ist.

In Gleichung (38) wollen wir nun insbesondere die Werte $t = i\omega'$, $t_1 = is - i\omega'$ eintragen. Dann folgt:

$$\frac{\Theta(2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(\omega + i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')\,\vartheta(\omega + is - i\omega')}.$$

Mithin können wir statt (37′) einfacher schreiben:

$$(39) \qquad C_1 = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}.$$

Die Gleichung (36) für die gesuchte Gröfse $a + ib$ nimmt daher wegen (37) und (39) die folgende definitive Form an:

$$a + ib = \frac{\vartheta(i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')} \, \frac{\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(t + i\omega')}\, e^{2ilt}.$$

In ganz entsprechender Weise kann man die sämtlichen in (35) angegebenen Ausdrücke umrechnen und auf $\vartheta$-Funktionen von den Perioden $2\omega$, $2i\omega'$ reduzieren. *Wir stellen die Resultate in der folgenden Tabelle zusammen:*

472

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned}
a + ib &= \frac{\vartheta(i\omega')\,\vartheta(t - \omega + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{2ilt}, \\
a' + ib' &= -i\,\frac{\vartheta(\omega + i\omega')\,\vartheta(t + is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{2ilt}, \\
a'' + ib'' &= i\,\frac{\vartheta(\omega)\,\vartheta(t + is)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{2ilt}\, e^{\frac{t\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)}, \\
c &= i\,\frac{\vartheta(\omega + is)\,\vartheta(t)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\
c' &= \frac{\vartheta(is)\,\vartheta(t - \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(t + i\omega' - is)}, \\
c'' &= \frac{\vartheta(is + i\omega')\,\vartheta(t + i\omega' + \omega)}{\vartheta(is - i\omega' + \omega)\,\vartheta(t + i\omega')}\, e^{-\frac{\pi s}{\omega}}.
\end{aligned} \right.$$

---

*) Auch diese Formel, ebenso wie die Gleichung (37) etc. wird in der Lehre von der Transformation der elliptischen Funktionen systematisch entwickelt.

Wir haben in diesen Gleichungen das wesentlichste Resultat einer berühmten Arbeit von Jacobi*) (Sur la rotation d'un corps etc.) auf einem neuen Wege abgeleitet. Wir betonen daraus vor allem:

*Die neun Richtungscosinus zwischen den Axen des beweglichen und des festen Koordinaten-Systems (oder richtiger die angegebenen komplexen Kombinationen derselben) sind sämtlich elliptische Funktionen ersten Grades von $t$ von den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$.*

Wir gehen schliefslich zur Betrachtung der *Polhodie-* und *Herpolhodiekurve***) der Poinsot-Bewegung über.

Über die Polhodiekurve vorderhand nur wenige Worte. Nach den Gleichungen (5) sind ihre Koordinaten $p$, $q$, $r$ den Richtungskosinussen $c$, $c'$, $c''$ proportional; sie stellen sich daher ebenso wie diese durch *elliptische Funktionen ersten Grades* dar. Dabei werden die Faktoren, mit denen sich $p$, $q$, $r$ bei Vermehrung von $t$ um die Perioden $2\omega$, $2i\omega'$ multiplizieren, besonders einfach, nämlich gleich $\pm 1$, wie aus den Gleichungen (40) ersichtlich. Dies ergiebt sich auch aus dem Umstande, dafs die Gröfsen $p^2$, $q^2$ und $r^2$ als ganze Funktionen von $t$ doppeltperiodisch sein, d. h. bei Periodenzuwächsen den Faktor $+1$ aufweisen müssen. Bei den Quadratwurzeln $p$, $q$, $r$ werden daher nur die Faktoren $\pm 1$ auftreten können.

Ausführlicher gehen wir auf die Herpolhodiekurve ein. Ihre Gleichung schreiben wir in der Form von pag. 44 an:

$$\pi + i\varkappa = 2i\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right),$$

$$-\varrho = 2i\left(\delta\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Setzen wir in die erste Gleichung die Werte von $\alpha$ und $\beta$ aus (32) ein, so erhalten wir:

$$\pi + i\varkappa = 2i\alpha\beta\left(\frac{d\log\alpha}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right)$$

$$= -2C\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\cdot\left\{\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)} - \frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)} - \frac{i\pi}{2\omega}\right\}.$$

Hier wollen wir abermals zu $\vartheta$-Funktionen von den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ übergehen. Bemerken wir zunächst, dafs die Klammer sich bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und $2i\omega'$ bez. um die Faktoren $+1$ und $-1$ ändert. Dieselben Änderungen erleidet aber der Quotient:

---

*) Vgl. Ges. Werke Bd. 2 pag. 293 oder Crelles Journal Bd. 39.

**) Die Darstellung der Polhodiekurve und teilweise auch die der Herpolhodiekurve durch elliptische Funktionen ist zum ersten Male von Rueb in seiner Dissertation, Utrecht 1834, gegeben.

$$\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)},$$

mit dessen Null- und Unendlichkeitsstellen auch die Null- und Unendlichkeitsstellen unserer Klammer übereinstimmen. Wir haben also

$$\frac{\Theta'(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-2i\omega'+is)}-\frac{\Theta'(t+is)}{\Theta(t+is)}-\frac{i\pi}{2\omega}=C_1\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+is)}.$$

Die Konstante $C_1$ bestimmen wir, indem wir etwa $t=-is$ setzen, zu

$$C_1=\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega)}.$$

Desgleichen läſst sich der $\Theta$-Quotient vor der Klammer in $\vartheta$-Funktionen von den Perioden $2\omega$, $2i\omega'$ umrechnen. Es wird nämlich offenbar

$$C\frac{\Theta(t-2i\omega'+is)\,\Theta(t+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}=C_2\frac{\vartheta(t+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Die eingeführte Konstante $C_2$ bestimmt sich wieder, wenn wir $t=-is$ setzen. Mit Rücksicht auf den Wert von $C$ aus (32) wird dann zunächst:

$$C_2=\frac{\Theta'(0)\,\vartheta(i\omega'-is)}{\Theta(2i\omega'-2is)\,\vartheta'(0)}.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Quotienten gehen wir auf die Gleichung (38) zurück. Setzen wir daselbst $t=0$, $t_1=i\omega'-is$, so erhalten wir:

$$\frac{2\Theta'(0)}{\Theta(2i\omega'-2is)}=\frac{\vartheta'(0)\,\vartheta(\omega)}{\vartheta(i\omega'-is)\,\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

Mithin wird

$$C_2=\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta(\omega)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}.$$

*Hiernach ergiebt sich für $\pi+i\varkappa$ der folgende definitive Wert:*

$$(41)\quad \pi+i\varkappa=-\frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega+i\omega'-is)}\,e^{2ilt+\frac{i\pi}{2\omega}(t-i\omega'+is)}\,\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+i\omega')}.$$

Dieser Ausdruck weist die gröſste Analogie mit dem früheren Ausdruck für die Herpolhodiekurve des schweren symmetrischen Kreisels (Gleichung (13) und (13′) von pag. 437) auf. Er ist nicht nur gleichfalls eine *elliptische Funktion ersten Grades*, sondern er kann auch, indem wir für $s$ eine geeignete Substitution machen, direkt in jenen übergeführt werden. Im folgenden Paragraphen werden wir aus dieser Bemerkung wichtige Konsequenzen zu ziehen haben.

In entsprechender Weise können wir noch den Ausdruck von $\varrho$ bilden. Nach Früherem (vgl. pag. 124) wissen wir, daſs $\varrho$ eine Konstante $\left(=\frac{2h}{G}\right)$ ist. Wir können daher in dem oben angegebenen allgemeinen Werte von $\varrho$ sogleich ein spezielles $t$ einsetzen, z. B. $t=+is$

Dann verschwindet $\gamma$ und es wird gleichzeitig (wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) $\alpha\delta = 1$. Wir bekommen daher

$$-\varrho = 2i\alpha\delta\left(\frac{d\log\alpha}{dt}\right) = 2i\frac{d\log\alpha}{dt},$$

d. h.

$$-\varrho = 2i\left(il + \frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')}\right\}\right).$$

Auch hier wollen wir von den $\Theta$- zu den $\vartheta$-Funktionen übergehen. Wir erreichen dieses durch die folgenden Substitutionen:

$$\frac{\Theta'(2is - 2i\omega')}{\Theta(2is - 2i\omega')} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} + \frac{\vartheta'(\omega + is - i\omega')}{\vartheta(\omega + is - i\omega')}\right\}$$

und

$$\frac{\Theta'(is - i\omega')}{\Theta(is - i\omega')} + \frac{\Theta'(is + i\omega')}{\Theta(is + i\omega')} = \frac{\vartheta'(is - i\omega')}{\vartheta(is - i\omega')} - \frac{i\pi}{2\omega}.$$

Die erste dieser Gleichungen folgt aus (38) durch logarithmische Differentiation; die zweite verifiziert man, wenn man die rechte und linke Seite auf ihr Verhalten bei Periodenzuwächsen vergleicht und eine additive Konstante richtig bestimmt.

*Statt des ursprünglichen Wertes von $\varrho$ können wir auf solche Weise schreiben:*

$$-\varrho = i\left(2il + \frac{3i\pi}{2\omega} + \frac{\vartheta'(\omega + is + i\omega')}{\vartheta(\omega + is + i\omega')}\right). \tag{42}$$

Als Gesamtresultat dieses Paragraphen ergiebt sich, daſs auch für die Behandlung der Poinsot-Bewegungen unsere Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein sehr geeignetes Instrument liefern. Sind ihre Ausdrücke in $\Theta$-Reihen einmal gefunden, so haben wir die Darstellung aller übrigen Elemente der Bewegung in der Hand. Zwar waren diese Ausdrücke selbst hier nicht ganz so einfach, wie in der Theorie des schweren Kugelkreisels; auch konnten wir beim Übergang von den $\Theta$- zu den $\vartheta$-Funktionen etwas umständliche Umrechnungen nicht vermeiden. Diese liegen aber in der Natur der Sache begründet und haben im Hinblick auf die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen an sich ein gewisses Interesse. Wollten wir die Benutzung unserer $\Theta$-Reihen überhaupt vermeiden und mit Jacobi etwa direkt auf die Ausdrücke der neun Richtungskosinusse ausgehen, so würde die Vollständigkeit der Entwickelungen darunter leiden. Insbesondere würden uns die schönen Resultate über die von einem Punkte der Hauptträgheitsaxen beschriebenen Bahnkurven entgangen sein.

## § 8. Konjugierte Poinsot-Bewegungen. Jacobis Theorem über den Zusammenhang zwischen der Bewegung des kräftefreien unsymmetrischen und des schweren Kugelkreisels.

Nachdem die Behandlung der einzelnen Poinsot-Bewegung erledigt ist, kommen wir nun dazu, die Beziehungen zweier in bestimmter Weise einander zugeordneter, sog. „konjugierter“ Poinsot-Bewegungen zu schildern. Dabei wird sich ein in der Litteratur viel genanntes Theorem von Jacobi ergeben, welches einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Bewegung des schweren Kugelkreisels und der Theorie der konjugierten Poinsot-Bewegungen statuiert.

Zu dem Zweck gehen wir nochmals auf die Polhodiekurve zurück und zeigen, daſs ein und dieselbe Polhodiekurve stets in doppelter Weise als Polhodiekurve einer Poinsot-Bewegung aufgefaſst werden kann, daſs sie nämlich gleichzeitig die Polhodiekurve für zwei verschiedene reelle kräftefreie Kreisel darstellt.

Eine Polhodiekurve besteht (vgl. die Figur von pag. 131) stets aus zwei symmetrisch gleichen Ästen. Beschreibt der Punkt mit den Koordinaten $p$, $q$, $r$ den einen Ast, so durchläuft der Punkt $-p$, $-q$, $-r$ den anderen Ast in entgegengesetzter Richtung. Bei der einzelnen Poinsot-Bewegung wird natürlich nur der eine Ast von dem Endpunkt des Drehungsvektors bestrichen.

*Wir fragen, ob der andere Ast die gleiche Rolle bei einer anderen Poinsot-Bewegung spielt.*

Die Antwort ergiebt sich sofort aus den Eulerschen Gleichungen. Nach Voraussetzung genügen die Koordinaten $p$, $q$, $r$ den Gleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} qr, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} rp, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} pq.$$

Dann erfüllen aber ersichtlich die Koordinaten des diametralen Punktes $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{B-C}{A} q'r', \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{C-A}{B} r'p', \quad \frac{dr'}{dt} = -\frac{A-B}{C} p'q'.$$

*Die Gröſsen $p'$, $q'$, $r'$ gehören also einem anderen Kreisel als Drehungskomponenten hinzu, dessen Trägheitsmomente* — wir wollen sie mit $A'$, $B'$, $C'$ bezeichnen — *mit den Trägheitsmomenten des ursprünglichen Kreisels durch die Relationen verbunden sind:*

$$(2) \quad \frac{B'-C'}{A'} = -\frac{B-C}{A}, \quad \frac{C'-A'}{B'} = -\frac{C-A}{B}, \quad \frac{A'-B'}{C'} = -\frac{A-B}{C}.$$

Wir haben zunächst zu zeigen, daſs durch diese Gleichungen ein *reeller* Kreisel definiert wird, d. h., daſs eine Massenverteilung von den

Hauptträgheitsmomenten $A'$, $B'$, $C'$ möglich ist. Zu dem Zwecke genügt es, sich zu überzeugen, I) dafs die Gröfsen $A'$, $B'$, $C'$ sämtlich positiv sind, und II) dafs sie den bekannten Ungleichungen von pag. 100 (denselben Ungleichungen, welche auch zwischen den Seiten eines gewöhnlichen Dreiecks bestehen,) genügen.

I) Die Gleichungen (2) stellen drei lineare homogene Gleichungen für die Unbekannten $A'$, $B'$, $C'$ dar; durch diese sind natürlich nur die Verhältnisse $A' : B' : C'$ bestimmt. Und zwar finden wir durch Auflösung dieser Gleichungen leicht:

$$(3)\quad A' : B' : C' = A(B + C - A) : B(C + A - B) : C(A + B - C).$$

Die rechts stehenden Gröfsen sind aber sämtlich positiv, da ja die $A$, $B$, $C$ den für die Realität des ursprünglichen Kreisels erforderlichen Ungleichungen genügen sollen. Wählen wir also, was gestattet ist, eine der Gröfsen $A'$, $B'$, $C'$ als positiv, so werden nach der vorstehenden Proportion auch die beiden anderen Gröfsen positiv sein müssen.

II) Hätten wir umgekehrt die Gleichungen (2) nach den $A$, $B$, $C$ aufgelöst, so hätten wir offenbar die folgende Proportion erhalten:

$$(3')\quad A : B : C = A'(B' + C' - A') : B'(C' + A' - B') : C'(A' + B' - C').$$

Hiernach verhalten sich also auch die drei Gröfsen $B' + C' - A'$, $C' + A' - B'$, $A' + B' - C'$ wie drei positive Zahlen. Da doch mindestens eine von ihnen positiv sein mufs, werden es also auch die beiden anderen sein.

*Hiermit ist unser Kreisel $A'$, $B'$, $C'$ als reell nachgewiesen.*

Wir wollen ferner auch die Konstanten $2h'$ und $G'$ unseres zweiten Kreisels mit den Konstanten $2h$ und $G$ des ersten in Zusammenhang bringen. Dafs nämlich die Drehkomponenten $p'$, $q'$, $r'$ zwei Integralgleichungen von der Form

$$A'p'^2 + B'q'^2 + C'r'^2 = 2h',$$
$$A'^2p'^2 + B'^2q'^2 + C'^2r'^2 = G'^2$$

genügen, ist von vornherein klar, da diese Gleichungen eine direkte analytische Folge der (in den $A'$, $B'$, $C'$ geschriebenen) Eulerschen Gleichungen (1) sind. Der fragliche Zusammenhang ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (11) von pag. 457. Wir schreiben uns diese in der folgenden Form auf:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{2hA - G^2}{BC} = \dfrac{A - B}{C} q^2 + \dfrac{A - C}{B} r^2, \\[2ex] \dfrac{2hB - G^2}{CA} = \dfrac{B - A}{C} p^2 + \dfrac{B - C}{A} r^2, \\[2ex] \dfrac{2hC - G^2}{AB} = \dfrac{C - A}{B} p^2 + \dfrac{C - B}{A} q^2. \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} \dfrac{2h'A' - G'^2}{B'C'} = \dfrac{A' - B'}{C'} q'^2 + \dfrac{A' - C'}{B'} r'^2, \\ \dfrac{2h'B' - G'^2}{C'A'} = \dfrac{B' - A'}{C'} p'^2 + \dfrac{B' - C'}{A'} r'^2, \\ \dfrac{2h'C' - G'^2}{A'B'} = \dfrac{C' - A'}{B'} p'^2 + \dfrac{C' - B'}{A'} q'^2. \end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungstripeln sind nun die rechten Seiten einander entgegengesetzt gleich. Mithin ergeben sich die folgenden Relationen:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{2h'A' - G'^2}{B'C'} = -\dfrac{2hA - G^2}{BC}, \quad \dfrac{2h'B' - G'^2}{C'A'} = -\dfrac{2hB - G^2}{CA}, \\ \dfrac{2h'C' - G'^2}{A'B'} = -\dfrac{2hC - G^2}{AB}, \end{cases}$$

von denen die dritte vermöge (2) eine Folge der beiden ersten ist. Zwei von ihnen können darauf zur Bestimmung der Verhältnisse von $h'$ und $G'$ zu den Trägheitsmomenten $A'$, $B'$, $C'$ benutzt werden. Somit sind die 5 Konstanten $A'$, $B'$, $C'$, $h'$, $G'$ bis auf einen Proportionalitätsfaktor bekannt. Auf diesen Faktor, welcher notwendig unbestimmt bleibt, kommt es aber bei der Bewegung in keiner Weise an.

Die durch die Verhältnisse $A' : B' : C' : h' : G'$ definierte Poinsot-Bewegung ist die oben erwähnte, zu der Bewegung $A : B : C : h : G$ *konjugierte*. Umgekehrt ist diese letztere Bewegung, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Gleichungen folgt, die konjugierte zu jener ersteren. Man bemerke noch, daſs, wenn für den einen der beiden konjugierten Kreisel, wie wir voraussetzten, die Beziehung

$$A > B > C$$

gilt, daſs dann für den anderen Kreisel die Ungleichung

$$A' < B' < C'$$

folgt; ferner, daſs, wenn die eine der beiden konjugierten Kreiselbewegungen, wie wir annahmen, zu der Klasse

$$2hB - G^2 > 0$$

gehört, daſs dann die andere Bewegung in die Klasse

$$2h'B' - G'^2 < 0$$

hineingehört.

Wir müssen ferner den Zusammenhang zwischen den „transcendenten" Konstanten $\omega$, $\omega'$, $s$ und $l$ beider konjugierter Kreisel, welche für uns noch wichtiger sind, wie die „elementaren" Konstanten $A : B : C : h : G$, feststellen.

*Zunächst sieht man, daſs die Konstanten $\omega$ und $\omega'$ für beide Kreisel dieselben sind.* Die Gleichheit von $\omega$ ergiebt sich ohne Weiteres aus

der Bedeutung dieser Gröſse. $\omega$ bedeutet nämlich, wie wir sagen können, die Zeit, während welcher der Drehungsvektor den zwischen den Koordinatenebenen $q = 0$ und $p = 0$ ausgespannten Bogen der Polhodiekurve bestreicht. In der That wird nach den Gleichungen (9) des vorigen Paragraphen $q = 0$ für $v = e$, d. h. für $t = 0$ und $p = 0$ für $v = e'$, d. h. für $t = \omega$. Die beiden diametralen Äste der Polhodiekurve und insbesondere der eben genannte Bogen, (aus dessen kongruenter und symmetrisch gleicher Wiederholung sich die ganze Polhodiekurve zusammensetzt), werden aber von den Drehungsvektoren der konjugierten Kreisel in demselben Tempo durchlaufen. Also muſs in der That $\omega$ für beide Kreisel gleich sein.

Die Gleichheit von $\omega'$ ferner könnten wir ähnlich erweisen, wenn wir den vorstehenden Schluſs auch für imaginäre Werte der Zeit zulassen wollen. Wir können aber auch so verfahren: Es ist nach den Gleichungen (6) und (10) von pag. 455, 456

$$t = \int \frac{dv}{\sqrt{V}} = \frac{C}{A - B} \int \frac{dr}{pq} = \frac{C'}{A' - B'} \int \frac{dr'}{p'q'}. \tag{6}$$

Nun ergiebt sich der Wert von $i\omega'$ für die eine und die andere Kreiselbewegung, wenn wir als untere Grenze des betreffenden Integrales $t$ denjenigen Wert von $r$ bez. $r'$, für welchen $q = 0$ bez. $q' = 0$ ist, und als obere Grenze den Wert $r = \infty$ bez. $r' = \infty$ nehmen. Die beiden so entstehenden Integrale sind aber nach der vorstehenden Gleichung identisch, da sich die genannten oberen und unteren Grenzen vermöge der Beziehung $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ entsprechen.

Anders liegt die Sache für die Konstanten $s$ der beiden Bewegungen, die wir als $s$ und $s'$ unterscheiden. Es war

$$is = \int_e^1 \frac{dv}{\sqrt{V}}.$$

Führen wir wie in (6) die Integrationsvariable $r$ ein, so wird

$$is = \frac{C}{A - B} \int \frac{dr}{pq}, \tag{7}$$

wo die untere Grenze derjenige Wert von $r$ ist, für den $q$ verschwindet, die obere der Wert $r = \frac{G}{C}$. In entsprechender Weise ist $is'$ zu definieren:

$$is' = \frac{C'}{A' - B'} \int \frac{dr'}{p'q'}, \tag{7'}$$

wobei als untere Grenze derjenige Wert von $r'$ zu denken ist, für den $q'$ verschwindet, als obere Grenze der Wert $r' = \frac{G'}{C'}$. In den Integralen

(7) und (7′) sind also nur die unteren Grenzen entsprechende Werte; die oberen Grenzen sind durchaus verschieden; *mithin werden auch die Konstanten $s$ und $s'$ verschieden ausfallen.*

Wir betrachten endlich die Konstanten $l$ und $l'$. Da die einzelne Poinsot-Bewegung von vier Willkürlichkeiten abhängt und da die konjugierte Poinsot-Bewegung durch die ursprüngliche vollständig mitbestimmt ist, wird es möglich sein, die Konstanten $l$ und $l'$ einzeln durch $\omega$, $\omega'$, $s$ und $s'$ auszudrücken. Wir erreichen dieses folgendermaſsen. Nach den Gleichungen (5) von pag. 43 haben wir

$$p + iq = 2i\left(\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right)$$

für die eine der beiden konjugierten Bewegungen. Bedeuten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ die nach dem Schema der Gleichungen (32) gebildeten Werte der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ für die andere Bewegung, so gilt gleichzeitig:

$$p' + iq' = 2i\left(\beta'\frac{d\delta'}{dt} - \delta'\frac{d\beta'}{dt}\right).$$

Die Beziehung zwischen den beiden konjugierten Polhodiekurven liefert daher

$$\left(\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right) = -\left(\beta'\frac{d\delta'}{dt} - \delta'\frac{d\beta'}{dt}\right)$$

oder

$$\beta\delta\left(\frac{d\log\delta}{dt} - \frac{d\log\beta}{dt}\right) = -\beta'\delta'\left(\frac{d\log\delta'}{dt} - \frac{d\log\beta'}{dt}\right).$$

In dieser Gleichung setzen wir für $t$ die speziellen Werte $t = -is'$ und $t = -is$ ein. Im ersten Falle verschwindet $l'$, im zweiten Falle $l$ aus unserer Gleichung, so daſs wir im ersten Falle $l$, im zweiten $l'$ getrennt erhalten. *Für $l$ ergiebt sich so der folgende Wert:*

$$(8)\quad \begin{cases} 2il + \dfrac{i\pi}{2\omega} = \dfrac{\Theta'(-is - is' + 2i\omega')}{\Theta(-is - is' + 2i\omega')} - \dfrac{\Theta'(is - is')}{\Theta(is - is')} \\ - e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(is - is')} \dfrac{\Theta'(0)\,\Theta(2i\omega' - 2is)}{\Theta(is - is')\,\Theta(-is - is' + 2i\omega')} \dfrac{\Theta(i\omega' - is')\,\Theta(i\omega' + is')}{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}. \end{cases}$$

*Der entsprechende Wert von $l'$ folgt durch Vertauschung von $s$ und $s'$.*

Um die rechte Seite zu vereinfachen, denken wir vorübergehend die Gröſse $-is'$ als variabel und fragen nach den Unendlichkeitsstellen der rechts stehenden Ausdrücke in dieser Variabeln, die wir mit $t'$ bezeichnen wollen.

Der erste Term wird ersichtlich unendlich groſs für die Werte

$$\text{(I)}\qquad t' = is - 2i\omega' + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar allemal mit dem Residuum $+1$. Ebenso wird der zweite Term unendlich für

$$\text{(II)}\qquad t' = -is + 2m\omega + 4m'i\omega'$$

und zwar mit dem Residuum $-1$. Der dritte Term wird an allen den genannten Stellen (I) und (II) und nur an diesen ebenfalls unendlich. Um die Residuen zu berechnen, bemerken wir (1), daſs für $t' = is - 2i\omega'$, sowie für $t' = -is$ das Residuum $-1$ beträgt, und (2), daſs unser dritter Term bei Vermehrung von $t'$ um $2\omega$ bez. um $4i\omega'$ den Faktor $-1$ bez. $+1$ aufnimmt. Hiernach wird das Residuum dieses dritten Termes an den Stellen (I) und (II) allgemein gleich $(-1)^{m+1}$ sein. Es werden daher die Unendlichkeitsstellen des ersten Termes bei geradem, die des zweiten Termes bei ungeradem $m$ durch das Unendlichwerden des dritten Termes aufgehoben. Mithin bleiben nur die folgenden Unendlichkeitsstellen bestehen:

$$(\mathrm{I}')\quad t' = is + 2\omega + 2i\omega' + 4m\omega + 4m'i\omega', \ (\text{Residuum } +2),$$
$$(\mathrm{II}')\quad t' = -is + 4m\omega + 4m'i\omega', \ (\text{Residuum } -2).$$

Dies ist eine Anordnung von Unendlichkeitsstellen, wie sie einer in $t'$ doppeltperiodischen Funktion von den Perioden $4\omega$ und $4i\omega'$ entspricht. In der That bleibt auch die rechte Seite von (8) bei Vermehrung von $t'$ um $4\omega$ und $4i\omega'$ gänzlich ungeändert.

Wir können nun leicht die fragliche doppeltperiodische Funktion durch $\vartheta$-Funktionen von der Periode $2\omega$ und $2i\omega'$ ausdrücken. Betrachten wir nämlich

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' - is - 2\omega - 2i\omega'}{2}\right)} - \frac{\vartheta'\left(\frac{t' + is}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{t' + is}{2}\right)}.$$

Diese Gröſse hat gerade, als Funktion von $t'$ aufgefaſst, die Unendlichkeitsstellen (I′) und (II′) mit den richtigen Residuen und ist doppeltperiodisch von den Perioden $4\omega$, $4i\omega'$. Sie kann sich daher von der rechten Seite der Gleichung (8) nur um eine additive Konstante $c$, d. h. um eine von $t'$ unabhängige Gröſse unterscheiden, welche man durch Einsetzen eines speziellen Wertes (z. B. $t' = -i\omega'$) bestimmt; und zwar findet man so $c = -\frac{i\pi}{\omega}$.

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$(9)\qquad \frac{s' - s}{2} = \omega' - a, \quad \frac{s' + s}{2} = b;$$

setzen also

$$(9')\qquad s = -\omega' + a + b, \quad s' = \omega' - a + b;$$

*dann können wir den zuletzt ermittelten Wert von $2il$ folgendermaſsen schreiben:*

$$(10)\qquad 2il + \frac{3i\pi}{2\omega} = \frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}.$$

Der entsprechende Wert von $l'$ ergiebt sich, wie erwähnt, wenn wir in (8) $s$ mit $s'$ vertauschen. *Man erhält dadurch*

$$(10') \qquad 2il' + \frac{3i\pi}{2\omega} = -\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}.$$

Wir merken noch die aus (10) und (10′) folgenden Formeln an:

$$(11) \qquad \begin{cases} i(l + l') = -\dfrac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} - \dfrac{3i\pi}{2\omega}, \\ i(l - l') = \dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)}. \end{cases}$$

*Der Zusammenhang zwischen den Konstanten* $s$, $s'$, $l$, $l'$ *ist damit gefunden.*

Wir können uns nun auf den Standpunkt stellen, daſs es, gewissermaſsen aus Symmetriegründen, praktischer wäre, die einzelne Poinsot-Bewegung statt durch die Gröſsen $\omega$, $\omega'$, $s$ und $l$ lieber durch die vier Gröſsen $\omega$, $\omega'$, $s$ und $s'$ oder auch durch die Gröſsen $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$ festzulegen, indem wir die konjugierte Poinsot-Bewegung mit in Betracht ziehen.

In diesen Konstanten wollen wir uns insbesondere die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen (41), (42) der *Herpolhodiekurve* noch einmal hinschreiben. Dieselben lauten, wenn wir sogleich einige Reduktionen anbringen:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\, e^{\frac{\pi(a+b)}{2\omega}}\, e^{\left\{\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)}\right\} t}\, \frac{\vartheta(t - \omega - i\omega' + ia + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$-\varrho = i\left(\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - \frac{\vartheta'(\omega + i\omega' + ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' + ib)} + \frac{\vartheta'(\omega + ia + ib)}{\vartheta(\omega + ia + ib)}\right).$$

Dies sind aber genau die Formeln für die Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels, wie wir sie pag. 436, 437 aufgestellt haben, mit dem einzigen Unterschiede, daſs bei unseren jetzigen Formeln der Faktor $-\frac{1}{2}$ hinzugetreten ist.

Schreiben wir uns in gleicher Weise die Gleichungen der Herpolhodiekurve des konjugierten Kreisels hin, so bekommen wir Formeln, die sich von den vorhergehenden nur durch Vertauschung von $+a$ mit $-a$ unterscheiden; so entstehen aber gerade unsere früheren Gleichungen der Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels, mit dem Unterschiede, daſs jetzt der Faktor $+\frac{1}{2}$ gegen früher hinzugetreten ist.

Wir haben also das merkwürdige Resultat:

*Die Koordinaten der Herpolhodiekurven unserer beiden konjugierten Kreisel von den Konstanten* $\omega$, $\omega'$, $a$ *und* $b$ *sind in jedem Zeitmomente*

*identisch mit den durch* $-2$ *resp.* $+2$ *dividierten Koordinaten der Polhodie- resp. Herpolhodiekurve des schweren Kugelkreisels von denselben Konstanten.*

Hier liegt offenbar ein tieferer Zusammenhang zwischen unseren konjugierten Poinsot-Bewegungen und der Bewegung des schweren Kugelkreisels verborgen, den wir durch die folgenden Überlegungen zu veranschaulichen beabsichtigen.

Wir denken uns die beiden konjugierten Kreisel um den gemeinsamen Punkt $O$ bei gemeinsamer Anfangslage und anfänglicher Rotationsaxe rotieren und fragen nach der Relativbewegung der beiden zugehörigen umgekehrten Bewegungen, d. h. derjenigen beiden Bewegungen, welche der umgebende Raum einem Beobachter auszuführen scheint, der seinen Standpunkt das eine Mal auf dem einen, das andere Mal auf dem andern der beiden konjugierten Kreisel nimmt.

Die beiden ursprünglichen direkten Bewegungen veranschaulichen wir uns nach der Vorschrift Poinsots, indem wir den betreffenden Polhodiekegel auf dem Herpolhodiekegel ohne Gleitung abrollen lassen. Die umgekehrten (inversen) Bewegungen erhalten wir hieraus in der Weise, daſs wir umgekehrt die Polhodiekegel festhalten und die Herpolhodiekegel auf ihnen ohne Gleitung abwickeln. Die Relativbewegung der beiden Herpolhodiekegel stellt uns dann das Poinsotsche Bild der Relativbewegung der umgekehrten Poinsot-Bewegungen dar.

Nun besitzen aber nach Definition konjugierte Kreisel diametral gelegene Polhodiekurven und folglich kongruente Polhodiekegel. In unserem Falle rollen also die beiden Herpolhodiekegel auf einem und demselben Polhodiekegel. Und zwar berühren sie diesen beständig längs einer und derselben Erzeugenden, welche durch die jeweiligen Werte der Verhältnisse $p:q:r = p':q':r'$ gegeben ist, und drehen sich um diese mit ein und derselben Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$$

im entgegengesetzten Sinne. (Wir haben uns vorzustellen, daſs der eine Herpolhodiekegel den Polhodiekegel von innen, der andere von auſsen berührt, so daſs sie bei ihrer im entgegengesetzten Sinne stattfindenden Drehung beständig in Kontakt bleiben können.) Wenn aber zwei Kegel ohne zu gleiten auf einem dritten abrollen und dabei dauernd in Kontakt bleiben, so rollen sie auch ohne Gleitung aufeinander ab. Wir können somit, um die fragliche Relativbewegung zu erhalten, den Polhodiekegel ganz ausschalten und direkt den einen Herpolhodiekegel auf dem anderen abwickeln. Auf diese Weise gewinnen wir aus dem Poinsotschen Bilde der ursprünglichen Kreiselbewegungen zugleich das Poinsotsche Bild der oben genannten Relativbewegung.

Halten wir nach Belieben einen der beiden Herpolhodiekegel fest, so spielt dieser für die Relativbewegung die Rolle des Herpolhodiekegels, während der andere Herpolhodiekegel als Polhodiekegel der Relativbewegung zu bezeichnen sein würde. Wir sehen also:

*Herpolhodie- und Polhodiekegel unserer Relativbewegung sind mit den beiden Herpolhodiekegeln der ursprünglichen Einzelbewegungen identisch.*

Etwas anders liegt die Sache, wenn wir aufser den Kegeln die auf ihnen verlaufenden Herpolhodie- und Polhodiekurven der Relativbewegung in Betracht ziehen. Diese sind nicht etwa ohne Weiteres mit den Herpolhodiekurven der konjugierten Poinsot-Bewegungen identisch. Denn erstens rollen ja diese letzteren Kurven auf den Polhodiekurven der Poinsot-Bewegungen ab, welche in Bezug auf $O$ diametral liegen. Mithin müssen sich auch diejenigen beiden Punkte der Herpolhodiekurven, welche in jedem Momente den Endpunkt des Drehungsvektors in den Poinsot-Bewegungen geben, auf entgegengesetzten Seiten von $O$ befinden. Um überhaupt zwei auf einander abrollende Kurven zu haben, müssen wir also die eine Herpolhodiekurve durch ihr diametrales Gegenbild in Bezug auf $O$ ersetzen. Aber auch die so entstehenden beiden Kurven, die Herpolhodiekurve der einen und das diametrale Gegenbild der Herpolhodiekurve bei der anderen Poinsotbewegung, sind noch nicht direkt die Polhodie- und Herpolhodiekurve der Relativbewegung. Wir überzeugen uns nämlich leicht, dafs die Drehgeschwindigkeit des Polhodiekegels in der Relativbewegung doppelt so grofs ist wie die Drehgeschwindigkeit in den ursprünglichen Einzelbewegungen. In der That müssen wir den als Polhodiekegel fungierenden Kegel bei der Relativbewegung erst in die Lage des Polhodiekegels bei der Poinsot-Bewegung überdrehen, was durch die Drehung $(-pdt, -qdt, -rdt)$ geschieht und dann in die Lage des als Herpolhodiekegel dienenden Kegels, wozu die Drehung $(p'dt, q'dt, r'dt) = (-pdt, -qdt, -rdt)$ erforderlich ist. Die in der Zeit $dt$ stattfindende Gesamtdrehung beträgt also bei der Relativbewegung $(-2pdt, -2qdt, -2rdt)$; die Winkelgeschwindigkeit ist daher bei richtiger Wahl des Vorzeichens $2\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, d. h. doppelt so grofs wie bei den ursprünglichen Poinsot-Bewegungen.

Nun erhalten wir die Herpolhodie- und Polhodiekurve, indem wir uns auf den betreffenden Kegeln in der Richtung der instantanen Drehaxe die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit abtragen. Wir kommen dabei ersichtlich zu Kurven, welche der Herpolhodiekurve der einen und dem diametralen Gegenbilde der Herpolhodiekurve der anderen unserer konjugierten Poinsot-Bewegungen geometrisch ähnlich und in dem doppelten Mafsstabe angefertigt sind. Es ergiebt sich so:

*Die Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve unserer Relativbewegung entstehen aus den Koordinaten der Herpolhodiekurven der beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen, indem man diese mit* $+2$ *und* $-2$ *multipliziert.*

Wir haben aber oben ausgerechnet, dafs die mit $+2$ und $-2$ multiplizierten Koordinaten der Herpolhodiekurven bei den Poinsot-Bewegungen genau übereinstimmen mit den Koordinaten der Herpolhodie- und Polhodiekurve des schweren Kugelkreisels. Berücksichtigen wir noch, dafs eine Bewegung durch Angabe ihrer Herpolhodie- und Polhodiekurve völlig bestimmt ist, so gewinnen wir das merkwürdige Resultat:

*Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Relativbewegung der zu zwei konjugierten Poinsot-Bewegungen gehörigen inversen Bewegungen.*

Dies ist das eingangs erwähnte, berühmte Jacobische Theorem — allerdings in einer von der ursprünglichen Jacobischen nicht unwesentlich abweichenden Formulierung. Der Zusammenhang, welcher hier zwischen zwei verschiedenen Rotationsproblemen ausgesprochen wird, ist in der That ein überraschender und liegt keineswegs auf der Oberfläche der Dinge.

Um diesen Zusammenhang im Einzelnen noch deutlicher zu verstehen, können wir uns insbesondere fragen: *Was entspricht in den Poinsot-Bewegungen der Figurenaxe des Kugelkreisels, was der Vertikalen?* Die Antwort hierauf lautet einfach so: *Die Impulsaxe der einen Poinsot-Bewegung giebt die Figurenaxe, die der anderen die Vertikale.* Bemerken wir nämlich Folgendes: Die in Rede stehenden transcendenten Kegel sind sämtlich in dem Sinne periodisch, dafs sie, um eine gewisse Axe durch einen gewissen Winkel gedreht, mit sich zur Deckung kommen. Diese „Periodicitätsaxe" ist nun bei dem Herpolhodiekegel der Poinsot-Bewegungen die im Raume feste Axe des Impulses, bei dem Polhodie- und Herpolhodiekegel der Kugelkreisel-Bewegung die Figurenaxe und die Vertikale. Da nun die Kegel wechselweise übereinstimmen, so werden auch ihre „Periodicitätsaxen" zusammenfallen müssen. Die Axe des Impulses der einen Poinsot-Bewegung ist also mit der Vertikalen, die der anderen mit der Figurenaxe des Kugelkreisels identisch.

Aus dem Jacobischen Theorem ergiebt sich weiterhin eine merkwürdig einfache Konstruktion für die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Wir denken uns die Trägheitsellipsoide der beiden konjugierten Kreisel konstruiert und so gestellt, dafs ihre Hauptaxen zusammenfallen. Die Richtung und Gröfse der momentanen Rotation sei nun durch irgendwelchen

vom Nullpunkt auslaufenden Vektor $p, q, r$ gegeben. Darauf konstruieren wir uns zu diesem Vektor die zugehörige Impulsaxe im einen und im anderen Kreisel, d. h. die Geraden $Ap:Bq:Cr$ und $A'p:B'q:C'r$. Rein geometrisch finden wir diese Geraden, indem wir in den Durchstofsungspunkten der Rotationsaxe mit den Trägheitsellipsoiden die Tangentialebenen legen und von $O$ aus auf diese die Lote fällen. Diese beiden Lote geben dann direkt die gegenseitige Lage von Vertikaler und Figurenaxe bei der Bewegung des Kugelkreisels an. Ihr Neigungscosinus wird, wie man sieht, einfach gleich

$$\frac{AA'p^2 + BB'q^2 + CC'r^2}{GG'}.$$

Ein zweiter Beweis ist von F. Caspary*) gegeben. *Diesem folgend, wollen wir jetzt das Jacobische Theorem an den Zusammensetzungsformeln der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verifizieren.*

Unsere beiden Poinsot-Bewegungen seien wie früher durch die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ bestimmt. Die zugehörigen umgekehrten Bewegungen des Raumes sind dann nach pag. 30 durch die folgenden Parameterwerte

$$\delta, -\beta, -\gamma, \alpha \quad \text{und} \quad \delta', -\beta', -\gamma', \alpha'$$

bestimmt. Die Relativbewegung unserer beiden konjugierten Kreisel, d. h. diejenige Drehung, welche den einen Kreisel aus seiner Lage zur Zeit $t$ in die Lage des anderen Kreisels überführt, erhalten wir aber dadurch, dafs wir (1) den einen der beiden Kreisel aus seiner Lage zur Zeit $t$ in seine Anfangslage zurückbringen und (2) aus dieser in die Lage des anderen Kreisels überdrehen. Ebenso ergiebt sich die Relativbewegung der beiden umgekehrten Bewegungen dadurch, dafs wir (1) die eine der beiden umgekehrten Bewegungen, sagen wir die durch $\delta', -\beta', -\gamma', \alpha'$ gegebene rückgängig machen, was durch eine Drehung von den Parametern $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ geschieht und sodann die andere umgekehrte Bewegung $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ ausführen. Wir haben also, um die Relativbewegung der umgekehrten Bewegungen zu erhalten, die folgenden beiden Drehungen nach einander auszuführen:

$$(1)\ \alpha', \beta', \gamma', \delta' \quad \text{und} \quad (2)\ \delta, -\beta, -\gamma, \alpha.$$

Nach den Zusammensetzungsformeln von pag. 32 hat nun die resultierende Drehung, welche in ihrer Wirkung der Aufeinanderfolge der Drehungen (1) und (2) gleichkommt, die folgenden Parameter:

$$\alpha'' = \alpha'\delta - \beta'\gamma, \quad \beta'' = -\alpha'\beta + \beta'\alpha$$
$$\gamma'' = \gamma'\delta - \delta'\gamma, \quad \delta'' = -\gamma'\beta + \delta'\alpha.$$

*) Darboux Bulletin (2) 13, 1889. Hier treten wohl zuerst in der Kreisellitteratur die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf.

Wir wollen zeigen, daſs dieses in der That die Parameter des Kugelkreisels sind.

Zu dem Zwecke haben wir für $\alpha, \beta, \gamma, \delta; \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ihre Ausdrücke in den $\Theta$-Funktionen bei Zugrundelegung der Konstanten $\omega$, $\omega'$, $s$ und $s'$ bez. $\omega$, $\omega'$, $a$ und $b$ einzutragen und haben abermals von den $\Theta$- zu den $\vartheta$-Funktionen überzugehen. Dabei brauchen wir nur beispielsweise $\alpha''$ und $\beta''$ zu berechnen, da sich die beiden anderen Parameter aus diesen durch Vertauschung von $+i$ und $-i$ herleiten lassen.

Für $\alpha''$ erhalten wir nach den Gleichungen (32) von pag. 468 folgende Darstellung:

$$\alpha'' = \sqrt{CC'}\, e^{i(l'-l)t} \frac{\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+2i\omega'-is) + e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-2i\omega'+is'+is)}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Hier stimmt zunächst der Exponentialfaktor mit demjenigen Exponentialfaktor überein, welcher bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels in dem Ausdrucke von $\alpha$ auftrat. In der That haben wir nach Gleichung (11)

$$e^{i(l'-l)t} = e^{-\frac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)}t}.$$

Ferner rechnet man leicht nach, daſs unser $\Theta$-Quotient bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und $2i\omega'$ bez. die Faktoren $+1$ und

$$e^{-\frac{i\pi}{\omega}\frac{is'-is}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(i\omega'-ia)}$$

aufnimmt. Dies sind aber dieselben Faktoren, mit denen sich bei denselben Vermehrungen der $\vartheta$-Quotient

$$\frac{\vartheta(t-ia)}{\vartheta(t-i\omega')}$$

multipliziert. Da auch die Unendlichkeitsstellen in der $t$-Ebene übereinstimmen, muſs unser obiger Ausdruck bis auf eine Konstante diesem $\vartheta$-Quotienten gleich sein. Eben dieser $\vartheta$-Quotient trat aber auch in dem Ausdruck des Parameters $\alpha$ bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels auf. Daſs schlieſslich auch die multiplizierenden Konstanten in den beiden verglichenen Ausdrücken übereinstimmen, wollen wir ohne Beweis erwähnen.

Was sodann den Wert von $\beta''$ betrifft, so haben wir

$$\beta'' = \sqrt{CC'}\, e^{i\left(l+l'+\frac{\pi}{2\omega}\right)t}$$

$$\cdot \frac{-e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is)}\,\Theta(t-2i\omega'+is')\,\Theta(t+is) + e^{\frac{i\pi}{2\omega}(-i\omega'+is')}\,\Theta(t+is')\,\Theta(t-2i\omega'+is)}{\Theta(t-i\omega')\,\Theta(t+i\omega')}.$$

Wiederum ändert sich der rechts stehende Bruch nur um gewisse konstante Faktoren, wenn wir eine der Perioden zu $t$ hinzufügen, nämlich um die Faktoren $+1$ bez.

$$-e^{-\frac{i\pi}{\omega}\left(-i\omega'+\frac{is+is'}{2}\right)} = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(-\omega+ib-i\omega')}$$

Dieselben Faktoren nimmt aber auch der folgende $\vartheta$-Quotient auf.

$$\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t+i\omega')} = -e^{\frac{i\pi t}{\omega}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Mithin wird $\beta''$ unter Berücksichtigung der Gleichungen (11) dem nachstehenden Ausdrucke proportional werden:

$$e^{i\left(l+l'+\frac{3\pi}{2\omega}\right)t}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')} = e^{-\frac{\vartheta'(\omega+i\omega'+ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'+ib)}}\frac{\vartheta(t-\omega+ib)}{\vartheta(t-i\omega')}.$$

Dies ist aber der variable Bestandteil des Wertes von $\beta$ bei der Bewegung des schweren Kugelkreisels. Endlich stimmt auch der konstante Proportionalitätsfaktor überein, was wir jedoch nicht ausdrücklich beweisen wollen.

Somit ist die Identität der Parameter $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\delta''$ unserer Relativbewegung mit den Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des schweren Kugelkreisels dargethan, worin ein abermaliger und durchsichtigerer Beweis des Jacobischen Theorems liegt. —
Beweis des Jacobischen Theorems liegt. —

Die hier gegebene Formulierung des Jacobischen Theorems ist, wie erwähnt, von der ursprünglichen Jacobischen*) etwas verschieden. Jacobi zerlegt nämlich die einzelne Poinsot-Bewegung in einen periodischen und einen nicht-periodischen Bestandteil oder, wie wir vielleicht nach Analogie mit Früherem sagen dürfen, in einen Nutations- und einen Präcessions-Bestandteil. Der Präcessions-Bestandteil führt, für sich betrachtet, den Körper mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Impulsaxe herum und wird so eingerichtet, dafs der übrigbleibende Nutations-Bestandteil eine rein periodische in sich zurücklaufende Bewegung darstellt. Die Präcessionsgeschwindigkeit wird dabei durch die Konstante $l$ (sie ist $2l+\frac{\pi}{2\omega}$), die Nutationsbewegung durch die in der Darstellung der Poinsot-Bewegung auftretenden $\vartheta$-Quotienten gegeben. Jacobi denkt sich nun den Präcessions-Bestandteil dadurch herausgeschafft, dafs er die Bewegung auf ein im Raume bewegliches Axenkreuz $xyz$ bezieht, welches mit der Präcessionsgeschwindigkeit $l$ um die (mit der Impulsaxe zusammenfallende) $z$-Axe gleichförmig rotiert. An diesem Axenkreuz gemessen ist die Bewegung eine reine, periodisch wiederkehrende Nutation. Indem Jacobi gleicher Weise die konjugierte Poinsot-Bewegung von ihrem Präcessions-Bestandteil befreit, fragt er

*) Ges. Werke Bd. II pag. 480.

nach der Relativbewegung der beiden konjugierten Nutationen und findet, dafs diese mit der Nutationsbewegung des schweren symmetrischen Kreisels identisch ist. (Jacobi kann hier den symmetrischen Kreisel an Stelle des Kugelkreisels setzen, da die Bewegungen beider, wie wir wissen, sich (vgl. pag. 234) nur in der Drehung um die Figurenaxe unterscheiden, die mit dem Präcessionsbestandteil des einen der beiden konjugierten Kreisel äquivalent ist, in ihrem Nutations-Bestandteile dagegen gleich sind.) Offenbar ist unsere Formulierung des Jacobischen Theorems einfacher und weitergehend als die Jacobische, da sie Nutation und Präcession gleichzeitig berücksichtigt, allerdings auch enger, insofern sie in dieser Fassung auf den Kugelkreisel beschränkt werden muß.

Auch im Beweise sind wir erheblich von Jacobi abgewichen. Jacobi beschreibt die Lage des $XYZ$- gegen das $xyz$-System in den beiden konjugierten Poinsot-Bewegungen durch die neun Richtungscosinusse $a, \ldots c''$, d. h. durch die Koeffizienten derjenigen ternären Substitution, welche die Koordinaten $XYZ$ in die $xyz$ überführt. Bei der Aufsuchung der Relativbewegung mufs er daher *zwei ternäre* Substitutionen zusammensetzen und die $3 \times 3 = 9$ Koeffizienten der resultierenden Substitution berechnen. Demgegenüber besteht die Vereinfachung bei dem von uns zuletzt gegebenen Beweise darin, dals wir statt der ternären *zwei binäre* Substitutionen zusammensetzten und nur die $2 \times 2 = 4$ Koeffizienten der resultierenden Drehung nötig hatten. Übrigens ist der Beweis von Jacobi selbst in seinen hinterlassenen Papieren nur angedeutet; er wurde erst nach seinem Tode von Lottner*) ausgeführt.

Die Möglichkeit, das Jacobische Theorem in dem hier gemeinten Sinne zu vervollständigen, d. h. die konjugierten Poinsot-Bewegungen direkt ohne vorherige Absonderung der Präcessions-Bestandteile zusammenzusetzen, ist wohl zuerst von Halphen**) bemerkt worden.

Einen sehr einfachen elementaren Beweis giebt Hr. Darboux***) von dem Jacobischen Theorem. Darboux fragt geradezu nach der Kraft, welche zur kinetischen Realisierung unserer Relativbewegung erforderlich ist und findet, dafs diese mit der Schwerkraft identisch ist. Einen ähnlichen Gedankengang schlägt wenig später Herr Routh†) ein.

*) Vgl. Jacobis ges. Werke, Bd. II, pag. 510 u. ff. 1850 hat Jacobi den Satz ohne Beweis in den Monatsberichten der Berliner Akademie mitgeteilt.

**) Comptes Rendues, Bd. 100, pag. 1065—1068.

***) Journ. de Liouville 1885 in der pag. 234 cit. Arbeit; vgl. auch die Noten XVIII und XIX zum Cours de Mécanique von Despeyrous-Darboux Bd. II.

†) Quaterly Journal of Mathem. vol. XXIII 1888. On a theorem of Jacobi in dynamics. Vgl. auch Bd. II der Rigid dynamics desselben Verf., art. 174, 175 und 206.

Auf die sonstigen Arbeiten, die sich mit dem Jacobischen Theorem befassen (Padova in den Atti d. Acad. di Torino, vol. XIX 1884 und Atti d. R. Istit. di Veneto, vol. III 1892; Halphen, Fonctions Elliptiques, Bd. II, Cap. 2 und 3, A. de Saint-Germain in der pag. 115 citierten Monographie) können wir hier nicht eingehen.

## § 9. Die Lagrangeschen Gleichungen für die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des schweren Kugelkreisels und ihre direkte Integration. Zusammenhang zwischen der Bewegung des Kugelkreisels und einem Probleme der Punktmechanik.

Nachdem sich im Vorhergehenden unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ in mannigfacher Beziehung so ausgezeichnet bewährt haben, werden wir uns in diesem abschliefsenden Paragraphen fragen, ob wir ihnen nicht in der Theorie des schweren Kugelkreisels eine noch centralere Stellung dadurch verleihen können, dafs wir sie von vornherein bei der Aufstellung der Differentialgleichungen und deren Integration zu Grunde legen. Es hat ja etwas Unbefriedigendes, dafs wir diese Parameter erst gegen Ende der Theorie (in diesem Kapitel) ausgiebig gebraucht haben, während wir die ursprüngliche Integration mit den Eulerschen Winkeln $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ bewerkstelligten. Demgegenüber wollen wir nun zeigen, dafs die Differentialgleichungen der Bewegung des schweren Kugelkreisels, in den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ geschrieben, eine überraschend einfache Gestalt annehmen und dafs sich das ganze Integrationsgeschäft bei konsequenter Benutzung unserer Parameter sehr viel eleganter und kürzer wie bei der früheren Methode gestaltet und mit einem Schlage zu der definitiven Darstellung der Bewegung durch $\vartheta$-Quotienten führt.

Der Umstand, dafs wir diese Entwickelungen erst jetzt bringen, und dafs wir uns bisher mit schwerfälligeren analytischen Methoden begnügt haben, liegt lediglich in der Anordnung des Stoffes, nicht in der Natur der Sache begründet. Die folgenden Betrachtungen setzen nämlich einige Vorkenntnisse aus der Theorie der elliptischen Funktionen voraus, die erst in diesem Kapitel vorbereitet werden konnten. Nur aus diesem Grunde haben wir bisher auf die konsequente Verwertung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ verzichtet.

Noch nach anderer Richtung hin sind die folgenden Ausführungen bemerkenswert. Wir werden nämlich die Bewegung des schweren Kugelkreisels mit der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes im Raume von vier Dimensionen in Zusammenhang bringen, so wie wir sie im vorigen Paragraphen mit der kräftefreien Bewegung des unsymmetrischen

Kreisels verglichen haben. Dabei ist der hier gemeinte Zusammenhang ein durchgreifender, auch in kinetischer Hinsicht gültiger, während der von Jacobi entdeckte vorwiegend kinematischer Natur war.

Gleichzeitig werden wir Gelegenheit haben, einen Ausblick in eine eigentümliche, eventuell mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme im Sinne der Punktmechanik zu nehmen, für welche unsere Behandlung des Kugelkreisels ein vorzüglich einfaches Beispiel darbietet.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bilden die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen des schweren Kugelkreisels. Es wurde bereits pag. 155 die wunderbare Thatsache betont, dafs die Form dieser Gleichungen für alle möglichen Koordinaten, durch welche wir die Lage eines mechanischen Systems beschreiben mögen, dieselbe bleibt. Die Bewegungsgleichungen leiten sich allemal aus dem Ausdrucke $T$ der lebendigen Kraft und dem Ausdrucke $dA$ der Arbeit bei einer unendlich kleinen Verrückung (bez. aus der potentiellen Energie $V$) nach ein und derselben Regel ab. Wie pag. 158 erwähnt, bleibt das Lagrangesche Schema sogar im Wesentlichen bestehen, wenn man die Lage des Systems durch überzählige Koordinaten festlegt, d. h. durch Gröfsen, welche mittelst einer (oder mehrerer) Relationen $F = \text{const.}$ (bez. $F_1, F_2, \ldots = \text{const.}$) verknüpft sind. Man hat dann nur statt $T$ den Ausdruck $T + \lambda F$ (bez. $T + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots$) zu benutzen, wo die „Lagrangeschen Multiplikatoren" $\lambda$ so zu bestimmen sind, dafs die Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen verträglich werden.

Diese Regel wollen wir jetzt benutzen, um die Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, auf welche schon pag. 158 hingewiesen wurde, anzuschreiben. Verstehen wir unter $[\mathsf{A}], [\mathsf{B}], [\Gamma], [\Delta]$ die Komponenten des Impulses, unter $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ die Komponenten der äufseren Kraft, welche zu den Lagenkoordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehören, so haben wir ohne Weiteres:

$$(1)\quad \begin{cases} [\mathsf{A}] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \alpha'}, & [\mathsf{B}] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \beta'}, & [\Gamma] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \gamma'}, & [\Delta] = \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \delta'}, \\ \mathsf{A} = -\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, & \mathsf{B} = -\dfrac{\partial V}{\partial \beta}, & \Gamma = -\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}, & \Delta = -\dfrac{\partial V}{\partial \delta}. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \alpha} = \mathsf{A}, \\ \dfrac{d[\mathsf{B}]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \beta} = \mathsf{B}, \\ \dfrac{d[\Gamma]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \gamma} = \Gamma, \\ \dfrac{d[\Delta]}{dt} - \dfrac{\partial(T+\lambda F)}{\partial \delta} = \Delta, \end{cases}$$

Die Bedeutung der hier benutzten Gröſsen ist folgende: Zunächst lautet die Bedingungsgleichung, welche die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ verknüpft, wie wir wissen,

$$(3) \qquad F = \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Sodann ist die potentielle Energie $V = P\cos\vartheta$. Da nach den Definitionsgleichungen (8) von pag. 21 $\cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma$, so haben wir, in den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ geschrieben,

$$(4) \qquad V = P(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Bei der Berechnung der kinetischen Energie $T$ des Kugelkreisels gehen wir von dem Ausdrucke

$$T = \frac{A}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$$

aus, wollen aber, um Zweideutigkeiten in der Bezeichnung zu vermeiden, im Folgenden statt $A$ lieber $\frac{M}{2}$ schreiben. Benutzen wir für $p + iq$, $-p + iq$, $r$ die Werte aus den Gleichungen (5) von pag. 43, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} T &= M\{(\beta\delta' - \delta\beta')(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') - (\gamma\beta' - \alpha\delta')(\delta\alpha' - \beta\gamma')\}, \\ &= M\{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')\}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung $F = 1$ gewinnen wir also den auſserordentlich einfachen Wert:

$$(5) \qquad T = M(\alpha'\delta' - \beta'\gamma').$$

Wegen der angegebenen Werte von $F$, $V$ und $T$ gehen die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden über:

$$(6) \qquad \begin{cases} [\mathsf{A}] = M\delta', & [\mathsf{B}] = -M\gamma', \quad [\Gamma] = -M\beta', \quad [\Delta] = M\alpha', \\ \mathsf{A} = -P\delta, & \mathsf{B} = -P\gamma, \quad \Gamma = -P\beta, \quad \Delta = -P\alpha, \\ \frac{d[\mathsf{A}]}{dt} - \lambda\delta = \mathsf{A}, & \frac{d[\mathsf{B}]}{dt} + \lambda\gamma = \mathsf{B}, \quad \frac{d[\Gamma]}{dt} + \lambda\beta = \Gamma, \quad \frac{d[\Delta]}{dt} - \lambda\alpha = \Delta. \end{cases}$$

Eliminieren wir aus (6) die Impuls- und Kraftkomponenten, so haben wir, indem wir die Gleichungen in der umgekehrten Reihenfolge schreiben:

$$(7) \qquad \begin{cases} M\alpha'' - \lambda\alpha = -P\alpha, \\ M\beta'' - \lambda\beta = +P\beta, \\ M\gamma'' - \lambda\gamma = +P\gamma, \\ M\delta'' - \lambda\delta = -P\delta. \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

*Dies sind die überaus einfachen und symmetrischen Bewegungsgleichungen des schweren Kugelkreisels in den* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Wir kommen später auf diese Differentialgleichungen ausführlich zurück. Zunächst wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und die vorstehenden Gleichungen in ihren reellen und imaginären Teil auflösen, indem wir von den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu den Quaternionengröfsen $A, B, C, D$ übergehen. Da nach pag. 21

$$\alpha = D + iC, \quad \beta = -B + iA,$$
$$\gamma = B + iA, \quad \delta = D - iC,$$

so ergiebt sich:

$$(8) \qquad \begin{cases} MA'' - \lambda A = + PA, \\ MB'' - \lambda B = + PB, \\ MC'' - \lambda C = - PC, \\ MD'' - \lambda D = - PD, \end{cases} \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Die somit erhaltenen *Lagrangeschen Differentialgleichungen des schweren Kugelkreisels in den* $A, B, C, D$ sind, wie man sieht, in ihrer Bauart von den vorhergehenden Gleichungen nicht verschieden; nur die Form der Bedingungsgleichung erscheint geändert.

Diese Gleichungen legen nun eine Deutung der Kreiselbewegung im Sinne der Punktmechanik des vierdimensionalen Raumes aufserordentlich nahe.

Wir wollen die ihrer Definition nach reellen Gröfsen $A, B, C, D$ als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten im Raume von vier Dimensionen auffassen und zwar denken wir an einen vierdimensionalen Raum, der die genaue Verallgemeinerung unseres gewöhnlichen Euklidischen dreidimensionalen Raumes bildet. Wir werden also insbesondere in unserem vierdimensionalen Raume den Pythagoräischen Lehrsatz zur Anwendung bringen und dementsprechend die Entfernung zweier Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2$ durch den Ausdruck messen:

$$\sqrt{(A_2 - A_1)^2 + (B_2 - B_1)^2 + (C_2 - C_1)^2 + (D_2 - D_1)^2}.$$

In diesem Raume soll nun die „Bewegung“ eines Punktes von der Masse $M$ untersucht werden; das Quadrat der Geschwindigkeit dieses Punktes werden wir nach dem eben Gesagten gleich

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

setzen; seine kinetische Energie wird mithin sein:

$$(9) \qquad T = \frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$

Ferner wollen wir annehmen, dafs unser Punkt einer äufseren Kraft unterliegt, deren potentielle Energie an der Stelle $A, B, C, D$ des vierdimensionalen Raumes gleich ist:

Wir kommen später auf diese Differentialgleichungen ausführlich zurück. Zunächst wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und die vorstehenden Gleichungen in ihren reellen und imaginären Teil auflösen, indem wir von den $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zu den Quaternionengröſsen $A$, $B$, $C$, $D$ übergehen. Da nach pag. 21

$$\alpha = D + iC, \quad \beta = -B + iA,$$
$$\gamma = B + iA, \quad \delta = D - iC,$$

so ergiebt sich:

$$(8) \qquad \begin{cases} MA'' - \lambda A = +PA, \\ MB'' - \lambda B = +PB, \\ MC'' - \lambda C = -PC, \\ MD'' - \lambda D = -PD, \end{cases} \qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Die somit erhaltenen *Lagrangeschen Differentialgleichungen des schweren Kugelkreisels in den* $A$, $B$, $C$, $D$ sind, wie man sieht, in ihrer Bauart von den vorhergehenden Gleichungen nicht verschieden; nur die Form der Bedingungsgleichung erscheint geändert.

Diese Gleichungen legen nun eine Deutung der Kreiselbewegung im Sinne der Punktmechanik des vierdimensionalen Raumes auſserordentlich nahe.

Wir wollen die ihrer Definition nach reellen Gröſsen $A$, $B$, $C$, $D$ als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten im Raume von vier Dimensionen auffassen und zwar denken wir an einen vierdimensionalen Raum, der die genaue Verallgemeinerung unseres gewöhnlichen Euklidischen dreidimensionalen Raumes bildet. Wir werden also insbesondere in unserem vierdimensionalen Raume den Pythagoräischen Lehrsatz zur Anwendung bringen und dementsprechend die Entfernung zweier Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$; $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ durch den Ausdruck messen:

$$\sqrt{(A_2 - A_1)^2 + (B_2 - B_1)^2 + (C_2 - C_1)^2 + (D_2 - D_1)^2}.$$

In diesem Raume soll nun die „Bewegung" eines Punktes von der Masse $M$ untersucht werden; das Quadrat der Geschwindigkeit dieses Punktes werden wir nach dem eben Gesagten gleich

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

setzen; seine kinetische Energie wird mithin sein:

$$(9) \qquad T = \frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).$$

Ferner wollen wir annehmen, daſs unser Punkt einer äuſseren Kraft unterliegt, deren potentielle Energie an der Stelle $A$, $B$, $C$, $D$ des vierdimensionalen Raumes gleich ist:

$$V = \frac{P}{2}(-A^2 - B^2 + C^2 + D^2). \tag{10}$$

Endlich soll der Punkt gezwungen sein, auf der um den Koordinatenanfang geschlagenen „Einheitskugel" zu verbleiben, d. h. sein Abstand vom Koordinatenanfang soll beständig gleich 1 sein. Dies bedeutet zufolge unserer obigen Festsetzung über das Mafs der Entfernungen im vierdimensionalen Raume, dafs beständig die Bedingungsgleichung erfüllt sein soll

$$F = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1. \tag{11}$$

Unter der „Bewegung" des Punktes im Raume von vier Dimensionen verstehen wir dabei nichts anderes als den Inbegriff solcher Koordinatenänderungen, welche den um eine Zeile vermehrten Differentialgleichungen für die Bewegung des Punktes im Raume von drei Dimensionen genügen.

Das vierdimensionale Bewegungsproblem, welches hierdurch definiert ist, können wir kurz bezeichnen als *die Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einflufs des durch* (10) *charakterisierten Kraftsystems.**)

Bilden wir nun die Differentialgleichungen dieses sphärischen Pendels etwa nach Analogie mit den bekannten Lagrangeschen Gleichungen erster Art im Falle der dreidimensionalen Punktmechanik, so ergeben sich genau die Gleichungen (8). Wir können also sagen:

*Die Bewegung des schweren Kugelkreisels ist identisch mit der Bewegung eines sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen unter dem Einflufs des vorher angegebenen Kraftsystems.*

Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir den Punkt der vierdimensionalen Kugel, dessen rechtwinklige Koordinaten jeweils gleich den Quaternionenparametern des Kugelkreisels sind, den *Repräsentanten* der Kreiselbewegung nennen und wollen uns von der

*) Das *genaue Analogon* des dreidimensionalen sphärischen Pendels im Raume von vier Dimensionen wäre offenbar die Bewegung eines Massenpunktes auf der Einheitskugel in einem Kraftfelde, dessen potentielle Energie einer der Koordinaten $A$, $B$, $C$, $D$ proportional ist oder, etwas allgemeiner, nur von einer dieser Koordinaten abhängt. Die Niveauflächen dieses Kraftfeldes bestehen aus einem System paralleler (dreifach ausgedehnter) „Ebenen" des vierdimensionalen Raumes, ebenso wie die Niveauflächen der Schwere im Raume von drei Dimensionen aus dem Systeme der sämtlichen Horizontalebenen bestehen, während die Niveauflächen unseres Kraftfeldes (10) ein System von Flächen zweiten Grades darstellen.

Natürlich ist dieser, dem sphärischen Pendel im engeren Sinne analoge Kreisel integrabel. Er gehört in der von Herrn Liebmann (Math. Ann. Bd. 50, pag. 65) gegebenen Liste zu dem als reell hervorgehobenen Falle (5), bei welchem

$$V = f(\beta - \gamma) = f(2B)$$

vorausgesetzt wird.

Um sodann den Satz der lebendigen Kraft von Neuem zu gewinnen, multiplizieren wir die Gleichungen (8) der Reihe nach mit $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ und addieren.

Berücksichtigen wir, dafs nach Gleichung (11)

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0 \tag{13}$$

ist, so ergiebt sich

$$M(A'A'' + B'B'' + C'C'' + D'D'') = P(AA' + BB' - CC' - DD').$$

Wiederum stehen rechts und links vollständige Differentialquotienten. Wir integrieren daher und finden, unter $h$ die Integrationskonstante verstanden:

$$\frac{M}{2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = \frac{P}{2}(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) + h \tag{14}$$

oder, wenn wir die Abkürzungen aus den Gleichungen (9) und (10) benutzen

$$T + V = h.$$

Wir sind somit zum Satze der lebendigen Kraft gelangt und zwar genau durch denjenigen Prozefs, den man in der Mechanik des einzelnen Punktes bei Rechnungen mit rechtwinkligen Koordinaten anzuwenden gewöhnt ist. Um diesen Satz im Sinne der vierdimensionalen Punktmechanik zu deuten, berücksichtigen wir, dafs $T$ dem Quadrat der Geschwindigkeit des Repräsentanten proportional ist; wir können dann etwa sagen:

*Unser Repräsentant passiert bei seiner Bewegung die einzelne Niveaufläche* $V =$ const. *stets mit der gleichen Geschwindigkeit, welche sich aus der Konstanten* $h$, *der Masse* $M$ *und dem Werte des zu der betr. Niveaufläche gehörigen Potentiales* $V$ *nach der letzten Formel leicht berechnen läfst.*

Schliefslich wollen wir noch die Gröfse des Lagrangeschen Multiplikators $\lambda$ berechnen. Dieser giebt uns den „Druck" an, welchen unser Massenpunkt auf die ihn führende Kugelfläche in radialer Richtung ausübt, oder, wenn wir wollen, die Spannung des von $O$ auslaufenden Armes, an dessen Ende unser Massenpunkt befestigt ist. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die Gleichungen (8) der Reihe nach mit $A$, $B$, $C$, $D$ und addieren. Dabei ergiebt sich wegen der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

$$\lambda = M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') - P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2).$$

Es ist aber nach Gleichung (13)

$$AA'' + BB'' + CC'' + DD'' = -(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2),$$

also mit Rücksicht auf (14)

$$M(AA'' + BB'' + CC'' + DD'') = -P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h.$$

Der angegebene Wert von $\lambda$ reduziert sich daher auf

(15) $$\lambda = -2P(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - 2h = 4V - 2h.$$

Dieses Ergebnis wollen wir folgendermaſsen als Satz aussprechen:

*Beim Durchgange durch die gleiche Niveaufläche* $V =$ const *drückt der Repräsentant stets mit der gleichen Stärke* $\lambda = 4V - 2h$ *senkrecht gegen die ihn tragende Kugelfläche.*

Wir gehen nun dazu über, die oben angekündigte Revision unseres früheren Integrationsverfahrens zu geben. Wir werden geradezu, indem wir von den Differentialgleichungen der $A, B, C, D$ bez. der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausgehen, in gröſster Kürze eine vollständige und neue analytische Theorie der Kreiselbewegung entwickeln, ohne die früheren Resultate als bekannt vorauszusetzen.

Durch die Gleichungen (12)—(15) ist der Anfang des Integrationsprozesses in den Quaternionengröſsen $A, B, C, D$ bereits gemacht. Zur Weiterführung benutzen wir die Hülfsgröſse

(16) $$u = -A^2 - B^2 + C^2 + D^2$$

und versuchen diese als Funktion von $t$ auszudrücken. Hierzu dienen folgende Rechnungen.

Wir bilden

$$u' = 2(-AA' - BB' + CC' + DD')$$

und kombinieren diese Gleichung mit (13), wobei sich ergiebt:

(17) $$\begin{cases} AA' + BB' = -\dfrac{u'}{4}, \\ CC' + DD' = +\dfrac{u'}{4}. \end{cases}$$

Darauf quadrieren und summieren wir die erste dieser Gleichungen und der Gleichungen (12) und finden:

(18) $$(A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2) = \frac{M^2u'^2 + 4(n + N)^2}{16M^2}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten der Gleichungen (17) und (12)

(18') $$(C^2 + D^2)(C'^2 + D'^2) = \frac{M^2u'^2 + 4(n - N)^2}{16M^2}.$$

Ferner haben wir wegen der Definition von $u$ und der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$:

(19) $$\begin{cases} A^2 + B^2 = \dfrac{1 - u}{2}, \\ C^2 + D^2 = \dfrac{1 + u}{2}, \end{cases}$$

so daſs wir statt (18) auch schreiben können:

$$A'^2 + B'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n + N)^2}{8 M^2 (1 - u)}$$

$$C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n - N)^2}{8 M^2 (1 + u)}$$

und

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2 = \frac{M^2 u'^2 + 4(n^2 + N^2) + 8 n N u}{4 M^2 (1 - u^2)}.$$

Mit diesem Werte gehen wir in die Gleichung der lebendigen Kraft hinein.

*Wir erhalten dann:*

$$u'^2 = U,$$

*wo $U$ folgende Bedeutung hat:*

$$(20)\quad U = \frac{4}{M^2}\{2 Mh(1 - u^2) - (n^2 + N^2 + 2nNu) - MPu(1 - u^2)\};$$

hiernach bestimmt sich $t$ durch das elliptische Integral

$$(21)\qquad t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Die untere Grenze $e$ des Integrals denken wir uns in einen der Wurzelwerte von $U = 0$ gelegt. Die beiden anderen Wurzelwerte seien $e'$ und $e''$. Wir führen sogleich die folgenden Bezeichnungen für einige charakteristische Werte von $t$ ein:

$$(21')\quad \omega = \int_e^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad i\omega' = \int_e^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ia = \int_e^{-1} \frac{du}{\sqrt{U}},\quad ib = \int_{e'}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Kehren wir die in (21) enthaltene Beziehung zwischen $t$ und $u$ um, so ergiebt sich $u$ als eine doppeltperiodische Funktion von $t$ mit den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$. Somit haben wir unsere früheren Entwickelungen den neuen Bezeichnungen angepaſst.

Nunmehr gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen (7) für die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zurück, welche für das Folgende doch bequemer sind, wie die in den Quaternionengröſsen geschriebenen Gleichungen (8), wie sich später zeigen wird. Hier tragen wir den Wert von $\lambda$ aus Gleichung (15) ein und denken uns $u$ als doppeltperiodische Funktion von $t$ berechnet. Wir erhalten so:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(\dfrac{2P}{M} u(t) - \dfrac{2h - P}{M}\right)\alpha, \\ \dfrac{d^2\beta}{dt^2} = \left(\dfrac{2P}{M} u(t) - \dfrac{2h + P}{M}\right)\beta. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen für die beiden anderen Parameter $\gamma$ und $\delta$ sind den angegebenen genau gleich.

Unser Problem hängt somit von der Lösung dieser *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten* ab. Über solche Gleichungen mögen zunächst einige historische Notizen Platz finden.

Die vorstehenden Differentialgleichungen gehören zu einem Gleichungstypus, welcher in der Litteratur vielfach studiert worden ist. Wir bezeichnen sie als *Lamésche Gleichungen*, da sie Verallgemeinerungen derjenigen Differentialgleichungen darstellen, welche zuerst von Lamé bei einer Aufgabe der Wärmeleitung behandelt worden sind. Gegenüber den allgemeinsten Gleichungen, welche Lamés Namen tragen, sind unsere Differentialgleichungen durch die wichtige Eigenschaft ausgezeichnet, dafs ihre Integrale eindeutige Funktionen von $t$ sind. Solche Gleichungen sind ganz besonders von Hermite und zwar gerade im Anschlufs an die Rotationsprobleme (s. unten) untersucht worden. Es ist daher berechtigt, diese Gleichungen allgemein mit Hermites Namen zu belegen und sie als den *Hermiteschen Fall der Laméschen Gleichungen* zu bezeichnen.

Aus der Form der Differentialgleichung kann man das Statthaben des Hermiteschen Falles nach allgemeinen Regeln folgendermafsen entscheiden. Man suche die singulären Stellen der Differentialgleichung — wir handeln zunächst von der Gleichung für $\alpha$ — d. h. diejenigen Punkte der $t$-Ebene auf, an denen in der Entwickelung der Integrale andere als ganzzahlige Potenzen vorkommen. Diese singulären Punkte sind in unserem Falle mit den Unendlichkeitsstellen des Koeffizienten von $\alpha$ identisch, welche keine anderen sind, wie die Unendlichkeitsstellen der Funktion $u(t)$, d. h. wie die Stellen

$$t = i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'.$$

Darauf mache man eine Potenzentwickelung an einer dieser Stellen, z. B. an der Stelle $t = i\omega'$ und setze

$$\alpha = a_0(t - i\omega')^{-n} + a_1(t - i\omega')^{-n+1} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten der Entwickelung und der Exponent $n$ aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Für $\frac{\alpha''}{\alpha}$ ergiebt sich dabei eine Reihe, welche mit dem Terme

$$\frac{n(n+1)}{(t - i\omega')^2}$$

beginnt. Desgleichen entwickele man den Koeffizienten von $\alpha$ in eine nach Potenzen von $t - i\omega'$ fortschreitende Reihe, welche mit der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz beginnen wird. Das erste Glied dieser Reihe werde mit

$$\frac{m}{(t - i\omega')^2}$$

bezeichnet, ($m$ = „Multiplikator des Unendlichwerdens“). Alsdann bestimmt sich $n$ aus der Gleichung

$$n(n+1) = m. \tag{23}$$

Sollen nun die Integrale unserer Differentialgleichung eindeutige Funktionen von $t$ werden, so mufs offenbar $n$ eine ganze Zahl sein. Die vorstehende Gleichung giebt uns daher, umgekehrt gelesen, eine Bedingung, welcher der Multiplikator $m$ im Hermiteschen Falle genügen mufs. Wir sehen also:

*Das Statthaben des Hermiteschen Falles läfst sich aus der Differentialgleichung heraus dadurch beurteilen, dafs man den Multiplikator $m$ aufsucht, mit welchem der Koeffizient von $\alpha$ an der Stelle $t = i\omega'$ und an den äquivalenten Stellen unendlich wird. Dieser Multiplikator mufs die Form $n(n+1)$ haben, unter $n$ eine ganze positive Zahl verstanden.*

Die eben genannte Bedingung ist hier nur als notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit der Integrale abgeleitet; dafs sie zugleich die hinreichende Bedingung dafür darstellt, ist auf Grund der Parallelogrammeinteilung der $t$-Ebene nicht schwer zu sehen, soll aber hier übergangen werden.

Wir überzeugen uns nun leicht, dafs unser Kriterium bei den Gleichungen (22) erfüllt ist. Wir betrachten zu dem Zwecke das Integral

$$t - i\omega' = \int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{U}};$$

substituieren wir $u = \frac{1}{v}$ und entwickeln $U^{-\frac{1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von $v$, so ergiebt sich nach Ausführung der Integration in erster Annäherung

$$t - i\omega' = -\sqrt{\frac{Mv}{P}} = -\sqrt{\frac{M}{Pu}},$$

also umgekehrt

$$u = \frac{M}{P} \frac{1}{(t - i\omega')^2}. \tag{24}$$

Führt man die Rechnung ein Glied weiter, so erhält man, wie wir des Späteren wegen hinzufügen, in derselben Weise:

$$u = \frac{M}{P} \frac{1}{(t - i\omega')^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{M} (t - i\omega')^2\right). \tag{24'}$$

Aus Gleichung (24) bestimmt sich der Multiplikator, von welchem oben die Rede war, unmittelbar. Wir haben einfach

$$m = \frac{2P}{M} \cdot \frac{M}{P} = 2;$$

aus Gleichung (23) folgt daher

$$n = 1.$$

Wir können hiernach sagen:

*In den Gleichungen* (22) *liegt wirklich der* **Hermitesche Fall der** *Laméschen Gleichung vor, und zwar das einfachste Vorkommnis* **desselben,** *der Unterfall* $n = 1$.

Die Integrale der Hermite-Laméschen Gleichung sind nun, zumal in dem einfachsten Falle $n = 1$, sofort hingeschrieben. Man überzeugt sich zunächst, dafs, da die Differentialgleichung bei Vermehrung von $t$ um $2\omega$ und $2i\omega'$ völlig ungeändert bleibt, auch ihre Integrale gegenüber Vermehrungen des Argumentes um Perioden ein sehr einfaches Verhalten zeigen müssen. Nennt man nämlich zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $z_1(t)$ und $z_2(t)$, so mufs sich $z_1(t + 2\omega)$, $z_1(t + 2i\omega')$ (und ebenso $z_2(t + 2\omega)$, $z_2(t + 2i\omega')$) aus $z_1$ und $z_2$ linear zusammensetzen lassen. Durch spezielle Auswahl der partikulären Lösungen $z_1$ und $z_2$ kann man sogar erreichen, dafs $z_1(t + 2\omega)$ und $z_1(t + 2i\omega')$ direkt mit $z_1(t)$ proportional wird, so dafs also

$$z_1(t + 2\omega) = \varrho\, z_1(t), \quad z_1(t + 2i\omega') = \sigma\, z_1(t)$$

wird. Entsprechend läfst sich die andere partikuläre Lösung $z_2$ wählen. Das Verhalten dieser Partikular-Lösungen gegenüber wiederholten Periodenzuwächsen ist hiernach klar.

Nun bezeichneten wir eindeutige Funktionen von $t$, welche sich bei Vermehrung des Arguments um Perioden in dieser Weise „multiplikativ“ verhalten, allgemein als elliptische Funktionen zweiter Art. Dieselben können, wie wir wissen, als Produkt eines Exponentialfaktors und eines $\vartheta$-Quotienten dargestellt werden, wobei so viele $\vartheta$-Funktionen im Zähler und Nenner auftreten, als der Grad der Funktion, d. h. die Anzahl der im einzelnen Periodenrechteck gelegenen Unendlichkeitsstellen beträgt. Diese Anzahl ist im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung überdies von vornherein bekannt. Wir sahen nämlich, dafs, wenn $m = n(n + 1)$ ist, eine und nur eine $n$-fache Unendlichkeitsstelle bei $t = i\omega'$ (und den äquivalenten Punkten) vorhanden war. Die aus dem Multiplikator $m$ zu bestimmende Zahl $n$ giebt also direkt den Grad der elliptischen Funktionen an. Wir gewinnen also das folgende Resultat:

*Die Hermite-Lamésche Gleichung wird allgemein durch elliptische Funktionen zweiter Art $n^{ten}$ Grades integriert. In dem hier vorliegenden einfachsten Falle $n = 1$ reichen wir insbesondere mit elliptischen Funktionen zweiter Art ersten Grades aus.*

Wir bemerken ferner, dafs unsere Differentialgleichung bei Vertauschung von $t$ mit $-t$ völlig ungeändert bleibt. Daraus folgt, dafs

zugleich mit $z(t)$ immer auch $z(-t)$ ein Integral der Differentialgleichung darstellt. Ist insbesondere $z(t)$ als eine der multiplikativen partikulären Lösungen gewählt, so ist auch $z(-t)$ eine multiplikative Lösung, welche im allgemeinen von $z(t)$ verschieden ist. *Wir können also die im Vorstehenden genannten Lösungen $z_1$ und $z_2$ bez. gleich setzen:*

$$z_1 = z(t), \quad z_2 = z(-t).$$

Im Übrigen fügen wir die selbstverständliche Bemerkung hinzu:

*Die allgemeine Lösung ergiebt sich aus unsern Partikularlösungen in der Form*

$$c_1 z(t) + c_2 z(-t), \tag{25}$$

*wo $c_1$ und $c_2$ die willkürlichen Integrationskonstanten sind.*

In unserem Falle $n = 1$ hat $z(t)$ die folgende einfache Form

$$z(t) = e^{\mu t} \frac{\vartheta(t - t_1)}{\vartheta(t - i\omega')}, \tag{26}$$

wo die eingeführten Konstanten $\mu$ und $t_1$ aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind. Die folgende Rechnung, welche zu dieser Konstantenbestimmung dient, läfst gleichzeitig erkennen, dafs $z(t)$ bei richtiger Konstantenwahl der in Rede stehenden Differentialgleichung wirklich genügt, und liefert somit einen expliciten Beweis der sämtlichen vorhergehenden Bemerkungen.

Wir betrachten vorerst die Gröfse

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} \frac{z''}{z} &= \frac{d^2 \log z}{dt^2} + \left(\frac{d \log z}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2} - \frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\mu + \frac{d \log \vartheta(t - t_1)}{dt} - \frac{d \log \vartheta(t - i\omega')}{dt}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

Dieselbe wird nur an den Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ sowie an den äquivalenten Stellen unendlich, und zwar an den ersteren von der ersten, an den letzteren von der zweiten Ordnung. Entwickeln wir nämlich $\frac{d \log \vartheta(t)}{dt}$ nach dem Taylorschen Lehrsatze bei $t = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{d \log \vartheta(t)}{dt} = \frac{1}{t} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} t + \cdots, \tag{28}$$

also

$$\frac{d^2 \log \vartheta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \cdots. \tag{28'}$$

Mithin lautet die Entwickelung unseres obigen Ausdrucks an den Stellen $t = t_1$ bez. $t = i\omega'$, wenn wir nur die unendlich werdenden Terme hinschreiben:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{t - t_1}\left(\mu - \frac{d \log \vartheta(t_1 - i\omega')}{dt_1}\right) + \cdots \quad (\text{für } t = t_1),$$

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \frac{2}{t - i\omega'}\left(\mu + \frac{d \log \vartheta(i\omega' - t_1)}{dt_1}\right) + \cdots \quad (\text{für } t = i\omega').$$

Wir können nun durch Wahl von $\mu$ die Unendlichkeitsstelle bei $t = t_1$ in Fortfall bringen; wir brauchen nur zu setzen

$$\mu = \frac{d \log \vartheta(t_1 - i\omega')}{dt_1};$$

gleichzeitig verschwindet dann auch in unserer zweiten Entwickelung der Term mit $(t - i\omega')^{-1}$. Diese lautet daher jetzt:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} + \cdots \tag{29}$$

oder, wenn wir noch das konstante Glied der Potenzreihe mitnehmen wollen:

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{(t - i\omega')^2} - \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2}\right)_{t = i\omega'} + \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \cdots \tag{29'}$$

Ferner sieht man es der in (27) gegebenen Darstellung sofort an, dafs $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$ ist. Es werden daher die Entwickelungen (28) und (29) aufser für die Stellen $t = t_1$ und $t = i\omega'$ auch für die sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Mithin werden bei unserer Wahl von $\mu$ aufser der Stelle $t = t_1$ auch die sämtlichen mit ihr äquivalenten Stellen als Unendlichkeitsstellen in Fortfall kommen und es wird andrerseits die Gleichung (29) nicht nur an der Stelle $t = i\omega'$, sondern auch an den sämtlichen äquivalenten Stellen gültig sein. Somit haben wir bewiesen:

*Bei unserer Wahl von $\mu$ ist $\frac{z''}{z}$ eine doppeltperiodische Funktion von $t$, welche an den Stellen $t = i\omega'$ und den äquivalenten Stellen und nur an diesen von der zweiten Ordnung mit dem Multiplikator 2 unendlich wird.*

Eine ebensolche Funktion ist aber nach obigem

$$\frac{2P}{M} u(t).$$

Die Differenz beider wäre also eine doppeltperiodische Funktion, welche für keinen Punkt der $t$-Ebene unendlich wird. Eine solche Funktion reduziert sich aber notwendiger Weise auf eine Konstante $c$. Wir haben also:

$$\frac{z''}{z} - \frac{2P}{M} u(t) = c. \tag{30}$$

Dies ist direkt eine Laméssche Gleichung. Wir sehen mithin:

*Bei der obigen Wahl von $\mu$ genügt unsere elliptische Funktion ersten Grades $z(t)$ der Hermite-Laméschen Gleichung*

$$z'' = \left(\frac{2P}{M} u(t) + c\right) z. \tag{30'}$$

Die in dieser Gleichung vorkommende Grölse $c$ hängt dabei von der noch disponibeln Konstanten $t_1$ ab. Durch passende Wahl dieser Konstanten wird es daher möglich sein, der Konstanten $c$ einen beliebigen Wert zu erteilen, und es insbesondere so einzurichten, dafs die vorstehende Gleichung direkt in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht.

Um dieses zu erreichen, drücken wir zunächst die Gröfse $c$ in einer für das Folgende bequemen Weise durch $t_1$ aus. Wir setzen zu dem Zwecke in (30) $t = i\omega'$ und schreiben:

$$(31) \qquad c = \left\{\frac{z''}{z} - \frac{3P}{M} u(t) + \frac{P}{M} u(t)\right\}_{t=i\omega'}.$$

Darauf betrachten wir den Ausdruck:

$$\frac{P}{M} u(t) + \frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2};$$

derselbe ist eine doppeltperiodische Funktion von den Perioden $2\omega$ und $2i\omega'$, welche an keiner Stelle der $t$-Ebene unendlich wird. In der That heben sich die bei $t = i\omega'$ und den äquivalenten Punkten gelegenen Unendlichkeitsstellen des ersten und zweiten Termes nach den Gleichungen (24) und (28′) gerade auf. Unser Ausdruck ist also eine Konstante, so dafs wir schreiben können:

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + c'.$$

Den Wert von $c'$ bestimmen wir auf doppelte Weise, indem wir einmal $t = ia$ und $u = -1$, das andere Mal $t = \omega - ib$ und $u = +1$ setzen. Wir erhalten so

$$c' = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$c' = \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}$$

Entsprechend ergiebt sich für $u(t)$ der doppelte Ausdruck

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

und

$$\frac{P}{M} u(t) = -\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}$$

Wir schreiben uns insbesondere die hieraus folgenden Entwicklungen an der Stelle $t = i\omega'$ hin, welche wir mit dem konstanten Gliede abbrechen; sie lauten nach (28′):

$$\frac{P}{M} u(t) = \frac{1}{(t - i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{P}{M}$$

bez.

$$\frac{P}{M} u(t) = \frac{1}{(t - i\omega')^2} - \frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} + \frac{P}{M}.$$

Diese Entwickelungen setzen wir rechterhand in Gleichung (31) für das dritte Glied ein. Gleichzeitig ersetzen wir das erste und zweite Glied durch die Entwickelungen (29′) und (24′). Alsdann heben sich, wie es sein mufs, die für $t = i\omega'$ unendlich werdenden Bestandteile heraus und wir bekommen:

$$(32) \quad c = -\left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=ia} - \frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$(32') \quad c = -\left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - t_1)}{dt^2}\right)_{t=i\omega'} + \left(\frac{d^2 \log \vartheta(t - i\omega')}{dt^2}\right)_{t=\omega-ib} - \frac{2h-P}{M}.$$

Somit haben wir für die in Gleichung (30′) eingehende Konstante $c$ zwei verschiedene Darstellungen gewonnen. Wir benutzen sie dazu, um die Gröfse $t_1$ in solcher Weise zu bestimmen, dafs Gleichung (30′) in die erste oder zweite der Gleichungen (22) übergeht. Dies erreichen wir dadurch, dafs wir einmal

$$(33) \qquad t_1 = ia,$$

das andere Mal

$$(33') \qquad t_1 = \omega - ib$$

setzen, wobei nach (32) und (32′) in der That

$$c = -\frac{2h+P}{M}$$

bez.

$$c = -\frac{2h-P}{M}$$

wird. *Wählen wir also die in unserer elliptischen Funktion $z(t)$ vorkommende, noch disponible Konstante $t_1$ so, wie in den Gleichungen (33) und (33′) angegeben, so haben wir in den so entstehenden Funktionen Partikularlösungen der beiden Gleichungen (22) vor uns.*

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dafs unsere Parameter $\alpha$ und $\beta$ diesen Partikularlösungen bis auf einen konstanten Faktor gleich sind.

Zunächst werden wir den Wert von $\alpha$ nach dem Schema der allgemeinen Lösung (25) in der Form anzusetzen haben:

$$(34) \qquad \alpha = c_1 z(t) + c_2 z(-t).$$

Der zu $\alpha$ konjugierte Parameter $\delta$ lautet dann, da wegen der besonderen Form von $z(t)$ unsere Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ konjugiert-imaginäre Gröfsen sind:

$$\delta = \bar{c}_2 z(t) + \bar{c}_1 z(-t), \tag{34'}$$

unter $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ die zu $c_1$ und $c_2$ konjugierten Konstanten verstanden.

Wir werden nun sehen, dafs wir entweder $c_2$ (und also auch $\bar{c}_2$) oder $c_1$ (und also auch $\bar{c}_1$) gleich Null setzen müssen.

Wir benutzen zu dem Zwecke die aus den Definitionsgleichungen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ von pag. 21 folgenden Gleichungen:

$$\alpha\delta = \frac{u+1}{2}, \quad \beta\gamma = \frac{u-1}{2}. \tag{35}$$

Die erste derselben zeigt, dafs die Nullstellen von $\alpha$ und $\delta$ mit denen von $u+1$, d. h. mit den Stellen $t = \pm ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$ übereinstimmen. Setzen wir also $t = ia$, so mufs entweder $\alpha$ oder $\delta$ verschwinden. In den Gleichungen (34) haben wir daher entweder $c_2 = 0$ oder $\bar{c}_1 = 0$ zu nehmen. Setzen wir andrerseits $t = -ia$, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dafs wir entweder $c_1 = 0$ oder $\bar{c}_2 = 0$ nehmen müssen. Wir haben also in der That die beiden oben bezeichneten Möglichkeiten, entweder $c_1$ oder $c_2$ gleich Null zu setzen. Ob wir dieses oder jenes thun wollen, macht keinen grofsen Unterschied aus. *In jedem Falle ergiebt sich, dafs unsere Parameter $\alpha$ und $\delta$ den partikulären Lösungen $z(t)$ und $z(-t)$ direkt proportional sind.*

Wählen wir z. B. $c_2 = 0$, so bekommen wir, indem wir für $z(t)$ und die darin vorkommenden Konstanten die gefundenen Ausdrücke eintragen:

$$\alpha = c_1 e^{\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')} t} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$\delta = \bar{c}_1 e^{-\frac{\vartheta'(ia - i\omega')}{\vartheta(ia - i\omega')} t} \frac{\vartheta(t + ia)}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

(Hätten wir die andere Möglichkeit $c_1 = 0$ gewählt, so würden sich nur die Ausdrücke von $\alpha$ und $\delta$ gegenseitig ausgetauscht haben.)

Ganz ebenso findet man aus der zweiten der Gleichungen (35), wenn man das eine Mal $t = \omega - ib$, das andere Mal $t = -\omega + ib$ setzt, dafs auch $\beta$ und $\gamma$ direkt den multiplikativen Partikularlösungen unserer zweiten Gleichung (22) bis auf einen Faktor gleich sind. Die Ausdrücke von $\beta$ und $\gamma$ werden auf solche Weise:

$$\beta = c_2 e^{\frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega)} t} \frac{\vartheta(t - \omega + ib)}{\vartheta(t - i\omega')},$$

$$\gamma = \bar{c}_2 e^{-\frac{\vartheta'(\omega - ib - i\omega')}{\vartheta(\omega - ib - i\omega')} t} \frac{\vartheta(t + \omega - ib)}{\vartheta(t + i\omega')}.$$

Somit haben wir unsere früheren Werte der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ (vergl. pag. 420 und 428) auf kürzestem und direktestem Wege wiedergewonnen. Es bleibt nur noch die Bestimmung der multiplizierenden Konstanten $c_1$ und $c_2$ übrig, welche sich genau auf die pag. 425 und 426 angegebene Weise bewerkstelligen läfst. Wir brauchen hierauf nicht nochmals einzugehen.

Die Differentialgleichungen für die $A$, $B$, $C$, $D$, welche ebenfalls Lamésche Gleichungen und von denen für die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ überhaupt nicht verschieden sind, lassen sich natürlich genau ebenso integrieren. Die Vereinfachung, welche die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ gegenüber den $A$, $B$, $C$, $D$ mit sich bringen, kommt erst in den Endresultaten zur Geltung, wo sich zeigt, dafs die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ den multiplikativen Partikularlösungen unserer Laméschen Gleichungen direkt proportional sind, während sich die $A$, $B$, $C$, $D$ aus ihnen linear zusammensetzen. —

Der Hauptzweck, den wir mit diesem Nachtrag verfolgten: zu zeigen, dafs unsere Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ nicht nur für die Formulierung der Schlufsresultate, sondern auch für die direkte Integration des Kreiselproblems von Nutzen sind, ist hiermit erreicht.

Wir bemerken noch, dafs das hier gegebene Integrationsverfahren genau den Intentionen Hermite's entspricht, welche dieser Autor in seinen berühmten Untersuchungen über die Anwendungen der elliptischen Funktionen (den pag. 151 citierten Applications des fonctions elliptiques) niedergelegt hat. Während aber Hermite von dem Problem des schweren Kreisels nur den Spezialfall des gewöhnlichen sphärischen Pendels behandelt, gelang es uns, dank der Einführung der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seine Methode auf die Behandlung des schweren Kugelkreisels (unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels) auszudehnen, von welchem der Übergang zu einem beliebigen symmetrischen Kreisel jederzeit nach den früheren Regeln möglich ist. Und während Hermite für die rechtwinkligen Koordinaten $x$, $y$, $z$ des gewöhnlichen sphärischen Pendels bez. für deren komplexe Verbindungen $x + iy$, $x - iy$, $z$ elliptische Funktionen zweiter Art zweiten Grades findet, ergeben sich für die rechtwinkligen Koordinaten $A$, $B$, $C$, $D$ unseres vierdimensionalen sphärischen Pendels oder vielmehr für deren komplexe Verbindungen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ elliptische Funktionen ersten Grades, so dafs also die Hermiteschen Resultate selbst durch das Vorstehende eine Vereinfachung erfahren. Um die vollständige Parallelität der Hermiteschen und der hier gegebenen Entwickelungen zu würdigen, vergleiche man insbesondere pag. 109 u. ff. des genannten Werkes.

Gleichzeitig werden wir durch die vorstehenden Betrachtungen noch einem anderen in der Litteratur bereits vorliegenden Ansatze gerecht.

Herr Tait stellt sich nämlich in der pag. 142 citierten Arbeit die Aufgabe, allgemein die Rotationsprobleme auf Grund der Quaternionentheorie zu behandeln. Besonders elegant sind seine Resultate im kinematischen Teile; aber auch im kinetischen Teile finden sich bemerkenswerte Ansätze, welche enge mit unsern letzten Betrachtungen zusammenhängen. Dabei faſst Tait unsere vier Quaternionenparameter $A$, $B$, $C$, $D$, wie es in der Quaternionentheorie üblich ist, in die eine komplexe Gröſse

$$q = iA + jB + kC + D$$

zusammen und bildet die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher diese Gröſse genügt (vgl. insbesondere Art. 30 der genannten Arbeit), und zwar sogleich für den allgemeinsten Fall einer beliebigen unsymmetrischen Massenverteilung und eines beliebigen äuſseren Kraftsystems. Indessen gelingt es ihm nicht, von dieser Differentialgleichung aus zu einer allgemeinen Integration vorzudringen, vielmehr erklärt er diese Aufgabe, wie es bei der angestrebten Allgemeinheit kaum anders möglich ist, für „unentwirrbar kompliziert“.

Unsere obigen Betrachtungen zeigen nun, daſs in dem allerdings ganz speziellen Fall des schweren Kugelkreisels die Differentialgleichung für die Quaternion $q$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die vier Differentialgleichungen für die Quaternionenkomponenten $A$, $B$, $C$, $D$ eine äuſserst einfache Gestalt annehmen und ein sehr elegantes Integrationsverfahren zulassen. Gleichzeitig erkennen wir aber, daſs es für die analytische Durchführung der Integration praktisch ist, von den Quaternionengröſsen $A$, $B$, $C$, $D$ wieder zu unseren Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ überzugehen, welche in analytischer Hinsicht von unübertrefflicher Einfachheit sind. Jedenfalls werden wir hiernach unser vorliegendes Integrationsverfahren als spezielle Durchführung des den Vertretern der Quaternionentheorie in Sachen der Rotationsprobleme vorschwebenden Ideales ansehen dürfen.

Was die Beziehung der Kreiselbewegung zur Punktmechanik betrifft, so bemerken wir, daſs die obigen Auseinandersetzungen als ein spezielles Beispiel für eine allgemeine mathematische Methode anzusehen sind, nach welcher man jedes noch so komplizierte mechanische Problem in gewissem Sinne als ein Problem der Punktmechanik auffassen kann. Man ordnet nämlich dem mechanischen System, wie oben geschehen, einen einzelnen Massenpunkt, einen „Repräsentanten“ zu, indem man die Lagenkoordinaten des Systems als Koordinaten des Repräsentanten deutet. Dabei wird man entsprechend der Anzahl der benutzten Lagenkoordinaten in einen Raum von eventuell höherer Dimensionenzahl geführt. In diesem Raume legt man ferner im Anschluſs an

den Ausdruck der lebendigen Kraft eine geeignete Bestimmung über die Messung der Entfernungen zu Grunde; man berechnet nämlich die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte oder, wie man sich kürzer ausdrückt, das Linienelement des betreffenden Raumes durch die Gleichung

$$ds^2 = 2T\,dt^2,$$

wo die rechte Seite ersichtlich eine definite quadratische Form der unendlich kleinen Koordinatendifferenzen der beiden Punkte wird, und definiert im Übrigen die Bewegung des Massenpunktes wieder durch das Bestehen der Lagrangeschen Gleichungen.

Dann entsprechen sämtliche Lagen, welche der Repräsentant bei der so definierten Bewegung einnimmt, sämtlichen Lagen, welche das ursprüngliche mechanische System nacheinander durchläuft. Die Bewegung des Repräsentanten wird ein genaues Abbild von der Bewegung des Systems.

Es ist klar, dafs die hier skizzierte mehrdimensionale Punkt-Auffassung der mechanischen Probleme im Grunde nur eine Umdeutung der ursprünglichen Fragestellung ist. Sie vermittelt keine eigentlich neue Erkenntnis, sondern gestattet nur eine in vielen Fällen bequeme Formulierung desselben Sachverhaltes.

Wie nützlich diese punktmechanische Auffassung immerhin werden kann, zeigt gerade am deutlichsten unser Beispiel des Kugelkreisels. Hier führte uns die Analogie mit dem auf einer vierdimensionalen Einheitskugel beweglichen Massenpunkte zu einer wesentlichen Vereinfachung des Integrationsverfahrens und gestattete uns, die von früher her bekannten Integralsätze der Kreiselbewegung in neuer und sehr anschaulicher Weise aufzufassen und auszusprechen.

So einfach wie im vorliegenden Falle wird die punktmechanische Deutung im Allgemeinen allerdings nicht ausfallen. Man mufs nämlich, wie bereits angegeben, in dem Raume, in welchem die Bewegung des Repräsentanten verfolgt werden soll, allgemein zu reden, eine von der gewöhnlichen abweichende Bestimmung über das Mafs der Entfernungen zu Grunde legen und mufs dementsprechend eine kompliziertere und willkürliche Art von Geometrie und Mechanik postulieren. Demgegenüber besteht das Bemerkenswerte an unseren obigen Ausführungen gerade darin, dafs wir hier mit der elementaren Euklidischen Geometrie auskommen, indem wir alle Eigenschaften des realen dreidimensionalen Raumes direkt auf den vierdimensionalen Raum unseres Repräsentanten übertragen.

Den Mathematikern ist die in Rede stehende mehrdimensionale Auffassung der mechanischen Probleme seit den wichtigen Arbeiten

von **Beltrami***) aus dem Jahre 1869 und von **Lipschitz****) aus dem Jahre 1872 geläufig. In weiteren Kreisen dürfte sie aber erst durch das schöne Werk von **Hertz** über die Prinzipien der Mechanik vom Jahre 1894 Eingang gefunden haben, welches ganz und gar auf diesen mehrdimensionalen, punktmechanischen Vorstellungen beruht. —

Wir beschliefsen dieses Kapitel, indem wir die historischen Notizen von pag. 429 und 430 durch einige interessante Angaben vervollständigen.

Von mehreren Seiten wurden wir darauf aufmerksam gemacht, dafs **Weierstrass** bereits im Jahre 1879 bei Gelegenheit einer Vorlesung *über die Anwendungen der elliptischen Funktionen* unsere $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zur Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels verwertet hat. Eine Ausarbeitung dieser Vorlesung ist uns von Herrn **J. Hänlein**-Berlin in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt.

Weierstrass betont in jener Vorlesung zunächst, dafs die Betrachtung der neun Richtungscosinusse bei dem Problem des schweren symmetrischen Kreisels rechnerische Komplikationen mit sich bringt, welche man vermeidet, wenn man zur Festlegung der einzelnen Drehung die drei in der Anmerkung von pag. 60 genannten Eulerschen symmetrischen Drehungsparameter $\lambda$, $\mu$, $\nu$ benutzt. Von diesen geht er mittels der Proportion $\lambda : \mu : \nu : 1 = A : B : C : D$ zu unseren vier Quaternionengröfsen über, welche durch Hinzufügung der Bedingungsgleichung $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ bis auf einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel festgelegt werden. Die geometrische Bedeutung der $A$, $B$, $C$, $D$ wird in dem Sinne der Gleichungen (14) von pag. 38 mit Hülfe von Drehungsaxe und Drehungswinkel erläutert. Endlich bildet Weierstrass die komplexen Verbindungen $A + iB$, $C + iD$, d. h. im Wesentlichen zwei von unsern vier Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und bestimmt diese als elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades mittels gewisser Formeln, welche sich, auf den Fall des Kugelkreisels spezialisiert, genau mit unserer Darstellung von pag. 420 und 428 decken. (Ein rein äufserlicher Unterschied besteht darin, dafs Weierstrass die $\sigma$-Funktion statt der $\vartheta$-Function verwendet und übrigens $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ statt $A$, $B$, $C$, $D$ schreibt). Bei der Behandlung des kräftefreien unsymmetrischen Kreisels hat Weierstrass die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ nicht verwendet. Vielmehr geht er hier auf die Jacobischen Richtungscosinus aus, die er nach vorheriger Integration der Eulerschen Gleichungen ziemlich direkt als elliptische Funktionen ersten Grades hinzuschreiben vermag.

---

*) Mem. dell' Istituto di Bologna, ser. II, t. VIII, Teorica generale dei parametri differenziali.

**) Crelles Journal Bd. 74, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

Ferner fehlt bei Weierstrass (abgesehen von den Ausführungen des letzten Paragraphen) die Beziehung der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu der komplexen Variabeln, welche wir uns auf der Riemannschen Kugelfläche ausgebreitet dachten, und die Gleichung für die lineare Transformation dieser Variabeln bei Ausführung der Drehung $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$\lambda = \frac{\alpha \Lambda + \beta}{\gamma \Lambda + \delta}.$$

Was nun speziell diesen letzteren Punkt betrifft, so sind wir inzwischen in der Lage, einen noch viel älteren und noch viel interessanteren historischen Nachweis beizubringen. Bei der Bearbeitung des Gaufsischen Nachlasses hat sich nämlich gezeigt, dafs diese ganze Vorstellungsweise bereits Gaufs vollständig geläufig war, und ferner, dafs die Grundlagen der Quaternionentheorie explicite in den gelegentlichen Aufzeichnungen von Gaufs enthalten sind. Wir citieren zu diesem überraschenden Ergebnis einige Sätze aus einer vorläufigen Mitteilung „Über den Stand der Herausgabe von Gaufs' Werken", Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Heft 1, 1898:

"Gaufs hat bereits genau so, wie später Riemann, eine komplexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel gedeutet und hat gewufst, dafs sich die Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt durch lineare Substitutionen dieses $z$ von bestimmter einfacher Bauart darstellen! Und, was noch überraschender scheinen kann, er hat die „Mutationen des Raumes" (wie er sagt), d. h. die Drehungen des Raumes um den Koordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer beliebigen von letzterem auslaufenden Ähnlichkeitstransformation, bereits 1819 durch dieselben vier Parameter dargestellt, welche die spätere Quaternionentheorie benutzt; er bezeichnet den Inbegriff dieser vier Parameter als „Mutationsskala" und giebt die expliciten Formeln für die Zusammensetzung zweier Skalen (also die Multiplikation zweier Quaternionen), wobei er die symbolische Schreibweise $(a\,b\,c\,d) \cdot (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (A\,B\,C\,D)$ benutzt und ausdrücklich bemerkt, dafs es sich dabei um einen nicht kommutativen Prozefs handelt!"*)

---

*) Vgl. Gaufs, Ges. Werke Bd. VIII (1900), pag. 357—362.